

現代物理学 III 2. 数学的諸準備（スカラー・ベクトル・テンソル）

重力を幾何学的な対象として捉え、それを数学的に取り扱うための準備をおこなうことが、今回の主目的である。また、今後多用する新たな数学的記法を導入し、煩雑な数式をできる限り簡易化して記述することに慣れていくことを目指す。さらに、高校までは一列の数字の組みをベクトルと呼んでいたと思うが、ここで扱うベクトルはより深い意味を持つ。どのような性質がある場合に、その量をベクトル（あるいはテンソル）というのか、という重要事項についても述べていく。

1 ダミー変数

数式は、多くの場合、意味を含む変数で構成されている。たとえば、長方形の面積は

$$A = ab, \quad (1)$$

ここで、 a と b はそれぞれ長辺と短辺の長さであり、 A は面積である。このようにそれぞれ幾何学的な意味を持つ変数が現れる。それではこの数式はどうだろうか？

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \sum_{n=1}^m n^2, \quad (2)$$

これは整数の二乗和を表す式で、整数 m はその整数の値まで和をとるという意味であるから、確かに数学的な意味を持つ。一方で、整数 n は、便宜上、導入されている変数である。実際に、計算結果は m のみに依存しており、 n には依存していない。このような、和を取る際に便宜上導入されている変数を「ダミー変数」という。このようなダミー変数は、今後多くの場面で現れることとなり、数式を煩雑にする原因となる。その煩雑さを避けるべく、アインシュタインによって導入された総和記法を用いることが一般的である。

例えば、既に導入した計量テンソルによる線素の表式を見てみる。

$$ds^2 = \sum_{n,m} g_{mn} dx^m dx^n \quad (3)$$

ここで現れる添字 m と n も同様にダミー変数である。このようなダミー変数は、基本的に内積を取る際に現れるため、2つで組みを成して現れる。つまり、式 (3) には、ダミー変数 m や n が 2 度（1 度でも 3 度でもない）現れている。このダミー変数の性質を理解していると、「同じ添字が 2 度現れたら、その添え字については総和を取るものとする」と約

束しておく代わりに、総和の記号 $\sum_{n,m}$ を省略してしまっても良いだろう。そうすれば、式 (3) は

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n \quad (4)$$

というように、シンプルに書くことが許される。これは、アインシュタインによって導入された記法であり、「アインシュタインの縮約記法」と呼ばれている。以後、この記法に基づいて数式を記述していくこととする。

2 テンソルと重力

では、少し話題を戻して「テンソル」について議論していく。先ほどから「計量テンソル」というワードが出てきているが、まだテンソルとは何か、ということを含く解説していない。そこで、テンソルの導入も踏まえて、なぜ重力の記述においてそれが必要なのかを概説しておく。

用いる座標によって、計量テンソルの形は異なることは前回の授業で解説済みである。前回も議論した通り、ある空間の線素

$$ds^2 = g_{mn}(x) dx^m dx^n, \quad (5)$$

が、座標変換 ($x^m \rightarrow y^m$) で

$$ds^2 = \delta_{mn} dy^m dy^n, \quad (6)$$

と、あらゆる場所に変換できる場合、その空間は平坦である、というのであった。このような座標変換があるかどうかを判定することは、単に計量テンソル g_{mn} を、ある場所 x で対角化する以上に難しいことである。なぜならば、計量テンソルは位置 x に依存しており ($g_{mn} = g_{mn}(x)$)、大域的な座標変換で全ての場所の計量テンソル $g_{mn}(x)$ を一斉に単位行列 δ_{mn} にできるかどうかを判定せねばならないからだ。これはもはや数学的な問題であり、この判定方法を理解する上で「テンソル解析」は威力を発揮する。つまり、 $g_{mn}(x)$ が座標変換によってどう変換されるかをきちんと理解しておく必要があり、これがテンソル解析という分野で理解できるのだ。このテンソル解析については、また後ほど詳説することとする。

結論から言えば、「曲率テンソル」あるいは「Riemann テンソル」が、あらゆる場所でゼロであれば、平坦であると判定できる。逆に、どこかで曲率テンソルがゼロでない値を持っていれば、それは平坦ではなく座標変換では消せない重力が存在していることを意味する。これについては後ほど詳説するが、

このことから「重力は曲率である」ということが理解できるのである。

3 反変ベクトルと共変ベクトル

テンソルが何かを理解するには、座標変換についてもう少し深く考える必要がある。ある空間における点 P を考える。これを座標 $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ と、別の座標 $y = \{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ で表すことを考える。どちらの座標を使おうとも点 P 自体が同じ点であることに変わりはないだろう。しかし、異なる座標を使えば、点 P の座標成分の値も当然異なる。それぞれの成分は次のように形式的に書いて良い。

$$\{x^1(P), x^2(P), \dots, x^n(P)\} \quad (7)$$

$$\{y^1(P), y^2(P), \dots, y^n(P)\} \quad (8)$$

ここで (P) は点 P における座標値であることを意味する。さて、ここで点 P での座標値 $x^m(P)(y^m(P))$ は、 $y^m(P)(x^m(P))$ の全成分に関する関数である。なぜならば、 $y^m(P)(x^m(P))$ の全成分がわかれば、点 P がどこにあるかもわかる。そして、点 P の位置がわかれば、その位置を別の座標 $x(y)$ で表すことも可能だからだ。つまり、このように書いて良いだろう。

$$x^m(y) \text{ or } y^m(x). \quad (9)$$

ではここで、点 P を原点とし、そこから微小距離ズレた位置にある点 Q の位置ベクトル dx^m (座標 x に基づく) を考える。この位置ベクトルは、座標 y に座標変換した場合、どのように変換するだろうか？これは「全微分」に基づいて次のようになることが直ちにわかる。

$$dy^m = \frac{\partial y^m}{\partial x^p} dx^p, \quad (10)$$

ここで「アインシュタインの縮約記法」を用いていることに注意すること。位置ベクトルに限らず、何かの空間における「ずれ (displacement)」に起因するベクトルは基本的に、座標変換で (10) と同じ変換の仕方をする。このような変換をするベクトルを「反変ベクトル (contravariant vector)」という。これとは異なる変換の仕方をするベクトルが存在する。スカラー場¹の勾配で与えられるベクトルが、まさに反変ベクトルと異なる「共変ベクトル」である。

スカラー場 $S(x)$ を考えよう。この勾配 (gradient) をとる、というのは次の計算を行うことであった。

$$\nabla S(x) = \left\{ \frac{\partial S(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial S(x)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial S(x)}{\partial x^n} \right\}, \quad (11)$$

¹ スカラー場とは、例えば部屋の温度分布 $T(x)$ や標高の分布 $h(x)$ など、ある位置に1つの値が割り当てられた量を指す。それと異なるものとして、例えば、風速はある位置に「風の速さ」と「その向き」が割り当てられるのでスカラー場ではなくてベクトル場である。

つまり、勾配を取ることでスカラー場 $S(x)$ はベクトル場になるのである。このベクトル場を座標 y と x で表した場合、両者は次の変換則で関係づく。

$$\frac{\partial S}{\partial y^m} = \frac{\partial x^p}{\partial y^m} \frac{\partial S}{\partial x^p}, \quad (12)$$

(10) と比べてみると、異なる変換の仕方であることがわかる。(12) のような変換の仕方をするベクトルを「共変ベクトル」という。

つまり、一言にベクトルと言っても、座標 x から座標 y への変換を考えた場合に、その変換の仕方が必ずしもいつも同じとは限らず、2つの変換タイプがあるのである。ここでまとめておこう。

反変ベクトル $V^m(x)$, $(V')^m(y)$ の変換則

$$(V')^m = \frac{\partial y^m}{\partial x^p} V^p \quad (13)$$

共変ベクトル $W_m(x)$, $(W')_m(y)$ の変換則

$$(W')_m = \frac{\partial x^p}{\partial y^m} W_p \quad (14)$$

このように、反変ベクトルは上付き添え字、共変ベクトルは下付き添え字で表すルールがある。

4 反変テンソルと共変テンソル

ここまで来れば、テンソルを理解するのはそこまで難しくはない。単なる数字の寄せ集めという意味での行列とテンソルの違いは、座標変換によって、どのように変換するかに現れる。実は我々がここで扱うベクトルについても同様のことが言える。高校までは、何かしら成分をもった一列の数字の組みをベクトルと呼んでいた。しかし、ここでいうベクトルというのはそれよりも深い意味を持っていることに注意してほしい。つまり、ここでのベクトルというのは座標 (あるいは基底) に付随する量であり、座標変換によって (13) や (14) で変換するものを指す。ベクトルというのは、座標あるいは基底があってこそその量であり、単なる一列の数字の寄せ集めというイメージはここでは捨てなければならない。

では、いよいよテンソルについて考える。例えば、次のような行列 T を考えてみよう。その成分 T^{mn} は次で与えられる。

$$T^{mn} = V^m U^n, \quad (15)$$

ここで V^m は次元 M の反変ベクトル V の一成分であり、 U^n は次元 N の反変ベクトル U の一成分である。この行列 T は2つの反変ベクトルの積で与えられることがわかる。つまり、これは座標変換によって影響を受ける行列である。どのように変換するかみてみよう。別の座標 y で表したベクトル、行列の

成分をプライム付きで表す。座標 y での行列は

$$(T')^{mn} = (V')^m (U')^n, \quad (16)$$

で与えられる。座標変換 $x \rightarrow y$ でどのようにこの行列が変換するかは、(13) を用いればわかる。

$$(T')^{mn} = (V')^m (U')^n = \frac{\partial y^m}{\partial x^p} V^p \frac{\partial y^n}{\partial x^q} U^q. \quad (17)$$

最終的に以下を得る。

$$(T')^{mn} = \frac{\partial y^m}{\partial x^p} \frac{\partial y^n}{\partial x^q} T^{pq}. \quad (18)$$

このように変換する量をランク 2 の「反変テンソル」という。この意味で、ベクトルはランク 1 のテンソルということもできる。同様にしてより多くの添え字を持つ量を考えることもできる。すべての添え字が反変であるような場合だと、

$$(T')^{lmn} = \frac{\partial y^l}{\partial x^p} \frac{\partial y^m}{\partial x^q} \frac{\partial y^n}{\partial x^r} T^{pqr}, \quad (19)$$

と変換する。同様のことは共変ベクトルを使っても可能であり、例えばランク 2 の共変テンソルは次で与えられる。

$$(T')_{mn} = \frac{\partial x^p}{\partial y^m} \frac{\partial x^q}{\partial y^n} T_{pq}. \quad (20)$$

レポート課題 1つの反変ベクトル V^m と1つの共変ベクトル U_n で構成されたテンソル $T_n^m = V^m U_n$ が、どのように変換するか示しなさい。つまり、 $(T')_q^p(y)$ と $T_n^m(x)$ の関係を示せば良い。レポートには、計算式だけを書くのではなく、変数の定義及び文章による説明も付すこと。

後で論じる通り、計量テンソル g_{mn} もまたテンソルである。ここまでは、ベクトルやテンソルとして重要な性質は、座標および基底の変化によるその変換性であることがわかってもらえれば良い。次の章で、テンソル解析をよりきちんと学び、計量テンソルの性質についてもみていく。