

現代物理学 III 11. 重力波

Einstein 方程式は、重力場 (計量を $g_{\mu\nu}$) と物質場 (エネルギー運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$) の関係を表す「非線形な方程式」である。しかし、背景時空 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ からのわずかな重力場の揺らぎ $\epsilon h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(0)}$ を記述する場合、 ϵ が 1 よりも十分に小さいとみなして、Einstein 方程式を線型化 (ϵ の 2 次以上の項を無視) し、どのような時空の揺らぎが許容されるかを予言することができる。

この結果として予言された現象が「重力波の伝搬 (時空の揺らぎの伝搬)」である。人類がこの現象を初めて観測で立証できたのは、アインシュタインが一般相対論を完成させた 1915 年からちょうど 100 年後の 2015 年のことである。

1 Einstein 方程式の線型化

ここでは、Minkowski 時空からの小さな歪みを考えることにしよう。この場合、背景時空は $g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$ であるため、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (\epsilon \ll 1), \quad (1)$$

である。以下では、 ϵ の 2 次以降の項は全て無視して考えるため、 $h_{\mu\nu}$ は近似的に背景時空 $\eta_{\mu\nu}$ 上で定義されたテンソルとみなす。偏微分の添え字も含めた添え字の上げ下げを、 $\eta_{\mu\nu}$ で行うものとする。まずはこの条件で Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ を計算し、Einstein 方程式を導出しよう。

接続係数は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &\approx \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon (h^{\alpha}_{\mu,\nu} + h^{\alpha}_{\nu,\mu} - h_{\mu\nu}^{\alpha}), \end{aligned} \quad (2)$$

これを用いて、Riemann テンソル、Ricci テンソル、Ricci スカラーはそれぞれ次のように計算できる。

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} \\ &\approx \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} \\ &\approx \frac{1}{2} \epsilon (h^{\alpha}_{\nu,\mu\beta} - h^{\alpha}_{\beta,\mu\nu} + h_{\mu\beta}^{\alpha}{}_{,\nu} - h_{\mu\nu}^{\alpha}{}_{,\beta}). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon (-h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + h_{\nu\alpha}^{\alpha}{}_{,\mu} + h_{\mu\alpha}^{\alpha}{}_{,\nu} - h_{,\mu\nu}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$R \approx \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \approx \epsilon (h_{\mu\nu}^{\mu\nu} - \square h), \quad (5)$$

したがって、Einstein テンソルは次で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\approx R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &\approx \frac{1}{2} \epsilon [-\square h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}^{\alpha}{}_{,\nu} + h_{\nu\alpha}^{\alpha}{}_{,\mu} - h_{,\mu\nu} \\ &\quad - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \square h)]. \end{aligned} \quad (6)$$

一般に重力波が励起されるときには、重力波の発生源となる物質場が存在する。 ϵ の 1 次のオーダーで重力波を励起する物質場のエネルギー運動量テンソルもまた ϵ の 1 次であることから、 $T_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon T_{\mu\nu}$ と書くことで、重力波を記述する Einstein 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} -\square h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha}^{\alpha}{}_{,\nu} + h_{\nu\alpha}^{\alpha}{}_{,\mu} - h_{,\mu\nu} \\ - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \square h) = 16\pi G T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7)$$

2 ゲージ自由度とゲージ固定

計量は座標変換によって一見異なる形をとる。例えば、微小な座標変換

$$x^{\mu} \rightarrow \bar{x}^{\mu}(x) = x^{\mu} - \epsilon \xi^{\mu}, \quad (8)$$

に対応して計量は

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}), \quad (9)$$

と変化する。¹ これをいまの線型化された計量に適用すると、背景時空 (ϵ の 0 次の計量で表される時空) が Minkowski 時空であることに注意して、

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \quad (10)$$

$$= h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}. \quad (11)$$

となる。ここで、 $h_{\mu\nu}$ と $\bar{h}_{\mu\nu}$ は、座標変換で結ばれているので、両者には物理的な違いは全くなく、同じ時空の揺らぎを表しているはずである。このような、ある物理量における物理的ではない自由度を「**ゲージ自由度**」という。また、このゲージ自由度の範囲内での物理量の変換をゲージ変換という。このゲージ変換を上手に行い、ゲージ自由度を固定すること

¹ これは、 $\bar{g}_{\mu\nu} d\bar{x}^{\mu} d\bar{x}^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ の等式から、 ϵ の 2 次以上を無視すれば得られる。

で、その物理量が満たす方程式を簡単に物理的な解釈がしやすい形へと変形することができる。

次に、以下のように $\psi_{\mu\nu}$ を定義しよう。

$$\begin{aligned}\psi_{\mu\nu} &:= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \\ \iff h_{\mu\nu} &= \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\psi, \quad \psi = \psi^\alpha{}_\alpha = -h,\end{aligned}\quad (12)$$

これを用いて、線形化した Einstein 方程式 (7) は

$$-\square\psi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + \psi_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} - \eta_{\mu\nu}\psi_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (13)$$

となる。ここで $\psi_{\mu\nu}$ は $h_{\mu\nu}$ のゲージ変換に対応して

$$\psi_{\mu\nu} \rightarrow \bar{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha}, \quad (14)$$

と変換する。ここで、 $\psi_{\mu\nu}$ に対するゲージ条件 (Lorentz ゲージ条件) として

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (15)$$

を考えてみよう。このとき (14) より

$$\bar{\psi}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \square\xi^\mu, \quad (16)$$

を得るから、任意の $\psi_{\mu\nu}$ に対して

$$-\square\xi^\mu = \psi^{\mu\nu}{}_{,\nu}, \quad (17)$$

を満たす ξ^μ を選べば、 $\bar{\psi}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ が実現でき、実際にこれは Green 関数法で解くことができるので、ゲージ条件としても矛盾は生じない。したがって、最終的に Einstein 方程式は以下の形に帰着する。

$$-\square\psi_{\mu\nu} = 16\pi GT_{\mu\nu}. \quad (18)$$

3 TT(transverse-traceless) ゲージ

次に重力波が励起され、それが真空中を伝搬する様子を考えよう。この時、局所的には物質場は存在しないのだから、線形化した Einstein 方程式は

$$\square\psi_{\mu\nu} = 0, \quad (19)$$

となる。また、(16) からわかるように

$$\square\xi^\mu = 0, \quad (20)$$

を満たすゲージ自由度によるゲージ変換に対して、Lorentz ゲージ条件 $\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ は不変である。

ここで、真空中を伝播する平面波解を

$$\psi^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (21)$$

とする。ここで、 $A^{\mu\nu}$ は重力波の振幅を表す定数テンソルである。真空中の波動方程式

$$\square\psi^{\mu\nu} = 0 \quad (22)$$

から、波数ベクトルは

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (23)$$

を満たす。

また、Lorentz ゲージ条件から

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = ik_\nu A^{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) = 0 \quad (24)$$

であるため、

$$A^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad (25)$$

を得る。

Lorentz ゲージ条件を保つゲージ変換として

$$\xi^\mu = B^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (26)$$

を考える。ここで、 B^μ は定数ベクトルである。 $k_\mu k^\mu = 0$ より、この ξ^μ は

$$\square\xi^\mu = 0 \quad (27)$$

を満たす。ここで、 B^μ はまだ固定されていない値で、まだ固定されていないゲージ自由度となっている。

(14) に (26) を代入すると、

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{\mu\nu} &= \psi^{\mu\nu} + \xi^{\mu,\nu} + \xi^{\nu,\mu} - \eta^{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha} \\ &= [A^{\mu\nu} + i(B^\mu k^\nu + B^\nu k^\mu - \eta^{\mu\nu} B^\alpha k_\alpha)] \exp(ik_\alpha x^\alpha).\end{aligned}\quad (28)$$

したがって、ゲージ変換後の振幅を

$$\bar{\psi}^{\mu\nu} = \bar{A}^{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (29)$$

と書くと、

$$\boxed{\bar{A}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + i(B^\mu k^\nu + B^\nu k^\mu - \eta^{\mu\nu} B^\alpha k_\alpha)} \quad (30)$$

を得る。

この残余ゲージ自由度 B^μ を用いて、振幅が

$$\bar{A} := \eta_{\mu\nu} \bar{A}^{\mu\nu} = 0, \quad \bar{A}^{0i} = 0 \quad (31)$$

を満たすようにできる。

実際、(30) から

$$\begin{pmatrix} k & -k^i \\ k^j & k\delta^{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} A/2 \\ A^{0j} \end{pmatrix} \quad (32)$$

という連立方程式を得る。ここで、

$$k := k^0 = |\mathbf{k}| \quad (33)$$

である。

以下では、座標軸を適切に回転し、重力波が z 方向に伝播する場合を考える。このとき

$$k^\mu = (k, 0, 0, k), \quad k^i = (0, 0, k) \quad (34)$$

と取ることができる。したがって、(32) の係数行列は

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad (35)$$

となる。

その行列式は

$$\det \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = 2k^4 \quad (36)$$

であり、 $k \neq 0$ の重力波に対してゼロではない。したがって、任意の $A^{\mu\nu}$ に対して (31) を満たす B^μ が存在する。

さらに、Lorenz ゲージ条件 (25) は、ゲージ変換後にも

$$\bar{A}^{\mu\nu} k_\nu = 0 \quad (37)$$

を満たす。 z 方向に伝播する場合には

$$-k\bar{A}^{\mu 0} + k\bar{A}^{\mu 3} = 0 \quad (38)$$

であるため、

$$\bar{A}^{\mu 3} = \bar{A}^{\mu 0} \quad (39)$$

となる。

一方、残余ゲージ自由度によって

$$\bar{A}^{0i} = 0 \quad (40)$$

としているので、Lorenz ゲージ条件から

$$\bar{A}^{00} = 0 \quad (41)$$

も従う。したがって、

$$\bar{A}^{0\mu} = 0 \quad (42)$$

であり、さらに

$$\bar{A}^{3\mu} = 0 \quad (43)$$

を得る。

よって、非零となり得る振幅の成分は

$$\bar{A}^{11}, \quad \bar{A}^{22}, \quad \bar{A}^{12} = \bar{A}^{21} \quad (44)$$

のみである。また、トレースレス条件

$$\bar{A} = 0 \quad (45)$$

から

$$\bar{A}^{11} + \bar{A}^{22} = 0 \quad (46)$$

が成り立つ。

したがって、振幅テンソルは

$$\bar{A}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

と書くことができる。ここで、 A_+ と $A_\times$ は、それぞれ重力波の plus 偏極と cross 偏極を表す。

このように、ゲージを適切に選ぶことによって

$$\bar{A}^{0\mu} = 0, \quad \bar{A}^{3\mu} = 0, \quad \eta_{\mu\nu} \bar{A}^{\mu\nu} = 0 \quad (48)$$

を同時に満たすことができる。これを **transverse-traceless gauge**、すなわち TT ゲージとよぶ。

また、TT ゲージでは

$$\bar{\psi} = \eta_{\mu\nu} \bar{\psi}^{\mu\nu} = 0 \quad (49)$$

であるため、トレース反転の定義から

$$\bar{\psi}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} \quad (50)$$

となる。したがって、TT ゲージにおける計量摂動は

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (51)$$

と表される。したがって、真空中を伝播する重力波は h_+ と $h_\times$ の二つの独立な物理的自由度をもつ。

問題

- (1) 重力波は縦波か横波かを理由と共に答えなさい。
- (2) 横軸を x 軸、縦軸を y 軸として、原点を中心とする仮想的な円があるとする。ここに、講義で議論してきた設定の通り、 z 方向に伝搬する重力波が通過すると、円はどのように歪むかを (51) の $h_+ \neq 0$ で $h_\times = 0$ とした場合で図示せよ。