現代物理学 III 10. Einstein 方程式の解

1 Schwarzschild 解 (無回転ブラックホール)

1.1 球対称時空

球対称時空では角度方向の微小距離は

$$d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,, \tag{1}$$

と表され、時間と動径方向の微小変位 (dt, dr) は角度方向と直交する（特別な θ、ϕ 方向はないという意味）。さらに、計量は (θ, ϕ) に依存しない。これは、線素 ds が次で表されることを意味する。

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{00}(t,r)\,dt^2 + 2g_{01}(t,r)\,c\,dt\,dr \\ & + g_{11}(t,r)\,dr^2 + r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \tag{2}$$

さらに時空が静的である場合には、計量が時間に依存せず、$t \to -t$ の変換で不変である必要がある。したがって、$g_{01} = 0$ であり、計量は最終的に次の形で書くことができる。

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2\,, \tag{3}$$

この形から出発して、Einstein 方程式を解く。

1.2 接続係数の計算

式 (3) を接続係数の定義

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\tau}(\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})\,. \tag{4}$$

に代入すると次を得る。

$$\begin{aligned} & \Gamma^0{}_{01} = \frac{\nu'}{2}, \\ & \Gamma^1{}_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu',\ \Gamma^1{}_{11} = \frac{\lambda'}{2},\ \Gamma^1{}_{22} = -re^{-\lambda}, \\ & \Gamma^1{}_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}, \\ & \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r},\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \\ & \Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3{}_{23} = \cot\theta, \qquad \text{他の } \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv 0. \end{aligned} \tag{5}$$

1.3 Ricci テンソル、Ricci スカラーの計算

次に、接続係数を以下の Ricci テンソルの式に代入してみよう。

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}. \tag{6}$$

すると、以下を得る。

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right], \tag{7}$$

$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r}, \tag{8}$$

$$R_{22} = 1 - e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right], \tag{9}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\, R_{22}, \qquad \text{他の } R_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{10}$$

さらに Ricci スカラー R は次の通りである。

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ &= e^{-\lambda}\left[-\nu'' - \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda' - \nu'}{r}\right] \\ &\quad + \frac{2}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\left[1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda')\right]\right). \end{aligned} \tag{11}$$

以上を Einstein テンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\,, \tag{12}$$

に代入する。結果、以下を得る。

$$G_{00} = \frac{e^{\nu}}{r^2}\left[1 - e^{-\lambda}(1 - r\lambda')\right], \tag{13}$$

$$G_{11} = -\frac{e^{\lambda}}{r^2}\left[1 - e^{-\lambda}(1 + r\nu')\right], \tag{14}$$

$$G_{22} = \frac{r^2 e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right], \tag{15}$$

$$G_{33} = \sin^2\theta\, G_{22}, \qquad \text{他の } G_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{16}$$

1.4 静的球対称の真空解

真空 $T_{\mu\nu} = 0$ の場合、Einstein 方程式は $G_{\mu\nu} = 0$ となる。$G_{00} = 0$ をまずは考えてみよう。

$$G_{00} = \frac{e^{\nu}}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right]. \tag{17}$$

とかけることに気をつければ、$G_{00} = 0$ より、

$$1 - e^{-\lambda} = \frac{r_g}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\lambda} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \tag{18}$$

ここで $r_g > 0$ は積分定数である。

さらに、(13) と (14) の両方がゼロであることから、

$$\frac{d}{dr}(\nu + \lambda) = 0\,, \tag{19}$$

であるため、C を積分定数として

$$\nu = -\lambda + C \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\nu} = e^{C}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \tag{20}$$

となる。最終的に、線素は次のように表されることがわかる。

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)e^C dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2. \quad (21)$$

新しく時間座標をスケールだけ書いて定義すると、$e^C dt^2 \to dt^2$ となるので、

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2\,, \quad (22)$$

を得る。これが Schwarzschild 解である。

2　FLRW 解（一様等方膨張宇宙）

現代宇宙論の基本原理である考え方が「宇宙原理」である。宇宙原理とは、「宇宙のあらゆる点で特別な点はなく、特別な方向も存在しない」ことを原理のレベルで要請するものである。これは、我々は決して宇宙の中心に位置しないという最も自然な考え方に基づくものでもある。

この宇宙原理に基けば、計量は次の形に制限される。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[W(r)\,dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]. \quad (23)$$

これは、まだ一様等方性を必ずしも満たしている状態ではない。一様等方性は、時間一定の面（空間）で、曲率が一定であることを課して現れる。また、一様等方性だけを課しているので、時間発展については何も制限がない。宇宙の収縮、膨張の自由度を表す量として「スケール因子」$a(t)$ が導入されている。この場合の Ricci スカラーを計算すると次を得る。

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left[\frac{2W'}{rW^2} + \frac{2}{r^2}\left(1-\frac{1}{W}\right)\right]. \quad (24)$$

ここで $\cdot$ は t 微分を表す。また、$'$ は r 微分を表すことに注意。この曲率が位置に依存しないためには最後の項の [...] の中身がゼロでないといけない。そこで、

$$\frac{2W'}{rW^2} + \frac{2}{r^2}\left(1-\frac{1}{W}\right) = 6K, \qquad (K \text{ は定数}) \quad (25)$$

を要請すると、$W(r)$ は次の形に定まる。

$$W(r) = \frac{1}{1-Kr^2}\,. \quad (26)$$

一方で、宇宙を満たす（一様等方な）物質として完全流体を仮定すると、エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}\,, \quad (27)$$

であるため、計量と合わせて Einstein 方程式に代入する：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (28)$$

ここで、Λ は宇宙項と呼ばれ、Einstein が自ら手で導入した有名な項である。

（宇宙項について）
これは宇宙が内部の物質により動的な振る舞いをすることを（宇宙は静的であるべきという先入観から）回避するために導入されたものとされている。しかし、その後宇宙は動的であることが観測からわかり、Einstein は「宇宙項の導入は人生最大の失敗」と言ったというエピソードは有名である。しかし、さらにその後の「宇宙の加速膨張」の発見によって、宇宙項は宇宙内部のエネルギーのおよそ 7 割を担うダークエネルギーの近似的なモデルとして見直されている。

その結果得られる独立な方程式は 2 つ ([00] 成分と $[ij]$ 成分) であり、

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (29)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (30)$$

(29) は宇宙のダイナミクスを記述するいわばエネルギー保存則の式に相当する。(30) は宇宙の運動方程式を表している。特に、(29) 式はフリードマン方程式と呼ばれている。

これらを解くことで、$a(t)$ の解を得ることができ、その計量を Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) 計量と呼ぶ。例えば、現在の宇宙の加速膨張は、宇宙の大半がダークエネルギーで占められていることによって生じているが、それは宇宙項が優勢である宇宙として理解できる。そこで、(29) および (30) の右辺に宇宙項 Λ だけを残して解いた $a(t)$ は指数関数で与えられることがわかる。これを、de Sitter(ド・ジッター解) という。