

現代物理学 III 6. 重力場の計量

1 時間的、空間的、光的距離

今回は、重力場中における質点や光の運動を考える。この場合、前者は時間的な軌道、後者は光的軌道に沿って運動する。この、「時間的」あるいは「空間的」という言葉の意味やそこに付随する注意事項について述べておく。

ある隣接する2点間の微小距離 $x^\mu + dx^\mu$ と x^μ の間の距離について考える。Minkowski 時空において、時間的、空間的、光的という場合、それは次のように分類される。まず、固有長さ ds が次のように提起されることを思い出すと、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \\ &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \end{aligned} \quad (1)$$

これは次のように分類される。

$$ds^2 = -d\tau^2 \begin{cases} > 0 \text{ (空間的)}, \\ = 0 \text{ (光的)}, \\ < 0 \text{ (時間的)}, \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $d\tau$ は固有時間であり、次のように定義される。

$$d\tau^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3)$$

これは、図1のように幾何学的に理解できる。

$$\frac{\partial V_m}{\partial x^r} \neq 0. \quad (4)$$

つまり、ベクトル dx^μ が光円錐の中に収まっている ($ds^2 < 0$) 場合には、固有時間を定義できる ($d\tau$ が実数値を持つ) ため、そのような dx^μ を「時間的」とする。一方で、ベクトル dx^μ が光円錐の外にある場合、そのベクトルに沿って移動する軌道は考えられない (非因果的である) ために、固有時 $d\tau$ は純虚数となり、うまく定義できない。このような場合は dx^μ は空間的という。さらに、 $ds^2 = 0$ の場合、

$$dr/dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}/dt = c = 1, \quad (5)$$

となり、これはちょうど光の軌道であることがわかる。そのため、このような dx^μ を光的であるという。

また、これと同様の描像はたとえ時空が曲がっている場合 (一般の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に対しても) 保証されていることに注意してほしい。

つまり、あらゆる点で適当な座標変換を施して、いつでも $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ というように変換することができるのは以前に学んだ通りである。これはつま

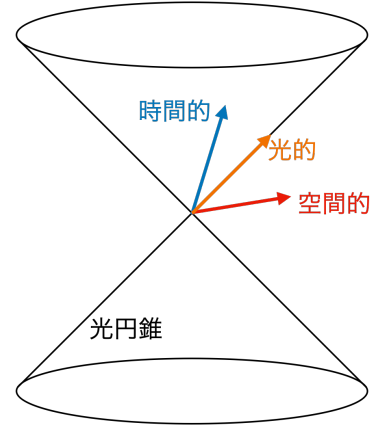


図 1. 時間的、光的、空間的なベクトル dx^μ の概念図。

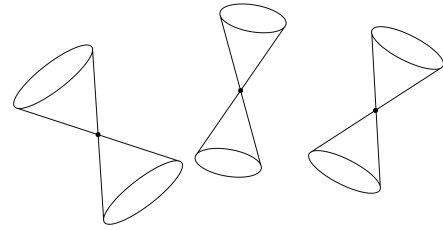


図 2. 歪んだ光円錐の概念図。

り、どのような時空点においても、 $g_{\mu\nu}$ の固有値は $(-1, +1, +1, +1)$ の4つで、必ず負の固有値は1つしかないことを意味する。時空間が歪み、それゆえ一般に座標も歪んでいるため、時間の向きは場所によって違うように見えるとしても、いつでも必ず時間は1つしか存在しないといえる (図2参照)。

時空間が歪んでいても、時間の数が2つになったりしないことは、計量テンソルの固有値が座標変換に対して不変であることに基づいていると言っても良い。

2 測地線と Euler-Lagrange 方程式

時空間における質点や光の軌跡を論じる上で必要となる基礎的事項について学んだ。次に測地線方程式 (質点や光の軌跡を与える方程式) の異なる導出方法について学んでいく。

測地線には様々な定義の仕方があるが、2つの離れた点 A と B の間を結ぶ経路で、最も短くなる経

路が測地線であるという定義がある。実際に、このようにして定義した測地線の満たすべき方程式が、前回導出した測地線方程式と一致することを見ていこう。

まず、点 A と B を結ぶ経路 C として、質点の軌道を想定する。質点は決して光の速さを超えて運動することはないので、常に時間的な軌道を選ばなければならない。この場合、経路 C の長さはどのようにして表現できるだろうか？ C 上の線積分として、以下の通りにすれば良い。

$$\tau = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}, \quad (6)$$

根号の中は常に正であることに注意してほしい。これは、質点が常に時間的軌道を選ぶためである。さて、(6) が次のように書けることに気をつけると、これは解析力学で学んだラグランジアン (Lagrangian) の積分 (つまり「作用」 S) と同じ形であることに気づくだろう。

$$S = -m \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt = \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(\dot{x}, x) dt, \quad (7)$$

ここで、 $\dot{x} := dx/dt$ であり、

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = -m \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}, \quad (8)$$

と定義した。また、 m は質点の質量であり、後にこの作用からエネルギー (ハミルトニアン) を定義する際に必要となる係数である。解析力学では、この作用 S の極値を求める問題を考えたが、今の場合もこれと同様に、固有時間の極値を与える経路 (大体の場合、最短経路ということもできるだろう) を探していることになる。したがって、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^m}, \quad (9)$$

を用いて、経路を極値化する (最短経路とする) x^μ が満たすべき方程式を得ることができる。(9) に、(8) を代入することで最終的に前回導出した測地線方程式を得ることができる。

3 Schwarzschild 計量

ここでは、無回転ブラックホールを表す解である Schwarzschild 解について、いささか天下りのな家庭も入れつつ導入する。正しくは、後に学ぶ Einstein 方程式の真空解として導出するのが正当な手法である。まず、何も物体がなく、平坦な時空での固有時は次で与えられる。(ここで c をしばらくの間、明示的に書くことにしよう。)

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dX^2, \quad (10)$$

ここで、 $dX^2 := dx^2 + dy^2 + dz^2$ とする。

ここに、球対称なブラックホールを原点に置いた場合の計量が次のようになったと仮定してみる。

$$d\tau^2 = \left(1 + \frac{2U(X)}{c^2}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} dX^2, \quad (11)$$

この場合、作用は次のようになる。

$$S = -mc^2 \int \sqrt{\left(1 + \frac{2U(X)}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dX}{dt}\right)^2} dt \quad (12)$$

さて、ここで (12) が実は、非相対論的な極限 (中心のブラックホールから遠く重力が弱い、かつ、質点の運動も c より十分小さい場合) で、保存力 $-dU/dx$ が作用する場合の Newton の運動方程式に帰着することを示そう。この場合、(12) の $\frac{2U}{c^2}$ や $\frac{1}{c^2} \left(\frac{dX}{dt}\right)^2$ が 1 より十分小さいと仮定して Taylor 展開を施す。その結果、

$$S = \int \left(-mc^2 - mU(X) + \frac{m}{2} \dot{X}^2\right) dt, \quad (13)$$

となる。これに対して、Euler-Lagrange 方程式を書きくだと以下を得ることがわかる。

$$m\ddot{X} = -m \frac{dU(X)}{dX}. \quad (14)$$

これが、Newton の万有引力の法則に帰着するためには、 $U(X) = -MG/r$ である必要がある。ここで、ブラックホールの周りの時空を記述する計量の形として、次が候補にあがる。

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (15)$$

ここで、 $r := x^2 + y^2 + z^2$ とする。ここで、急座標を用いて、

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2), \quad (16)$$

とする。つまり、

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} dr^2 - \frac{r^2}{c^2} (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2), \quad (17)$$

ここで、球座標に書き換えたのは、ブラックホールが球対称であると仮定しており、それゆえにその対称性を尊重した記述の方が都合が良いからである。

しかしながら、ここである不都合に気づく。(t, t) 成分の符号が、 $r = 2GM/(c^2 r)$ を境に反転するのである。常に計量の固有値は一つだけ負で、他の 3 つは正である必要があることを思い出してほしい。つまり、この g_{tt} 成分だけの補正ではブラックホール解を無矛盾に構成できていないことになる。 $g_{\theta\theta}$ と $g_{\varphi\varphi}$ は、球対称性からブラックホールによる補正は生じないと考えてみよう。すると、上述の問題を解

消するには、例えば g_{rr} 成分も $r = 2GM/(c^2 r)$ で符号が反転すれば良いことに気づく。

実は、Einstein 方程式の真空解として得られる球対称ブラックホールの解は次で与えられる。

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (18)$$

これを **Schwarzschild 解** という。これが実際に、後に導入する Einstein 方程式を満たすことも今後学んでいく。また、この解で記述される時空構造を **Schwarzschild ブラックホール** と呼ぶ。

4 ブラックホール周りでの質点の運動

式 (18) によれば、 $r \geq 2GM/c^2$ の場合は、計量の符号が $+- --$ であり、 $r \leq 2GM/c^2$ の場合は、計量の符号が $-+ --$ となる。つまり、常に時間的な方向が 1 つ存在していることになり、物理的な描像として成立している。しかしながら、奇妙なこととしては、 $r \geq 2GM/c^2$ では t が時間的であるが、 $r \leq 2GM/c^2$ では r が時間的で t は空間的となっていることである。つまり、時間座標と動径座標の役割が $r = 2GM/c^2$ で入れ替わるのである。この特徴的な位置 $r = 2GM/c^2$ は Schwarzschild ブラックホールの**事象の地平面**と呼ばれ、この中に入ると、光すらも外に出ることはできないことを後に示そう。

以降では、 $r \geq 2GM/c^2$ を想定して、ブラックホール周りでの質点の運動を考える。ただし、この質点による時空への影響は無視できるものとする。また、簡単のため質点は動径方向にしか動かない場合を考える。このような運動は、系の球対称性から常に存在することがわかるだろう。

まず、Schwarzschild 時空における質点の作用 S は次で与えられる。

$$S = -m \int \sqrt{f(r) dt^2 - f^{-1}(r) dr^2}, \quad (19)$$

ここで、

$$f(r) := 1 - \frac{2MG}{r}, \quad (20)$$

とした。

$S = \int L dt$ と書くことで、ラグランジアン

$$L = -m \sqrt{f(r) - f^{-1}(r) \dot{r}^2}, \quad (21)$$

を定義することができる。ただし、 $\dot{r} := \frac{dr}{dt}$ とした。このラグランジアンから、正準運動量は

$$p_r := \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{mf^{-1}(r)\dot{r}}{\sqrt{f(r) - f^{-1}(r)\dot{r}^2}}, \quad (22)$$

で与えられる。さらに、ハミルトニアン

$$H := p_r \dot{r} - L \quad (23)$$

を計算すると、

$$\begin{aligned} H &= \frac{mf^{-1}\dot{r}^2}{\sqrt{f - f^{-1}\dot{r}^2}} + m\sqrt{f - f^{-1}\dot{r}^2} \\ &= \frac{mf}{\sqrt{f - f^{-1}\dot{r}^2}}, \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。

Schwarzschild 時空は静的であり、計量は座標時刻 t に陽に依存しない。そのためハミルトニアンは保存量となる (付録を参照)。これを粒子のエネルギー E とおくと、

$$E = \frac{mf}{\sqrt{f - f^{-1}\dot{r}^2}}, \quad (25)$$

である。この式を $\dot{r}^2$ について解くと、

$$E^2 = \frac{m^2 f^2}{f - f^{-1}\dot{r}^2} \quad (26)$$

より、

$$\dot{r}^2 = f^2 \left(1 - \frac{m^2 f}{E^2}\right). \quad (27)$$

すなわち、動径運動は

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f^2(r) \left(1 - \frac{m^2 f(r)}{E^2}\right), \quad (28)$$

によって記述される。

ここで、質点が十分に遠方で運動エネルギーを持たない場合を考える。この時、(27) にて $\dot{r} \rightarrow 0$ かつ $r \rightarrow \infty$ の極限を取ることで、 $E = m$ であることがわかる。これを (28) に代入することで、

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = f^2(r) \frac{2M}{r}, \quad (29)$$

となる。この質点がブラックホール近傍 $r \rightarrow 2M$ までは落下した際、速度 dr/dt はゼロに漸近することがわかる。これは、十分に遠方の人から見ると (遠方の人が測定する時間 dt で定義した速度 dr/dt では)、質点が $r = 2M$ に近づくとゆっくりと動くように見え、やがて質点が $r = 2M$ に「凍りつく」ように見えることを意味する。これは、遠方で測定する時間が、ブラックホールの事象の地平面で限りなくゆっくりと流れていることを意味する。

5 光の運動

これまで、質量を持つ粒子のブラックホール周りでの運動を考えてきた。ここでは、Schwarzschild 時

空で、同じく動径方向にのみ動く光の軌跡（光線）を考えてみる。この場合、光の運動は次の光的な条件

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 = 0, \quad (30)$$

あるいはこれと等価な関係式として

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (31)$$

で定まる。この方程式から、たとえ光であったとしても、地平面においてはその運動が止まってみることがわかる。ブラックホールの地平面がいかに関特殊で異質な領域かがわかる。

6 付録

6.1 測地線方程式の導出

以下、次のように定義しておく。

$$S = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt = \int \mathcal{L} dt, \quad (32)$$

$$\mathcal{L} = -m \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = -m \sqrt{A}, \quad (33)$$

$$A := -g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (34)$$

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}. \quad (35)$$

まず

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -m \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\partial A}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (36)$$

$$= -m \frac{1}{2\sqrt{A}} (-2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu) \quad (37)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{A}} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (38)$$

次に

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = -m \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\partial A}{\partial x^\mu} \quad (39)$$

$$= -m \frac{1}{2\sqrt{A}} (-\partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) \quad (40)$$

$$= \frac{m}{2\sqrt{A}} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \quad (41)$$

したがって

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{A}} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \right) = \frac{m}{2\sqrt{A}} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \quad (42)$$

固有時は

$$d\tau = \sqrt{A} dt \quad (43)$$

であるから、

$$\sqrt{A} \frac{d}{dt} \left(m g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \frac{m}{2} \sqrt{A} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (44)$$

両辺を $m\sqrt{A} \neq 0$ で割ると

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (45)$$

ここで

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\rho(\tau)) \quad (46)$$

であることを用いると

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \partial_\rho g_{\mu\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (47)$$

したがって

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (48)$$

添字を書き換えると

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (2\partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (49)$$

さらに対称性

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (50)$$

を用いると

$$2\partial_\alpha g_{\mu\beta} = \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha}, \quad (51)$$

より

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (52)$$

最後に逆計量 $g^{\mu\rho}$ を掛けると

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (53)$$

したがって

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (54)$$

ここで接続係数（あるいはクリストッフエル記号）の定義が、

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \quad (55)$$

であることを用いた。

6.2 解析力学の復習

ニュートン力学において、質量 m の粒子のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\mathbf{x}) \quad (56)$$

で与えられる。ここで U はポテンシャルエネルギーである。正準運動量を

$$\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} \quad (57)$$

と定義する。さらにハミルトニアンをルジャンドル変換

$$H := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L \quad (58)$$

によって定義すると、

$$H = m\dot{\mathbf{x}}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - U \right) \quad (59)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + U \quad (60)$$

となる。これは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和であり、粒子の全エネルギーに一致する。

同様の考え方は相対論的粒子にも適用できる。ミンコフスキー時空において、自由粒子の作用は

$$S = -m \int d\tau \quad (61)$$

で与えられる。ここで

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (62)$$

は粒子に沿った固有時である。座標時刻 t を用いると

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt \quad (c = 1) \quad (63)$$

であるため、作用は

$$S = \int L dt, \quad L = -m\sqrt{1 - v^2} \quad (64)$$

と書ける。このラグランジアンから正準運動量

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma m\mathbf{v} \quad (65)$$

が得られる。またハミルトニアンは

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L \quad (66)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma m \quad (67)$$

となり、これは自由粒子の相対論的エネルギー

$$E = \gamma m \quad (68)$$

に一致する。

このように、非相対論的な粒子と同様に、相対論的粒子に対してもラグランジアン、正準運動量、ハミルトニアンを定義できる。一般相対論では、この作用 $S = -m \int d\tau$ を曲がった時空へ拡張することで測地線方程式が得られる。そして、この手法により自然な方法で、曲がった時空における粒子のエネルギーや運動量を定義することができる。

計量 $g_{\mu\nu}(x)$ が時間に陽に依存しない場合は、 $\mathcal{L} = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ であることと

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad (69)$$

から、ハミルトニアン（つまりエネルギー）が保存量であることもわかる。