

現代物理学 III 1. 等価原理と一般相対性原理

一般相対性理論（一般相対論）を学ぶ上で、最も重要なアイデアの1つが「等価原理」である。まずはこれについて解説する。以下で示す計算は極めてシンプルだが、一般相対論のコンセプトを理解する上では極めて重要な内容である。アインシュタインが「等価原理」を閃いたエピソードに、「自由落下するエレベーターの中にいた場合、どのように重力を感じるか？」という問いに基づいた思考実験が出てくるのは有名な話である。以下では、エレベーターの上下運動について考えてみよう。

1 慣性系

エレベーターが速度 v で縦方向に運動している。この際に、エレベーター内の位置 P を表すために、2つの座標系を考えることができる。1つは、エレベーターの外に固定された座標系 (t, x, y, z) であり、地面を $z = 0$ とする。もう1つは、エレベーターの中で固定された座標系 (t', x', y', z') で、エレベーターの床を $z' = 0$ とする。エレベーターの床の高さは $z = L(t)$ としよう。

しばらくの間、このエレベーターはゆっくり動くものと仮定して、特殊相対論を無視して考えてみる。¹

まずは、エレベーターが等速度で動く場合を考える。つまり

$$L(t) = vt. \quad (1)$$

特殊相対論は無視しているので、2つの座標系の関係は以下の通りである。

$$z' = z - vt, \quad (2)$$

$$t' = t, \quad (3)$$

$$x' = x, \quad (4)$$

$$y' = y. \quad (5)$$

エレベーター内にある質点 P が加速度を持っている場合、ニュートンの運動の法則によればそれに作用する力を F として、

$$F = m\ddot{z}, \quad (6)$$

¹ 特殊相対論を拡張したものが一般相対論ならば、なぜ特殊相対論を無視して一般相対論について論ずることができるのだろうか？特殊相対論は速さが大きい場合に重要となるが、一般相対論は質量が極めて大きい場合に重要となる。重力が重要であるものの、大きな速さが関与しない状況があり得るため、まずはその状況で重力について考え、理解を膨らまし、その後で特殊相対論と組み合わせる、ということが可能である。その結果、一般相対論が現れることとなる。

となる。²この法則はエレベーターの外の座標系で記述したものであるが、座標系を変えるとどうだろう？エレベーター内では、 $z' = z - vt$ であるため、時間の2階微分は

$$\ddot{z}' = \ddot{z}, \quad (7)$$

となる。つまり、2つの座標系で測った P の加速度は同じであるため、エレベーター内での運動の法則も同様に

$$F = m\ddot{z}' \quad (8)$$

ということになる。これは式 (6) と同じ形をしている。ニュートンの運動の法則が成立するような系を慣性系という。つまりここで考えた2つの座標系は慣性系である。実際に2つの座標系の相対速度は一定（エレベーターは加速度運動していない）ことから理解できる。ニュートンの運動の法則は、あらゆる慣性系において全て同じ形で成立するのだから、これは当然の帰結である。

2 等価原理

では次に、加速度運動するエレベーターを考える。

$$L(t) = \frac{1}{2}gt^2. \quad (9)$$

これは、より現実に近いエレベーターを記述している。止まっているエレベーターが動き出す瞬間、あるいは動いているエレベーターが止まる瞬間、この状況を体験するはずである。この際は、エレベーターの外にいる人の座標系と中にいる人の座標系の関係は以下の通りである。

$$z' = z - \frac{1}{2}gt^2, \quad (10)$$

$$t' = t, \quad (11)$$

$$x' = x, \quad (12)$$

$$y' = y. \quad (13)$$

この時に同様にしてエレベーター内の質点 P の加速度を、2つの異なる座標系で記述すると以下の通りになる。

$$\ddot{z}' = \ddot{z} - g. \quad (14)$$

² 粒子に作用する力は様々なものが考えられる。エレベーターの壁が帯電していて、それに引き寄せられる場合や、質点がエレベーターの天井から糸でぶら下がっている場合は糸の張力や質点に作用する重力も力を及ぼすだろう。その詳細によらず、ニュートンの運動の法則が成立する状況を考えている。

エレベーターの外にある座標系は前回と同様に慣性系であることから、ニュートンの運動の法則が成立する。つまり $F = m\ddot{z}$ である。これを用いると (14) は以下のように書き換えられる。

$$m\ddot{z}' = m\ddot{z} - mg = F - mg. \quad (15)$$

これは、外力 F に加えて、エレベーター内では別の力 $-mg$ が働いていることを示す。 $-g$ を重力加速度と読み替えれば、まさしく地球上で働く重力と同じ形をしている。これはいわゆる慣性力と呼ばれるものだ。

もし窓がないこのエレベーター内にあなたがいたとして、下側に引っ張られるような力を感じた際に、この $-mg$ が近くの天体の重力に起因する力なのか、近くに天体がなくエレベーターがジェットで加速度運動する³ことで生じる慣性力に起因しているのか原理的に区別がつかない。つまり、(これが最も重要な点だが) 慣性力と重力はこの意味で全く等価なものであるということだ。これを「等価原理」という。

3 座標変換

時空間のある一点 P を示すには、座標を用いるのが便利である。しかし、座標にはさまざまなものがある。例えば先にも見た通り、エレベーターの外に固定された慣性系に対応する座標系 (t, x, y, z) や、エレベーター内に固定された座標系 (t', x', y', z') があった。これ以外にも無数の異なる座標系を設定することが可能である。時空点 P は (t, x, y, z) で表しても、 (t', x', y', z') で表しても良い。しかし注意すべきは、その時空点がある質点の位置である場合、どの座標系を用いるかによって、その質点の従う運動方程式が異なって見えることである。

小テスト 1

紐が切れて自由落下するエレベーターがあると
する。この中で同じく自由落下する質点 P は、
座標系 (t', x', y', z') においては無重力で浮いて
いるように見えることを説明せよ。
ヒント：(15) を、問題文の状況に合うように改
変すれば良い。

座標系 (t, x, y, z) においては重力が作用しているように見える場合でも、座標変換で (t', x', y', z') に移った場合には、慣性力で重力が打ち消され、無重力状態に見えることが理解できる (問題 1)。

それでは、重力はいつでも座標変換で消すことができる「見かけの力」に過ぎないのだろうか？

4 潮汐力と局所慣性系

これまでは、エレベーター内など、地上の比較的小さい領域だけに着目した。このような小さい領域に限れば地球の重力加速度は一樣とみなすことができる。そしてこのような一樣な重力は、座標変換によって消すことができるを見た。

しかしながら、ニュートンの万有引力によれば、実際には、重力場⁴は一樣ではない。

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (16)$$

のように、2つの質点 (それぞれ質量 m_1 と m_2 を持つ) の間に作用する重力は距離の逆二乗に従う。この場合、座標変換で全域の重力を完全に打ち消すことが容易ではないことは想像に難くない。実際に、それはできないことを一般相対論の枠組みで今後示す。実際に、例えば地球と同じ程度のサイズの人型スライムがあったとして、その人型スライムが地球に落下している状況を考えてみよう。この場合、足の方がより地球に近いので、より強い重力を感じる。頭部にかかる重力は相対的に弱くなるだろう。したがってこの人型スライムは体に沿って引き伸ばされるような力を感じるようになる。この「重力の非一様性で物体を変形させる力」が潮汐力である。

ものを変形させるという現象が起きる以上、もはや地球の大局的な重力は、座標変換でいつでも消せる「見かけの力」ではない。座標変換で消せない力である。逆に言えば、どのような物質を、どこから自由落下させても潮汐力が生じないような重力場があったとすると、それは座標変換で消すことができると言っても良い。そのような重力場はもはや単なる「見かけの重力場」であり、天体などが生じさせる本当の重力場とは異なるものである。この潮汐力は大きさがあるものに働くという性質がある。つまり、潮汐力が効かないほど小さな物体には、地球の重力は一樣に感じられるため、先にも述べた通り座標変換で (部分的に、あるいは局所的に) 消すことができる。このように、小さな領域にだけ限定して注目すれば、重力場中においても、座標変換で重力を消し、(自由落下するエレベーター内部のように) 何も力が働かない「局所的な」慣性系を用意することができる。これを局所慣性系という。

5 一般相対性原理

アインシュタインはあらゆる物理法則は、座標系によらず不変的な形で記述できるとした。これは特殊相対論の出発点である特殊相対性原理 (全ての慣性系で物理法則及び光速は不変である) の拡張とも

³ ジェットをもつ乗り物をエレベーターと呼んで良いかはここでは考えないことにする。

⁴ 地球の周りなどでは、力の向きや大小はあるものの、あらゆる場所で重力が働く。このような重力が働く時空間のことを重力場という。

言える。この思想を原理のレベルで局所慣性系にも適用するというのがアインシュタインの一般相対性原理である。一般相対性原理は以下の2つからなる。

- 全ての局所慣性系で物理法則は不変である。
- 真空中を伝播する光の速さは全ての局所慣性系で同じである。

特殊相対性原理と比較すれば、一般相対性原理は、慣性系を局所慣性系に置き換えただけの違いしかない。しかしこれは、時空が非一様な歪みを持ち伸縮する動的な物理的対象とするための重要なステップであった。

6 Euclid 幾何

これまでの抽象的あるいは定性的な議論を繰り返してきたが、以下では実際にアインシュタインが行ったように、このような議論を数学で厳密に展開するための準備を行う。そこで必要となる知識が「幾何学」である。幾何学で、時間や空間の歪みを記述することこそが、一般相対論の構築につながった。

空間におけるある点を表すのによく用いるのが直交座標系である。これは多くの場合、互いに直交する x 軸、 y 軸、 z 軸を用いて空間を張る。今、この空間に2点 (P, Q) があると、それらはそれぞれ

$$Q: (x, y, z), \quad (17)$$

$$P: (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z). \quad (18)$$

に位置しているとする。この2点間の距離 ΔL は

$$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (19)$$

で定まる。これは三平方の定理で示すことができる。このように、2点間の距離が (19) で表されるような空間そのものを Euclid 幾何と呼ぶ。三角形の内角の和が 180 度になるなど、我々が小中高生の間に学ぶ基本的な図形に関する諸性質の多くは、この Euclid 幾何の枠組みの範疇にある。しかし球面の上に描かれた三角形など、空間そのものが歪んでいる場合での幾何学は、この Euclid 幾何を超えた枠組み (Riemann 幾何学) で議論されなければならない。

7 Minkowski 幾何

アインシュタインは Minkowski から幾何学を学んだ後に、特殊相対論はある種の幾何学として捉え直すことができることに気づく。この考え方は大事であるため、しばしば重力から離れ、Minkowski 幾何についても学んでいこう。

Minkowski 幾何における2点 Q, P の座標を次のように定めよう。

$$Q: (t, x, y, z), \quad (20)$$

$$P: (t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z). \quad (21)$$

この2点間の「距離」は、Minkowski 幾何では、Euclid 幾何とは違った形で定義される。それは以下の通りである。

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (22)$$

ここで Δs は固有距離と呼ばれる量であり、いわば時間も空間と同等に扱われる「時空間」における距離と思えば良い。我々に馴染み深い距離とは異なる点として、この Δs^2 は、P と Q が離れていたとしても正、負、ゼロになり得るということである。

これが「距離」と呼ばれる所以は、 Δs^2 がローレンツ変換に対して不変だからである。(ユークリッド幾何でも2点間の距離は、座標の並行移動や回転に関して不変である。)

8 Riemann 幾何

平坦な空間や曲がった空間とはどのようなものだろうか？幾何学では、直感通り、このレジュメの紙を伸ばした状態のものは平坦とみなす。一方でこの紙を曲げたとしても、それは依然として平坦であると見なすのが Riemann 幾何学である。平坦な紙を曲げた際に、それが「曲がっている」と認識できるのは、3次元空間に埋め込まれた二次元平面である紙を見ているためだ。しかし、もし紙に描かれた2次元の生物がいるとして、その生物は紙面 (二次元平面) しか認識できないとしたら、紙が曲げられていることには気づけないはずである。なぜなら紙自体は曲げられた際も伸縮したりしないからだ。

これがゴムシートとなると話は変わる。この場合は、例えばゴムシートをある方向に引っ張って伸ばすことができる。ゴムシート上に描かれた2次元生物は、自身の体が引き延ばされたように感じるはずである。これがその生物にとっての潮汐力に対応すると言えるだろう。

我々の感じる重力もこれと同様の理屈で理解できるというのが、一般相対論の思想であり、この時空間の伸縮あるいは歪みを記述する数学として、Riemann 幾何学を用いている。Euclid 幾何学では、離れた地点 A と B でそれぞれ「同じ物差しで測った長さ 1cm」が当然ながら同じ長さであった。しかし、空間の歪みを記述する Riemann 幾何学ではもはやこの描像は一般に成り立たない。部分的に空間が伸びたり、縮んでいたりする空間を対象とするので、測定する場所によって物差しの目盛りを調整する必要がある。これを Riemann 幾何学の言葉で説明するには「計量テンソル (metric)」という概念を導入するのが便利である。

9 計量テンソル

まずは、3次元の Euclid 空間に埋め込まれた (必ずしも平坦とは限らない) 2次元平面を考えてみよ

う。数学的には一般にこのような平面のことを「多様体 (manifold)」と呼ぶ。この多様体に曲線座標を付与することを考えてみる。Riemann 幾何学では一般に任意次元を対象とするので、 (x, y, z) のような 3 次元空間に特化したラベルは使わないことが多い。その代わり、 N 次元であれば $(x^1, x^2, x^3, \dots, x^N)$ というラベルを使う。このような任意の 2 次元多様体上に張られた任意の曲線座標 (x^1, x^2) において、局所的に隣接した 2 点の距離 ds はどのようにして与えられるだろうか？ (座標が曲がっているのもはやピタゴラスの定理で与えられる $(dx^1)^2 + (dx^2)^2$ ではないことは予想がつくだろう。Riemann 幾何学ではその極小距離は計量テンソル g_{mn} を用いて以下で与えられる。

$$ds^2 = \sum_{m,n} g_{mn} dx^m dx^n, \quad (23)$$

今の例では、総和は m, n それぞれ 1 から 2 まで走ることになる。 N 次元の場合はその 2 が N になるだけである。ここでいくつか注意が必要である。まず、この形で距離が定まるのは、2 点間が極近傍に隣接している時だけである。⁵さらに、計量 g_{mn} は多様体上の場所によって一般に異なるということになるので、 $g_{mn} = g_{mn}(x)$ である。

これは球面座標を知っていれば実はそこまで新鮮な話でもない。球面座標を用いた球面上の隣接した 2 点間の距離は

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (24)$$

ここで R は、その球面が 3 次元 Euclid 空間に埋め込まれていた場合、その球の半径に対応する。これも実は計量に基づく記述と対応させられる。つまり、

$$g_{\theta\theta} = R^2, \quad g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta, \quad (25)$$

となる。 $g_{\phi\phi}$ は角座標 θ に依存している。非対角成分がないのは、球面座標はどの位置でも局所的には直交座標だからだ。

先にこのように述べた：「部分的に空間が伸びたり、縮んでいたりする空間を対象とするので、測定する場所によって物差しを目盛りを調整する必要がある。」物差しを目盛りは、座標 x^i に対応しており、場所に依存する計量テンソル $g_{mn}(x)$ が物差しを目盛りを調整する役割を担っている。

小テスト 2

3 次元ユークリッド空間の計量テンソルを (i) デカルト座標 (x, y, z) 及び (ii) 球座標 (r, θ, ϕ) で記しなさい。

小テスト 2 より、同じ 3 次元ユークリッド座標でも用いる座標によって計量テンソルは異なる形をとる。取り得る座標の選択が無数にある以上、計量テンソルの形も与えられた多様体に対して一意に決まるわけではないのだ。座標変換を行えば、それに伴い、計量テンソルも変換されることになる。

ここで、Riemann 幾何学において「平坦な空間・多様体」とはどういうものかを端的に述べておく。**ある D 次元空間の線素 ds^2 が、座標変換によってあ**

らゆる場所で $ds^2 = \sum_{n=1}^D (dx^n)^2$ と記述できる場合、

その空間を平坦であるという。小テスト 2 において (ii) 球座標での計量テンソルが与えられているが、それに対応する空間が平坦かわからなかったでしょう。それでも、(i) デカルト座標への座標変換を見つけたならば、計量テンソルは単位行列の形となり、平坦時空であることがわかるのである。

しかし、その空間が平坦である場合はこの方法で平坦性を示せるが、平坦でない場合、その空間が平坦でないことを主張するのは至難の業である。「平坦にする座標変換が存在しない」ことを証明しなければならないからだ。空間の平坦性を調べる上では、あらゆる座標変換を総当たりで試すことは決して現実的なものではない。

後に、計量テンソルから「曲率」の計算方法について論じる。しかしその前に、歪んだ多様体の上でのスカラー・ベクトル・テンソルを扱うための数学的な準備を進める必要がある。

⁵ 離れた 2 点間を結ぶ多様体上の線の長さが知りたければ、 ds をその線上で線積分すれば良い。