

現代物理学 III 7. 光とブラックホール

1 ブラックホールと光球面

光は重力場によって曲げられる。それを見るべく、まずは質点 (質量 m) の赤道面上での運動を考えよう。前回との違いは動径方向 r に加え、赤道面上における角度 ϕ の方向にも質点が動く場合を考える点にある。まずはいつものように、作用 S から始めよう。

$$S = -m \int \sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2} dt = \int \mathcal{L} dt, \quad (1)$$

ここでラグランジアンは次で与えられる。

$$\mathcal{L} = -m \sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}, \quad (2)$$

このラグランジアンは t と ϕ に陽に依存しないため、それぞれの変数に対応した保存量ハミルトニアン H と角運動量 L が存在する。具体的に計算すると、まず角運動量は

$$L := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{mr^2\dot{\phi}}{\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}} \quad (3)$$

である。

次に、 r に共役な運動量は

$$p_r := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{mf^{-1}(r)\dot{r}}{\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}} \quad (4)$$

である。したがって、ハミルトニアンは

$$H := p_r \dot{r} + L \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (5)$$

で定義される。これに上の式を代入すると、

$$\begin{aligned} H &= \frac{mf^{-1}(r)\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2}{\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}} \\ &\quad + m\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2} \\ &= \frac{mf(r)}{\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

このハミルトニアンは保存量であるため、

$$H = E \quad (7)$$

とおく。すなわち、

$$E = \frac{mf(r)}{\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}} \quad (8)$$

である。

一方、角運動量の式より

$$L = \frac{mr^2\dot{\phi}}{\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}} \quad (9)$$

である。これとエネルギーの式を比べると、

$$\frac{L}{E} = \frac{r^2\dot{\phi}}{f(r)} \quad (10)$$

となる。したがって、

$$\dot{\phi} = \frac{L}{E} \frac{f(r)}{r^2} \quad (11)$$

を得る。

また、エネルギーの式から

$$\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2} = \frac{mf(r)}{E} \quad (12)$$

である。両辺を 2 乗すると、

$$f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = \frac{m^2 f^2(r)}{E^2} \quad (13)$$

となる。

ここに

$$\dot{\phi} = \frac{L}{E} \frac{f(r)}{r^2} \quad (14)$$

を代入すると、

$$f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2 - \frac{L^2 f^2(r)}{E^2 r^2} = \frac{m^2 f^2(r)}{E^2} \quad (15)$$

である。これを $\dot{r}^2$ について解くと、

$$\dot{r}^2 = f^2(r) \left[1 - \frac{f(r)}{E^2} \left(m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right] \quad (16)$$

を得る。

ここで光の軌道を考えるため、質量を

$$m = 0 \quad (17)$$

とする。このとき

$$\dot{r}^2 = f^2(r) \left[1 - \frac{L^2}{E^2} \frac{f(r)}{r^2} \right] \quad (18)$$

である。したがって

$$\dot{r}^2 = U(r) \quad (19)$$

と書ける。ただし、

$$U(r) := f^2(r) \left[1 - b^2 \frac{f(r)}{r^2} \right], \quad b := \frac{L}{E} \quad (20)$$

である。

光の円軌道では半径 r が一定であるため、

$$\dot{r} = 0, \quad \frac{dU}{dr} = 0 \quad (21)$$

が成り立つ。第一の条件 $\dot{r} = 0$ は

$$1 - b^2 \frac{f(r)}{r^2} = 0, \quad (22)$$

を意味する。

さらに円軌道の位置は、

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r^2} \right) = 0 \quad (23)$$

によって決まる。ここで

$$\frac{f(r)}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{r^3} \quad (24)$$

なので、

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} + \frac{6GM}{r^4} \quad (25)$$

である。したがって

$$-\frac{2}{r^3} + \frac{6GM}{r^4} = 0 \quad (26)$$

より、

$$r = 3GM \quad (27)$$

を得る。

以上より、Schwarzschild ブラックホールのまわりの光の円軌道、すなわち光球面の半径は

$$r_{\text{ph}} = 3GM \quad (28)$$

で与えられる。

光が $r = r_{\text{ph}}$ で定在するためには、 b はある値 $b = b_c$ である必要がある。これは、 $\dot{r} = 0$ の条件式 (22) から、 $b_c = 3\sqrt{3}GM \simeq 5.19615GM$ を得る。

問題1 光球面上で光が定在している場合 ($\dot{r} = 0$ かつ $dU/dr = 0$)、光は赤道面上を周回している。この時、光の角度方向の軌道を求めなさい。 $\dot{\phi}$ の値はいくらかを計算すれば良い。