

現代物理学 III 3. 数学的諸準備（テンソル解析と計量テンソル）

ここでは、テンソル解析の基本事項を学びながら、計量テンソルの諸性質について基礎から学んでいく。計量テンソルは一般相対論でも極めて重要な位置付けであり、これが与えられれば、時空構造の詳細が理解できる。そのため、あらゆる時空（ブラックホールや膨張宇宙など）の記述には、この計量テンソルから出発することが多い。そのため、計量テンソルの理解を深めることは極めて有意義なことである。

1 計量テンソル (1)

計量テンソルは、線素（つまり微小区間の長さ）の定義において現れてきたものである。

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n. \quad (1)$$

微小区間の長さは、微小位置ベクトルの長さとして読み替えても良い。そして、ベクトルの長さは内積で与えられるのであるから、計量テンソルについて論じるには、ベクトルの内積から考えることにする。

図 1 には座標基底 $\mathbf{e}_i$ とそこに張り付いたベクトル $\mathbf{V}$ が記述されている。さて、このベクトルが完全系をなす場合には、どのようなベクトル $\mathbf{V}$ も次のように基底ベクトルの線形和で一意に記述できる。

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i. \quad (2)$$

ここで、ベクトル $\mathbf{V}$ を座標基底 $\mathbf{e}_i$ の線形和で表した際の係数 V^i は、上つき添え字の成分で表すこととし、反変ベクトル成分と呼ぶ。

今は極めて微小な領域のみを考えているため、あらゆる滑らかな曲線座標は、直線座標で近似できるとして良い。ただし、基底同士が直交しているとは限らない。この場合、2つの基底ベクトルの内積 $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$ は次で与えられる。

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_j| \cos \theta, \quad (3)$$

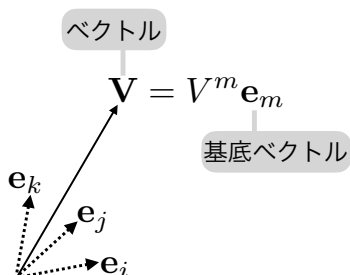


図 1. ベクトル $\mathbf{V}$ の基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ による分解の概念図。

ここで、その2つの基底ベクトルの間の角度を θ とした。ではここで、共変ベクトル成分についても導入しておく。 $\mathbf{V}$ の共変ベクトル成分は、

$$V_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (4)$$

として定義され、下つき添え字で表す。ここで、この定義式をもう少し書き換えると、 V^m と V^i の関係が次のように求まる。

$$V_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i = V^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i, \quad (5)$$

右辺の部分には $\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i$ が現れており、これは2つの添え字を持っている量である。そうすると、これはテンソルとしての変換性を持つ量であるかを検討したくなる。実は、後にこの量こそが計量テンソルであることがわかる。ベクトルの長さの2乗は、そのベクトル2つの内積で与えられる。

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = V^m \mathbf{e}_m \cdot V^n \mathbf{e}_n = V^m V^n (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n). \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n$ は、内積をとっているもので、スカラー量であることに注意してほしい。今、このスカラー量を g_{mn} と記すことにすると、次のようになる。

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = V^m V^n g_{mn}. \quad (7)$$

もしこのベクトル $\mathbf{V}$ が2つの隣接する微小な位置ベクトル $d\mathbf{X}$ であったとすると、次のような形で線素の2乗 ds^2 を記述できる。

$$ds^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = g_{mn} dx^m dx^n. \quad (8)$$

つまり、計量テンソルとは微小な¹ベクトルの長さの2乗をどう計算すべきかを教えてくれる量なのである。ここで、(5) に注目すると、ベクトルの共変成分 V_i は次のように書けることがわかる。

$$V_i = V^m g_{mi}. \quad (9)$$

つまり、計量テンソルは、添え字の上げ下げ、あるいは反変成分を共変成分に変換する役割も担っている。ここで、重要事項をまとめておこう。

- ベクトル $\mathbf{V}$ の反変成分は、 $\mathbf{V}$ を基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ で分解した場合の係数である。
- ベクトル $\mathbf{V}$ の共変成分は、 $\mathbf{V}$ と基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ の内積である。

¹ くだいかもしいないが、ここで微小であることに限定したのは、一般には曲線座標で貼られる空間でも、微小領域に限れば、ここで想定しているような直線座標に帰着できるからである。

2 テンソル代数

ここでは、テンソルを扱う上で必要な計算を紹介する。まずは、テンソルの加法である。同じランクかつ同様の変換性を有する2つのテンソル T と S の和 $T + S$ もまたテンソルである。つまり、それぞれのテンソル成分を単純に足した量は、新たなテンソルとして振る舞うのである。

$$(T_{\dots p}^{m\dots} + S_{\dots p}^{m\dots}) = (T + S)_{\dots p}^{m\dots} . \quad (10)$$

また、2つのテンソルの積 $V \otimes W$ は、異なるランクのテンソルとして振る舞う。これについては、すでに見た通りである。

$$V^m \otimes W_n = V^m W_n = T_n^m . \quad (11)$$

では最後に、縮約という操作についても見ていこう。縮約とは、「あるテンソルの反変成分（上つき添え字）と共変成分（下つき添え字）に関して和をとる」操作である。つまり、

$$T_{\dots b \dots c}^{a \dots b \dots} , \quad (12)$$

のように上付きと下付きの添え字 b に関して和をとる操作が、縮約である。縮約した量もまたテンソルとして振る舞うというのがここでの主張である。まずは簡単のために2つのベクトルの積で構成されるランク2のテンソル $T_n^m(x) = V^m(x)W_n(x)$ について考える。これをプライム付きの座標 x' に変換した場合、

$$(V^m W_n)' = \frac{\partial x'^m}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^n} (V^a W_b) , \quad (13)$$

となる。これに対して m, n について縮約をとることを考える。すると、

$$(V^m W_m)' = \frac{\partial x'^m}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^m} (V^a W_b) = \frac{\partial x^b}{\partial x^a} (V^a W_b) , \quad (14)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial x^b}{\partial x^a} \quad (15)$$

は $a = b$ の時だけ1であり、そうでない場合は0である。つまり、クロネッカーのデルタ δ_a^b である。最終的に、

$$(V^m W_m)' = (V^m W_m) , \quad (16)$$

となり、ランク2のテンソルの縮約はスカラー量と同じ変換性を持つことがわかった。同様のことは、より一般のテンソルについても示すことができる。

小テスト1

同じ次元を持つ2つのベクトル $\mathbf{V}$ と $\mathbf{W}$ の内積は、テンソル $V^m W_n$ の縮約と等価であることを示しなさい。

3 計量テンソル (2)

ここで、計量テンソルの性質について、さらに掘り下げておく。まず、計量テンソルがそもそもテンソルであるかをまだ示していないので、これを示しておこう。計量テンソルは微小区間における線の長さ（線素） ds の2乗について次のような形を持つ。

$$ds^2 = g_{mn}(x) dx^m dx^n . \quad (17)$$

これをプライム付きの座標 x' で表したとしても、線素は不変であるので

$$g_{mn}(x) dx^m dx^n = g'_{mn}(x') dx'^m dx'^n , \quad (18)$$

となる。ここで次の関係式を使う。

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial x'^p} dx'^p . \quad (19)$$

すると、(18) は次のようになる。

$$g_{mn}(x) \frac{\partial x^m}{\partial x'^p} \frac{\partial x^n}{\partial x'^q} dx'^p dx'^q = g'_{pq}(x') dx'^p dx'^q . \quad (20)$$

つまり、次の関係式を得る。

$$g'_{pq}(x') = g_{mn}(x) \frac{\partial x^m}{\partial x'^p} \frac{\partial x^n}{\partial x'^q} . \quad (21)$$

これは明らかに、共変テンソルの変換性そのものである。したがって、計量テンソルは確かにテンソルとしての変換性を有することがわかった。また、それが共変成分の変換性を有するために計量テンソルの添え字は下つき添え字で表す。

次に、計量テンソルを行列表示した場合、それは対称行列とみなして良いことを示しておく。つまり、

$$g_{mn} = g_{nm} . \quad (22)$$

任意のランク2のテンソルや正方行列 T_{mn} は次のように、対称行列 $S_{mn} = S_{nm}$ と非対称行列 $A_{mn} = -A_{nm}$ に分解できることを示せる²。

$$T_{mn} = S_{mn} + A_{mn} . \quad (23)$$

したがって、計量テンソルについても同様の分解を行うことを考える。つまり、 $g_{mn} = S_{mn} + A_{mn}$ としよう。この時、線素は次のように与えられる。

$$ds^2 = S_{mn} dx^m dx^n + A_{mn} dx^m dx^n . \quad (24)$$

しかしながら、第2項の部分は A_{mn} の反対称性からゼロになることがわかる。このため、計量テンソル g_{mn} は対称テンソルとして問題ない。つまり、以下の通りである。

$$g_{mn} = g_{nm} . \quad (25)$$

² $S_{mn} = (T_{mn} + T_{nm})/2$ および $A_{mn} = (T_{mn} - T_{nm})/2$ とすれば良い。

この計量テンソルを行列表記した場合、Riemann 幾何ではその行列の固有値は全てゼロでない値になる。もしゼロとなる固有値があれば、

$$g_{mn}v^m = 0, \quad (26)$$

となるゼロでない微小位置ベクトル v^m が存在することになる。しかし、その長さは

$$g_{mn}v^mv^n = 0, \quad (27)$$

であることから、ゼロになる。Riemann 幾何学では全ての方向に対して正の長さを持つことを前提とするため、この限りにおいて固有値は全てゼロでない値となる。

最後に、計量テンソルの逆行列について考える。その逆行列の成分は上付きで表すとすれば、計量テンソルの逆行列 g^{mn} は次のように定義される。

$$g_{mn}g^{np} = \delta_m^p. \quad (28)$$

これが逆行列の定義であるが、 δ_m^p はランク 2 のテンソル量であることから、 g^{np} もまた反変成分を持つテンソルであることがわかる。

レポート課題

問題 1

テンソルの縮約は必ず、上付き添え字（反変成分）と下付き添え字（共変成分）の間で行われる。では敢えて、二つの上付き成分の間でこれに対応する操作をしてみるとどうだろう？

2つのベクトルで構成されたテンソルについて、 $\sum_m V^m W^m$ の操作を行って得られた量は、テンソルとして振舞わないことを示しなさい。

問題 2

- (1) δ_m^p がテンソル量であることを示しなさい。
- (2) 計量テンソルの逆行列である g^{np} がテンソルであることを示しなさい。

これまでテンソルに関する基礎的事項、計量テンソルの性質などについて学んできた。次に、テンソルの平行移動やテンソルの微分（共変微分）そして曲率テンソルの導入を行う。この曲率テンソルこそが、幾何の歪み具合や、重力の潮汐力の程度を定量化する極めて重要な量であるため、これらもまた外すことのできない事項である。