

現代物理学 III 4. 微分幾何学（空間の曲率について）

1 ガウスの直交座標系

ここでは、空間の曲率について計量テンソルに基づいて考えていく。復習として、ある空間の計量テンソル $g_{mn}(x)$ を座標変換 ($x \rightarrow x'$) によって $g_{mn}(x) \rightarrow g'_{mn}(x')$ と変換することにより、空間のすべての場所で

$$g'_{mn} = \delta_{mn}, \quad (1)$$

と書ける場合、その空間は平坦であるというのであった。空間が曲がっている場合はこの限りではないわけだが、それでもある任意の一点 $x = x_0$ においてのみ、 $g_{mn}(x_0) = \delta_{mn}$ とすることができる。さらに、そのまわりで g_{mn} について一階偏微分をしてもゼロ

$$\left. \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} \right|_{x=x_0} = 0, \quad (2)$$

であるような座標が常に存在することを示そう。ただ、計量テンソルの 2 階偏微分は一般にゼロにできないことも見ていく。これは空間の曲率を反映している。

$$\left. \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^r \partial x^s} \right|_{x=x_0} \neq 0, \quad (3)$$

このような特殊な座標系はガウスの直交座標系と呼ばれる。まずはこの概念から学んでいこう。これは実は極めて直感的な主張である。我々は基本的に球体である地球の表面に張り付いて生きていると言ってもよいだろう。しかしながら、始めは地球上が平坦であると錯覚する人がほとんどである。それは地球表面のごく一部 $x \simeq x_0$ しか見ておらず、その周りでは 2 つの離れた建物の距離、高さや奥行きを（地球表面の曲がり具合など気にせず）直線状の物差しで問題なく測れる。そしてこれは、地球表面の限られた部分に適用する限りにおいて、どの国でも同じようにできる。これは我々が無意識にガウスの直交座標を使っている一例である。しかし隣接する建物間ではなく、異なる国に位置する建物間（例えばスカイツリーとエッフェル塔など）の距離を測るには、もはや直線状の物差しは使えず、地球の表面の曲がり具合を考慮しなければならない。これが、計量テンソルの 2 階偏微分がゼロには一般にできない所以である。

tip 計量テンソル g_{mn} をある点 $x = x_0$ においてのみ $g_{mn}(x_0) \rightarrow \delta_{mn}$ に、いつでも座標変換で変換できる。（計量テンソルは実対称行列とみなすことができる。そして実対称行列は、直行列列で対角化できることを使えばよい。）

では、いつでも計量テンソルの 1 階偏微分がゼロにできる理由について簡単に説明しておこう。まず $x = x_0$ の場所はどこでもよいので、 $x_0 = 0$ としておく。そして座標 x かつ $x = 0$ で、計量テンソルが δ_{mn} で与えられるものの、その x^m に関する偏微分はゼロでないとしよう。これから考えるのは、依然として座標変換後の計量テンソルが $g'_{mn}(x' = 0) = \delta_{mn}$ でありながら、この x' に関する偏微分がゼロになるような新たな座標 x' を探すことである。座標変換後でも、ガウスの直交座標を構成する場所は $x = 0 = x'$ とする場合を考えよう。そして、 $x = 0 = x'$ では計量テンソルの値が同じなので、第ゼロ近似では $x^m \simeq x'^m$ である。従って、それより高次の部分で座標変換を行うこととなるため、

$$x'^m = x^m + \frac{1}{2} C_{nr}^m x^n x^r, \quad (4)$$

の座標変換を行う。この関係式を

$$\left. \frac{\partial g'_{mn}}{\partial x'^r} \right|_{x'=0} = 0, \quad (5)$$

に代入して C_{nr}^m を決めればよい。さて、この座標変換を特徴づける係数 C_{nr}^m はいくつの成分（自由度）をもっているだろうか？ 下付きの 2 成分は対称であると思ってよいので $C_{nr}^m = C_{rn}^m$ 下付き成分については 6 成分、そして上付き成分については 3 成分だから $6 \times 3 = 18$ である。一方で (5) は、方程式の数が同じく 18 であることがわかる。従って、 C_{nr}^m を一意に決めることができる。

しかしながら、二階偏微分に関する式 (3) については式の数が 36 あり、座標変換の自由度よりも数が多いため、一般に 2 階偏微分をすべてゼロにすることはできないこともわかる。

2 共変微分

つぎに、曲率テンソルを計算するうえで重要となる「テンソルの共変微分」について考えていこう。ご存知の通り、定数を微分すれば、ゼロになる。変化しない量の微分はゼロだからだ。しかし、空間が歪んでいる場合に、これまでと同様の（偏）微分を

行くと、この当たり前が崩れてしまうように見えることを見ていく。そして、最初の重要な問いは、テンソルが一定である（あるいは空間に対して変化しない）とはどういうことか？ということである。

この点を考える上で、簡単のため、一成分をだけ持つテンソル（つまりベクトル） $\mathbf{V}(x')$ の微分を考えることにする。このベクトルは各位置 x' において定義されているため、空間が平坦であり、 x' がいわゆる直交座標ならば、単純なベクトル場の微分を計算するだけで良いだろう。そして、このベクトルが空間的に変化しないなら、この微分はゼロである。

$$\frac{\partial V'_m}{\partial x'^r} = 0. \quad (6)$$

もしここで、同じく空間が平坦であるとしても、曲線座標である x を使った場合はどうか？これは一般にゼロにはならない。つまり、(図1参照)

$$\frac{\partial V_m}{\partial x^r} \neq 0. \quad (7)$$

しかしこれは、ベクトルが変化しただけではなく、座標が歪んでいることに起因して微分値がゼロでない値を取っただけのことである。また、この比較から一般にベクトル場の単純な偏微分はテンソルとしての変換性を有さないこともわかる。テンソルであれば、ある一点で全ての成分がゼロであれば、それをどの座標系へ変換しようとも必ずゼロになる。

小テスト1 テンソルであれば、ある一点で全ての成分がゼロであれば、それをどの座標系へ変換しようとも必ずゼロになることを示しなさい。

ここでは、空間が平坦な場合に限った議論をしているが、たとえ空間が歪んでいたとしても、「局所的には」全く同じ議論が展開できることに注意してほしい。つまり、空間が歪んでいても、座標変換($x \rightarrow x'$)で、局所的にはガウスの直交座標系 x' をどこでも採用できる。(i) **ガウスの直交座標系 x' では通常の偏微分 $\partial V'_m/\partial x'^r$ で、ベクトルの変化分を**

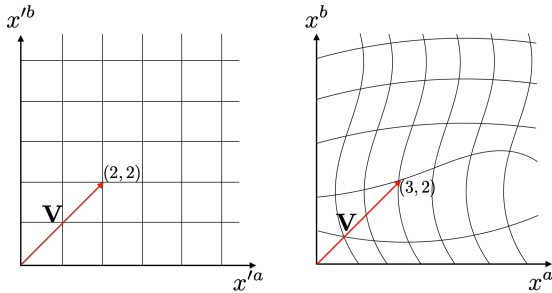


図 1. ベクトル $\mathbf{V}$ の直交座標系 x' と曲線座標系 x における描像。

計算して、「ベクトルの変化率」が得られる。そして、(ii) $\partial V'_m/\partial x'^r$ を、元の座標 x にテンソル変換と同じ規則で座標変換

$$\nabla_a V_b := \frac{\partial x'^r}{\partial x^a} \frac{\partial x'^m}{\partial x^b} \frac{\partial V'_m}{\partial x'^r}, \quad (8)$$

をすれば、一般的な x 座標で、新たな微分操作 $\nabla_a V_b$ を定義できる。この $\nabla_a V_b$ を共変微分という。この共変微分は、ガウスの直交座標系で微分がゼロである場合には、もちろん任意の座標系に変換した後でもゼロになる。

では、この共変微分がどのように記述されるかを見てみよう。まず、ベクトルの変換は

$$V_b = \frac{\partial x'^m}{\partial x^b} V'_m, \quad (9)$$

である。これを x^a について偏微分すると、

$$\frac{\partial V_b}{\partial x^a} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial x'^m}{\partial x^b} V'_m \right), \quad (10)$$

少し整理すると、

$$\frac{\partial V_b}{\partial x^a} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x'^m}{\partial x^b} \frac{\partial V'_m}{\partial x'^k} + \left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^a \partial x^b} \right) V'_m, \quad (11)$$

ここで、 $V'_m = (\partial x^j / \partial x'^m) V_j$ を用いると、

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^a} \frac{\partial x'^m}{\partial x^b} \frac{\partial V'_m}{\partial x'^k} = \frac{\partial V_b}{\partial x^a} - \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^a \partial x^b} \right) V_j. \quad (12)$$

これより、最終的に以下を得る。

$$\nabla_a V_b = \frac{\partial V_b}{\partial x^a} - \Gamma_{ab}^j V_j, \quad (13)$$

ここで、

$$\Gamma_{ab}^j := \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^a \partial x^b} \right), \quad (14)$$

は、「接続係数」あるいは「クリストッフェル (Christoffel) 記号」と呼ばれる。この接続係数が、曲がった座標におけるテンソルの微分を、意味のあるもの（つまり、座標系の歪みによる寄与を取り除いた値）に変換してくれる。そして結果的に、テンソルの共変微分自体が、テンソルとして振る舞うように作用する役割がこの接続係数にあるのだ。この接続係数は、テンソル自体の変化ではなく、純粋に座標の歪み具合で決まる。たとえ空間が平坦であったとしても、座標が曲がっていればこの接続係数はゼロでない値を持つことの注意してほしい。

曲率テンソルについて理解するためには、まずこの接続係数について、より深く理解しておく必要がある。

3 接続係数

この接続係数は3つの添え字を持つことから、行列よりも多くの成分を持つことがわかる。そして、(14) からわかる通り、下つきの添字については対称であることもわかる。¹

$$\Gamma_{ab}^t = \Gamma_{ba}^t. \quad (15)$$

この接続係数による共変ベクトルの考え方は、ランク1のテンソル（ベクトル）だけでなく、任意のランクのテンソルにも拡張することができる。共変微分を T_{mn} に対しても定義すると、最終的に以下の形に帰着する。

$$\nabla_r T_{mn} = \partial_r T_{mn} - \Gamma_{rm}^t T_{tn} - \Gamma_{rn}^t T_{tm}. \quad (16)$$

これは、反変テンソルにも同様に応用できるし、ランク3以上のテンソルにも適用することができる。

接続係数は、計量テンソルだけで表すことができる。後に議論するブラックホールや膨張宇宙の記述においても、接続を計量テンソルで洗わせた方が便利なので、接続係数の表式を導出しておこう。まず、計量テンソルの共変微分がゼロであることに注意しよう。

小テスト 2 計量テンソルの共変微分がゼロであることを示しなさい。

従って、次の式が成立する。

$$\nabla_r g_{mn} = \partial_r g_{mn} - \Gamma_{rm}^t g_{tn} - \Gamma_{rn}^t g_{mt} = 0, \quad (17)$$

ここで $\partial_r = \partial/\partial x^r$ とした。続いて、添え字の取り方を少し変えて $\nabla_m g_{rn}$ を書き下してみる。

$$\nabla_m g_{rn} = \partial_m g_{rn} - \Gamma_{mr}^t g_{tn} - \Gamma_{mn}^t g_{rt} = 0, \quad (18)$$

そして2項目の添え字を接続の対称性から変えることができる。

$$\nabla_m g_{rn} = \partial_m g_{rn} - \Gamma_{rm}^t g_{tn} - \Gamma_{mn}^t g_{rt} = 0, \quad (19)$$

同様にして次の表式も得られる。

$$\nabla_n g_{rm} = \partial_n g_{rm} - \Gamma_{nr}^t g_{tm} - \Gamma_{mn}^t g_{rt} = 0. \quad (20)$$

ここで、次を計算してみる。

$$\begin{aligned} (19) + (20) - (17) \\ \rightarrow \partial_n g_{rm} + \partial_m g_{rn} - \partial_r g_{mn} - 2\Gamma_{mn}^t g_{rt} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

最終的に以下を得る。

$$\Gamma_{mn}^t = \frac{1}{2} g^{rt} (\partial_n g_{rm} + \partial_m g_{rn} - \partial_r g_{mn}). \quad (22)$$

¹ より一般的な幾何学では、接続係数が対称性を持たない場合もある（捻れのある幾何学と呼ばれたりする）。しかし、一般相対論の標準的な枠組みでは、接続が対称性を持つとして問題ない。

この接続係数は計量テンソルのみで記述できることがわかった。これは、ある位置における接続係数が、いつでもゼロにすることができることを意味する。また、先ほども述べたとおり、たとえ空間が平坦であっても、座標のとり方によってゼロでない値にもなり得る。そのため、接続係数自体が、その空間の歪みについて語ることはない。重要なことは、この接続係数によってベクトルやテンソルの空間における変化率を「適切に」評価できるということである。もっと別の言い方をするなら、別の位置にあるベクトルやテンソルは、それぞれ一般に違う歪みを持つ場所に分布しているわけだが、それを「適切に並行移動して」同じ土俵で比べる手段を提供するのが接続係数（あるいは共変微分）の役割と言える。

4 曲率テンソル

曲率について説明するために、2次元平面上におけるベクトルの平行移動について考える。もし空間が平坦であれば、その上でのベクトルの平行移動により、（当然ながら）その向きや大きさが変わることはない。それでは、円錐の表面（2次元平面）ではどうだろうか？この平面は、平坦な2次元面に戻ることができる。この状態ならば、ベクトルの平行移動をきちんと行うことができるだろう。この時に、コーンの先端であった点を周るようにベクトルを平行移動させると、元の場所に戻ってきた際に、コーンの欠損角 θ だけ、ベクトルがずれてしまうことがわかる。これは、まさしく空間が歪んでいる場合にだけ生じる現象である。空間が平坦であれば、平行移動によってベクトルが変化してしまうことはない。このように、ベクトルの平行移動を、歪んだ場所を周回する経路で連続的に行い、元の場所に戻した時に、ベクトルがどれだけずれているかで、その場所の歪みを把握することができるのだ。

では、このアイデアに基づいて、いよいよ曲率テンソルを導入しよう。まず、考えたいことは、あるベクトル V_m を以下で説明する二つの経路に沿って共変微分することである。一つの経路では、まず x^r 方向に共変微分をして、そのあとでそれをさらに x^s 方向に共変微分する。つまり

$$\nabla_s \nabla_r V_m. \quad (23)$$

もう一つの経路では、 x^s 方向にまず共変微分をして、そのあとで x^r 方向に共変微分をする。

$$\nabla_r \nabla_s V_m. \quad (24)$$

共変微分はベクトルの平行移動を伴う操作²なので、この2つの経路で行う共変微分は、空間が歪んでいる場合には、一般に異なる結果をもたらすだろう。つまり

$$\nabla_s \nabla_r V_m - \nabla_r \nabla_s V_m \neq 0. \quad (25)$$

² 共変微分をする際には、まずベクトル V_m を平行移動を

$\nabla_s \nabla_r V_m$ はテンソル量であるため、その差である (25) もまた、テンソル量である。それは次のように書くことができる。

$$\nabla_s \nabla_r V_n - \nabla_r \nabla_s V_n = \mathcal{R}_{srn}^t V_t. \quad (26)$$

レポート課題 共変微分の表式 (13) を使い、次を示しなさい。

$$\mathcal{R}_{srn}^t = \partial_r \Gamma_{sn}^t - \partial_s \Gamma_{rn}^t + \Gamma_{sn}^p \Gamma_{pr}^t - \Gamma_{rn}^p \Gamma_{ps}^t. \quad (27)$$

この $\mathcal{R}_{srn}^t$ が、曲率テンソルと呼ばれる量である。

曲率テンソルは、適当に採用したベクトル V_m に依らず、接続係数あるいは計量テンソル g_{mn} のみに依存して決まる幾何学的な量である。

注目すべきは、この曲率テンソルが計量テンソルの 2 階微分（接続係数は計量テンソルの 1 階微分）で構成されているということである。ガウスの直交座標系を $x = x_0$ に適用したとしても、計量テンソルは

$$g_{mn} = \delta_{mn} + \mathcal{O}[(x - x_0)^2], \quad (28)$$

のように、空間の 2 階微分に関して一般にゼロにはならない。従って、座標の取り方を工夫することで、接続係数をゼロにすることはできても、曲率テンソルは打ち消すことはできないのである。そもそも、空間の歪みは（人為的な）座標の取り方でゼロにできるものではない。

以下の重要事項をまとめておこう。

- 曲率テンソルが至る場所でゼロであれば、その空間は平坦である。
- 計量テンソルが与えられれば、曲率テンソルを (22) および (27) から計算できる。