

現代物理学 III 8.Einstein 方程式 I

1 Newton 重力からの類推

一般相対論では、重力は力ではなく時空の曲がりとして記述される。その基本方程式が Einstein 方程式である。

しかし、Einstein 方程式をいきなり導入しても、その物理的意味は分かりにくい。そこでまず Newton 重力において、質量密度 ρ がどのように重力場を決定するのかを確認する。これは Poisson(ポアソン)方程式によって与えられる。

$$\nabla^2 g_{00} \simeq 8\pi G\rho \quad (1)$$

この式は、物質分布が時空計量の時間成分を決定することを意味しており、アインシュタイン方程式の弱重力極限に対応している。

1.1 万有引力の法則

質量 M を持つ天体が原点に存在するとする（大きさは無視できるとしよう）。原点から距離 r にある質量 m の質点には、

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (2)$$

の大きさの引力が働く。力の向きを含めてベクトルで書けば、

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{r}}$ は、動径方向外向きの単位ベクトルである。負号は力が中心方向を向いていることを表している。

1.2 重力場

単位質量あたりに働く力をここでは重力場と呼ぶことにしよう。（これは静電場を学んだ際に、単位電荷あたりに働くクーロン力を電場と呼ぶことに似ている。）

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (4)$$

したがって、

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (5)$$

となる。Newton 重力では、このベクトル場 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ が重力を表している。

1.3 重力ポテンシャル

ベクトル解析では、重力場はスカラー関数 ϕ を用いて

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi \quad (6)$$

と表される。この $\phi = \phi(r)$ を重力ポテンシャルという。球対称な場合には、

$$g_r = -\frac{d\phi}{dr} \quad (7)$$

である。先ほど求めた重力場を代入すると、

$$-\frac{d\phi}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \quad (8)$$

となる。これを積分すると、

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (9)$$

を得る。無限遠でポテンシャルがゼロとなる条件を用いた。

1.4 Poisson 方程式

半径 r の球面を考える。球面上では重力場の大きさは一定であるため、

$$|\mathbf{g}| = \frac{GM}{r^2} \quad (10)$$

である。

球面を貫く重力場のフラックスは

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{GM}{r^2} (4\pi r^2) \quad (11)$$

となる。

よって、

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM \quad (12)$$

を得る。

一方、球内部の総質量は

$$M = \int_V \rho dV, \quad (13)$$

である。

したがって、

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G \int_V \rho dV, \quad (14)$$

となる。

Gauss の発散定理

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{g}) dV, \quad (15)$$

を用いると、

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{g}) dV = -4\pi G \int_V \rho dV, \quad (16)$$

を得る。この式は任意の体積 V に対して成立するため、

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho, \quad (17)$$

でなければならない。さらに、

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi \quad (18)$$

を代入すると、

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi) = -4\pi G\rho \quad (19)$$

となる。ここでラプラシアン

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (20)$$

を用いれば、

$$\boxed{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho} \quad (21)$$

を得る。これを Newton 重力における Poisson 方程式という。この方程式は、

質量密度 ρ が重力ポテンシャル ϕ を決定する

ことを意味している。

1.5 一般相対論との関係

一般相対論では重力ポテンシャルの代わりに計量

$$g_{\mu\nu} \quad (22)$$

が重力を表す基本的な量である。弱重力場では、

$$g_{00} \simeq 1 + 2\phi \quad (23)$$

という関係が成り立つことは前回の講義でも見た通りである。両辺にラプラシアンを作用させると、

$$\nabla^2 g_{00} = \nabla^2(1 + 2\phi) \quad (24)$$

となる。定数のラプラシアンはゼロであるため、

$$\nabla^2 g_{00} = 2\nabla^2\phi \quad (25)$$

を得る。ここに Poisson 方程式

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (26)$$

を代入すると、

$$\boxed{\nabla^2 g_{00} \simeq 8\pi G\rho} \quad (27)$$

となる。これは Newton 重力における

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (28)$$

の一般相対論版であり、

物質分布が時空の形を決定する

ことを示している。実際には、一般相対論では時間成分だけでなく空間成分も含めた計量全体が物質によって決定される。その完全な方程式が Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (29)$$

である。左辺は時空の曲率を表し、右辺はエネルギーと運動量の分布を表す。

Newton 重力において質量密度が重力ポテンシャルを決定したように、一般相対論では物質のエネルギーと運動量が時空の曲率を決定するのである。

2 幾何 = 物質

Einstein 方程式（重力場の方程式）は一言で言えば、物質の分布は時空の歪み（幾何学量）を生じさせることをいう。この方程式が座標変換に対して共変な形で書かれるのであればとすれば、テンソル量で記述されている方程式であるだろう。これをひとまず次のような形で仮定してみる。

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (30)$$

ここで $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルであり、物質の持つエネルギー（密度）や圧力を表す量である。そして、 $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソルと呼ばれる量であり、Einstein 方程式の「幾何学量」を担う部分である。 κ は比例係数であり、現段階では未知の量である。以下では、エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ と Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ について学んでいこう。

3 エネルギー運動量テンソル

一般相対論では、（一般に空間的・時間的広がりをもつ）物質やエネルギーの分布は、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}(x)$ によって記述される。本節では、その物理的意味を理解し、最終的に完全流体のエネルギー運動量テンソルを導入する。

3.1 エネルギー密度

まず、ある微小体積 dV の中にエネルギー dE が含まれているとする。このとき

$$\rho_E = \frac{dE}{dV} \quad (31)$$

をエネルギー密度と呼ぶ。エネルギー密度は、単位体積あたりにどれだけのエネルギーが存在するかを表している。

3.2 エネルギー流束

次に、物質が運動している場合を考える。エネルギーは空間中を移動するため、ある面を単位時間あたりに通過するエネルギー量を考えることができる。

例えば x 方向について、単位面積・単位時間あたりに流れるエネルギーを

$$F_E^x \quad (32)$$

と書く。このような量をエネルギー流束あるいはエネルギーフラックスと呼ぶ。

3.3 運動量密度と運動量流束

同様に、運動量についても密度と流束を定義することができる。運動量密度

$$\rho_p^i \quad (33)$$

は単位体積あたりの運動量を表し、

$$F_p^{ij} \quad (34)$$

は i 方向の運動量が j 方向へどれだけ運ばれているかを表す。

特に対角成分

$$F_p^{xx}, \quad F_p^{yy}, \quad F_p^{zz} \quad (35)$$

は圧力と同じ物理量である。

実際、気体の圧力は分子が壁へ衝突して運動量を伝達することによって生じるため、

$$\text{圧力} = \text{運動量流束} \quad (36)$$

と解釈することができる。

3.4 エネルギー運動量テンソル

エネルギー密度、エネルギー流束、運動量密度、運動量流束を一つにまとめたものがエネルギー運動量テンソルである。

その成分は

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

と表される。

各成分の物理的意味は

T^{00} : エネルギー密度,

T^{0i} : エネルギー流束,

T^{i0} : 運動量密度,

T^{ij} : 運動量流束 (圧力・応力)。

したがって、エネルギー運動量テンソルはエネルギーや運動量が空間中をどのように流れているかを記述する量と考えることができる。

3.5 完全流体のエネルギー運動量テンソル

圧力を持たない粒子集団をダストと呼ぶ。粒子とともに運動する座標系 (流体の静止系) では、エネルギー密度のみが存在し、

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

となる。

ここで ρ は流体の静止系で測定したエネルギー密度である。

流体の 4 元速度を

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (39)$$

と書けば、

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \quad (40)$$

と表すことができる。

この式は任意の座標系で成立する共変的な表式 (つまりテンソル) であり、自由流体のエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (41)$$

と書かれる。

3.6 完全流体

現実の流体では粒子の熱運動によって圧力が生じる。流体静止系ではエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (42)$$

となる。ここで p は流体の圧力である。この表式を共変的に書くと

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (43)$$

となる (計量の符号を $(-, +, +, +)$ とした場合)。これは完全流体のエネルギー運動量テンソルと呼ばれ、宇宙論や星内部の構造を論じる上で広く用いられている。

3.7 エネルギー運動量保存則

エネルギー運動量テンソルの最も重要な性質の一つは、

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (44)$$

を満たすことである。

この式はエネルギー保存則と運動量保存則を統一的に表している。

実際、平坦時空では共変微分は通常の偏微分に置き換わり、

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (45)$$

となる。

例えば $\nu = 0$ 成分を取り出すと

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = 0 \quad (46)$$

となる。

ここで T^{00} はエネルギー密度、 T^{i0} はエネルギー流束を表しているの、これは「ある領域のエネルギーの増減は、その領域を出入りするエネルギー流によって決まる」というエネルギー保存則を表している。

同様に、 $\nu = i$ 成分は運動量保存則を与える。したがって

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (47)$$

は、エネルギー保存則と運動量保存則を 4 次元時空上で統一的に記述した方程式である。

Einstein 方程式を

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (48)$$

で仮定するならば、この $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ と一貫するように、(まだ具体的な表式がわからない) Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ も

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (49)$$

を満たす必要がある。この Einstein テンソルの発散がゼロになる式を Bianchi(ビアンキ) 恒等式という。次の章では、Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ の具体的な表式を決める一つの指針・要請として、Bianchi 恒等式を用いる。

4 Einstein テンソル

Einstein テンソルとはどのような形をしているのだろうか？これは物質の情報を担う 2 階のテンソル $T_{\mu\nu}$ と合わせて、 $G_{\mu\nu}$ も 2 階のテンソルであると仮定した。そして、Poisson 方程式 (28) からの類推から $G_{\mu\nu}$ もまた計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含む量であると仮定するべきだろう。

問題 1 もし、 $G_{\mu\nu}$ が計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の 1 階微分 $\partial_\mu g_{\mu\nu}$ あるいは接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ だけから構成されるテンソルであったとすると不都合が生じる。どのような不都合かを答えなさい。

さらに、前述の通り Einstein テンソルは Bianchi 恒等式を満たす必要がある。また、エネルギー運動量テンソルは添字の入れ替えに対して対称であることから $G_{\mu\nu}$ もそうあるべきである。また、Minkowski 時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ では、物質は存在しないはずなので

$G_{\mu\nu} = 0$ であるべきである。以上をまとめると次のとおりである。

- Minkowski 時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ では、物質は存在しないはずなので $G_{\mu\nu} = 0$.
- $G_{\mu\nu}$ は対称テンソル.
- $G_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$, $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$, $\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}$ だけで構成されるテンソル.
- $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ が恒等的に成り立つ.

これらの要請を満たすテンソルは定数倍の自由度を除けば

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (50)$$

であることが示せる。ここで、 $R_{\mu\nu}$ は Ricci(リッチ) テンソルといい、Riemann テンソルを用いて

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\alpha\nu}^\alpha, \quad (51)$$

で定義され、 R は Ricci スカラー

$$R := R_\mu^\mu, \quad (52)$$

で定義される。

このように定義された Einstein テンソルの発散はゼロになるのかを次に確かめてみよう。