

現代物理学 III 5. 測地線と重力

これまでは3次元の（平坦とは限らない）空間を想定して、Riemann 幾何学の初歩をカバーしてきた。しかし実際には、特殊相対論で学んだように、この宇宙は空間だけでなく時間も合わせた4次元時空である。したがって3次元での Riemann 幾何学を時間の次元も含めるように拡張させた理論として、一般相対論を捉える必要がある。ここでは、それに対する準備と、歪んだ時空間を運動する粒子の運動方程式（測地線方程式）の導出を試みる。まずはじめに、測地線方程式を3次元の Riemann 幾何学で導出し、その後に時間を含んだ4次元空間への拡張を議論していくことにしよう。

1 計量テンソルの共変微分

計量テンソルの共変微分について考えてみよう。実はこれはゼロになることが示せる。ガウスの直交座標系で学んだように、ある点 P において計量テンソル g_{mn} はクロネッカーのデルタ δ_{mn} （微小距離 $O(\delta x^2)$ を無視する近似において）となる。したがって、この場合においては

$$\partial_l g_{mn} = 0. \quad (1)$$

つまり、これを任意の座標系にテンソルとして座標変換した場合にも、これはゼロでなければならない。どの座標系においても、計量テンソルの共変微分はゼロになることが示された。

$$\nabla_l g_{mn} = 0. \quad (2)$$

2 反変ベクトルの共変微分

共変ベクトルの共変微分についてはすでに学んだが、位置ベクトルなどの反変ベクトルがどのように共変微分されるのかを、ここで解説する。以前学んだように、反変ベクトル V^m と共変ベクトル V_n の関係は計量テンソルとの縮約で与えられる。

$$V^m = g^{mn} V_n. \quad (3)$$

この手続きは、計量テンソルによる「添字の上げ下げ」という。(3) の両辺を共変微分すると次のようになる。

$$\nabla_r V^m = (\nabla_r g^{mp}) V_p + g^{mp} (\nabla_r V_p), \quad (4)$$

$\nabla_r g^{mp} = 0$ より、

$$\nabla_r V^m = g^{mp} (\nabla_r V_p). \quad (5)$$

これに、既に得られた共変ベクトル成分 V_p の共変微分の式

$$\nabla_r V_p = \partial_r V_p - \Gamma_{rp}^t V_t. \quad (6)$$

を代入すると、最終的に次の式を得る。

$$\nabla_r V^m = \partial_r V^m + \Gamma_{rt}^m V^t. \quad (7)$$

この導出は、付録で詳説する。テンソル計算に慣れるためにも、自ら手計算で式変形を追うことを勧める。

3 ベクトルの平行移動

時空上の各点にベクトル V^m が分布していることを考えよう。つまり

$$V^m = V^m(x). \quad (8)$$

この時、 $V^m(x)$ を $x + dx$ の位置に平行移動させたベクトルが $V^m(x + dx)$ と同じであるとしよう。この時、 $V^m(x + dx)$ は $V^m(x)$ を位置 $x + dx$ に平行移動させたものとみなすことができる。これは次のように言い換えることができる。ベクトル場 $V^n(x)$ の dx^m 方向の共変微分

$$DV^n := dx^m \nabla_m V^n = dV^n + \Gamma_{mr}^n V^r dx^m, \quad (9)$$

がゼロである場合、 $V^m(x + dx)$ は $V^m(x)$ を dx^m 方向に平行移動させたベクトルであるとみなせる。(9) の2項目 $\Gamma_{mr}^n V^r dx^m$ は、座標が曲がっている効果を取り入れたものであり、ガウスの直交座標系では接続係数 $\Gamma_{mr}^n = 0$ なので、 $DV^n = dV^n$ となる。

4 接ベクトルと測地線

次に測地線という概念について導入する。測地線とは、離れた2点 A と B を結ぶ最短の線のことである。空間が平坦であれば、測地線は2点間を結ぶ直線そのものである。もしそれが直線ではなくて、うねうねと曲がる経路であれば、それは最短経路ではない。直線であるとは、ある経路の接ベクトル t^m を経路上で x から $x + dx$ まで平行移動した際に、 $t^m(x)$ と $t^m(x + dx)$ が常に同じであることをいう。曲がっている経路は、接ベクトルも場所によって異なる向きをとる。

では空間が曲がっている場合、「まっすぐの経路（最短の経路）」をどのように定義すれば良いのだろうか？まずは、曲がった空間のある点 P の周りを局所的に見れば、平坦の空間として近似できることを思い出そう。そしてその狭い領域では、最短経路は直線としてみなせるはずである。つまり、曲がった

空間上で離れた点を結ぶ最短経路は、局所的に見れば、常にその接ベクトル $t^m(x)$ が、 $t^m(x+dx)$ と同じである。これはまさに、前述の「ベクトルの平行移動」によって定義することができる。つまり、接ベクトル t^n を定義することができれば、あとは (9) の V^n を接ベクトル t^n に読み替えれば、測地線の満たすべき条件式を得ることができる。

最短経路上で単位接ベクトル $t^m t_m = 1$ を定義しよう。経路上の微小区間の長さ ds は計量テンソルを用いて次を満たす。

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n, \quad (10)$$

したがって、 $t^m := dx^m/ds$ とすれば良い。これを、(9) に代入すれば次を得る。

$$dt^n + \Gamma_{mr}^n t^r dx^m = 0. \quad (11)$$

ここで、両辺を ds で割れば、次の 2 階微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 x^n}{ds^2} = -\Gamma_{mr}^n \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^r}{ds}. \quad (12)$$

この方程式を測地線方程式という。

5 時空

ここまでは、時間を含まない歪んだ空間を想定して議論してきた。しかし、これまで導入してきた定義や概念は、空間に時間の次元を取り入れた「時空」に対してもそのまま適用することができる。空間 3 次元を表す座標を x^1, x^2, x^3 として、時間を $ct = x^0$ として表すことにしよう。ここで、 c は光速であり、特に断らない限りは $c = 1$ とする。空間が平坦である場合、固有距離 ds は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (13)$$

である。また、固有時間 $d\tau$ は

$$d\tau^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (14)$$

である。これは、Minkowski 時空における計量テンソル¹ $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

¹ ds^2 を表す際に用いる計量テンソルの定義は、テキストによって異なるため注意が必要である。 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ のものと、 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ の 2 通りがある。どちらを用いるかを、テキストや論文の序盤できちんと述べるのが作法である。ここでは、線素 ds を固有距離としているので、 $-+++$ の定義を採用している。

を用いて、

$$ds^2 = -d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (16)$$

と書く。時空の歪みを一般相対論の枠組みで表す場合には、これまでの議論を、時間次元も含む計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ に置き換えれば良いだけである。この時、位置 x 近傍における固有時間と固有距離は次のようになる。

$$ds^2 = -d\tau^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (17)$$

この拡張 ($x^i \rightarrow x^\mu$) により、時空間が平坦である条件も変わってくる。座標変換 $x \rightarrow y$ によって時空全域を $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \eta_{\mu\nu}(y)$ にできる場合、その時空間は平坦であるという。

6 相対論的な等加速度運動

測地線方程式が質点の運動方程式の自然な拡張としてみなせることを後に示すために、相対論における等加速度運動を考えてみよう。粒子の軌道をその粒子の固有時間 τ でラベル付けする。このような、世界線上のラベルを「アフィンパラメーター」という。

$$x^\mu = x^\mu(\tau). \quad (18)$$

この時、四元速度 u^μ は

$$u^\mu = u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (19)$$

この自然な拡張として、四元加速度 a^μ は次のように定義してみよう。

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu. \quad (20)$$

等加速度というからには、加速度は一定値である必要がある。しかし、相対論的な意味で一定値であるためには、座標変換に対して不変な形で、等加速度を定義すべきだろう。そこで次のスカラー量 $a^\mu a_\mu$ が一定値になるような x^μ を、等加速度運動の軌道としてみなすことにする。 z 方向 (x^3 方向) に等加速度運動している場合、これを満たすような軌道は次のように双曲線関数で与えられる。

$$x^0 = \xi \sinh(T/\xi_0), \quad (21)$$

$$x^3 = \xi \cosh(T/\xi_0), \quad (22)$$

$$x^1 = X^1, \quad (23)$$

$$x^2 = X^2, \quad (24)$$

ここで、 ξ は $T = 0$ のとき (粒子が x^μ 座標で静止している時刻) での原点からの距離に対応する。また、 ξ_0 は距離の次元を持つ定数である。²

² ここで、 T/ξ_0 は無次元になっていないように見えるかもしれないが、光速は $c = 1$ としていることに注意すること。

粒子の軌道は、 ξ を指定し、アフィンパラメーター T の値を滑らかに動かすことで得られる。

ここで、 ξ や T を様々な値に設定することで、 x_0 と x^3 を指定することができることから、座標 (x^0, x^3) を座標 (τ, ξ) に変換することを考えてみよう。そうすると、座標 (T, ξ) は、加速度 $1/\xi_0$ で動く粒子に対して静止している人の座標系であることを示せる。このような座標系を Rindler 座標という。まず、線素 ds^2 は次のように表される。

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (25)$$

$$= -\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 dT^2 + d\xi^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2, \quad (26)$$

ここで気づくのは、 $\xi = \xi_0$ 付近において、空間座標が変化せず ($d\xi = dX^1 = dX^2 = 0$)、 T だけが発展する場合、固有時間は $d\tau = dT$ となるということである。このような観測者は Rindler 座標で静止しているとみなせる。

さて、ここで粒子の加速度運動を、地表における自由落下に対応させて考えてみる。まず、 ξ を次のように書き換えてみる。

$$\xi = \xi_0 + z, \quad (27)$$

つまり、 z は粒子の位置 ξ の ξ_0 からのズレを表す。すると、(26) は次のように書き換えられる。

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2z}{\xi_0} + \frac{z^2}{\xi_0^2}\right) dT^2 + dz^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2, \quad (28)$$

ここで ξ_0 はどの程度の大きさか考えてみる。光速 c を明示的に記すと、加速度の大きさは次元解析から c^2/ξ_0 となる。これが重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ と一致するためには ($g = c^2/\xi_0$)、 $\xi_0 \sim 10^{16} \text{ m}$ であることがわかる。一方で、地表での粒子の運動する長さ $\sim z$ は、高々数メートル程度であるとしよう。この場合、(28) は次のように近似できる。

$$ds^2 \simeq -\left(1 + \frac{2z}{\xi_0}\right) dT^2 + dz^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2. \quad (29)$$

次に、この線素に対応する計量テンソルで測地線方程式を導出し、それが、一様重力場中における質点の運動方程式に帰着することをみる。つまり、測地線方程式とは、粒子の運動方程式を歪んだ時空上に拡張した概念であることをみる。

7 測地線方程式

それでは、測地線方程式

$$\frac{d^2 x^n}{ds^2} = -\Gamma_{mr}^n \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^r}{ds}. \quad (30)$$

に、(29) に対応する計量を代入してみよう。ここでは、 $x^n = z$ とし、アフィンパラメーター s は、固有時間 $\tau (ds^2 = -d\tau^2)$ としておこう。そして、粒子の自由落下の速度が光速よりも十分小さい場合を想定すると、近似的に $dT/d\tau \simeq 1$ でそのほかの成分はこれに比べて十分無視できるとする。この場合、(30) は

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} \simeq -\Gamma_{tt}^z \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau}. \quad (31)$$

として近似できる。また、接続係数と計量テンソルの関係

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} [\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\delta\gamma} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}], \quad (32)$$

を用いると、

$$\Gamma_{tt}^z = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial z}, \quad (33)$$

を得る。最終的に、(31) は以下の式に帰着する。

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} \simeq \frac{1}{\xi_0} = -g. \quad (34)$$

両辺に質点の質量 m を乗じておくと、

$$m \frac{d^2 z}{d\tau^2} \simeq -mg, \quad (35)$$

となり、地上における質点の自由落下の運動方程式に帰着する。

ここで、我々が扱ったのは「本当の重力」が存在している系を扱っていないことに注意してほしい。ここで扱っているのは、あくまで「一様加速度系」であって、潮汐力が生じるような重力系ではない。 ξ あるいは z 軸正の向きに加速度運動している系では、その逆向きに慣性力が働く ($F = -mg$)。これが、(35) の右辺の正体である。

g_{tt} 成分は、質量 M の周りの天体ではどのようなのだろうか？それを予想するために次のことを考える。一様加速度系では、単位質量あたりの位置エネルギーは $gz = z/\xi_0$ である。しかし実際の球対称な天体の重力ポテンシャルは、単位質量あたりに $-GM/z$ となる。 g_{tt} 成分の z/ξ_0 を一様加速度系のポテンシャルと考えて、これを $z/\xi_0 \rightarrow -GM/z$ と置き換えると、

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{z}\right) \quad (36)$$

となる。のちに示す通り、実際にこれは球対称な質量 M の天体（あるいはブラックホール）の計量テンソルの tt 成分なのである。

付録

以下に、反変テンソルの共変微分の導出 [(7) 式参照] を記す。式変形を手計算で確認すること。

$$\begin{aligned}
& g^{mp} \nabla_r V_p \\
&= g^{mp} (\partial_r V_p - \Gamma_{rp}^t V_t) \\
&= \partial_r (g^{mp} V_p) - V_p \partial_r g^{mp} - g^{mp} \Gamma_{rp}^t V_t \\
&= \partial_r V^m - V_p \partial_r g^{mp} - g^{mp} \left(\frac{1}{2} g^{kt} [\partial_r g_{kp} + \partial_p g_{kr} - \partial_k g_{rp}] \right) V_t \\
&= \partial_r V^m - V_p \partial_r g^{mp} - \frac{1}{2} V^k g^{mp} [\partial_r g_{kp} + \partial_p g_{kr} - \partial_k g_{rp}] \\
&= \partial_r V^m - V^k g_{kp} \partial_r g^{mp} - \frac{1}{2} V^k g^{mp} [\partial_r g_{kp} + \partial_p g_{kr} - \partial_k g_{rp}] \\
&= \partial_r V^m - \frac{1}{2} V^k g_{kp} \partial_r g^{mp} - \frac{1}{2} V^k g^{mp} [\partial_p g_{kr} - \partial_k g_{rp}] \\
&= \partial_r V^m + \frac{1}{2} V^k g^{mp} \partial_r g_{kp} + \frac{1}{2} V^k g^{mp} [\partial_k g_{rp} - \partial_p g_{kr}] \\
&= \partial_r V^m + \frac{1}{2} V^k g^{mp} [\partial_r g_{kp} + \partial_k g_{rp} - \partial_p g_{kr}] \\
&= \partial_r V^m + \Gamma_{rt}^m V^t .
\end{aligned}$$