

現代物理学 III 9. Einstein 方程式 II

1 Riemann テンソルの性質

Riemann テンソルの表式は次のとおりである。(レジュメ「4. 微分幾何学」の資料にある Riemann テンソルの添字の並びと異なる定義のため、注意すること.)

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\gamma}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}. \quad (1)$$

この Riemann テンソルは次のような対称性を持つ。

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = -R_{\alpha\gamma\beta}^{\mu}, \quad (2)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} + R_{\beta\gamma\alpha}^{\mu} + R_{\gamma\alpha\beta}^{\mu} = 0, \quad (3)$$

(3) 式は第一 Bianchi 恒等式という。さらに、 $R_{\mu\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta\gamma}^{\nu}$ として、

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma}. \quad (4)$$

(4) については次のようにして証明できる。スカラー量 $S = g_{\rho\sigma}V^{\rho}W^{\sigma}$ に対し、次を計算するとゼロになる。¹

$$(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})S = 0, \quad (5)$$

$\nabla_{\mu}g_{\rho\sigma} = 0$ であることを用いてこの式を整理すれば、(4) を示すことができる。

添字をすべて下げた Riemann テンソルは、さらに次の対称性を持つ。(証明は付録参照.)

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\alpha}. \quad (6)$$

これは、ペア (μ, α) と (β, γ) の入れ替えに対する対称性である。

したがって、 $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ は

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma}, \quad (7)$$

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\mu\alpha\gamma\beta}, \quad (8)$$

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\alpha} \quad (9)$$

を満たす。

以上を用いると、次のようにして、Riemann テンソルの自由度は合計で 20 であることを示すことができる。Riemann テンソルはペア交換対称性があることから、実質的に 6×6 の対称行列と同じ自由度 21 があるように見える。これに対して、さらに、

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (10)$$

があり、これが他の恒等式と独立なものであるためには全ての添字が異なる必要があるため、 ${}_4C_4 = 1$ だけ 21 から引けば全自由度となる。つまり、 $21 - 1 = 20$ だけ Riemann テンソルには自由度がある。

¹ スカラー量に対しては共変微分はただの偏微分になることに注意。

2 Bianchi 恒等式

2.1 式 (3) の証明

局所慣性座標系を用いることで容易に示すことができる。ある点 p において局所慣性座標系を取ると、

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0 \quad (11)$$

となるため、Riemann テンソルは

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (12)$$

と書ける。

したがって、

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} + R_{\beta\gamma\alpha}^{\mu} + R_{\gamma\alpha\beta}^{\mu} &= (\partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}) + (\partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} - \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}) \\ &\quad + (\partial_{\alpha}\Gamma_{\gamma\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu}). \end{aligned} \quad (13)$$

ここで Levi-Civita 接続の対称性

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (14)$$

を用いると、各項は互いに打ち消し合う。したがって、

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} + R_{\beta\gamma\alpha}^{\mu} + R_{\gamma\alpha\beta}^{\mu} = 0 \quad (15)$$

が得られる。この式はテンソル方程式であるため、任意の座標系で成り立つ。

2.2 Bianchi 恒等式の導入と証明

以下、簡単のため $R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} \equiv \nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu}$ とする。Riemann テンソルの共変微分について、次の恒等式が成り立つ。

$$R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} + R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\mu} + R_{\alpha\lambda\beta;\gamma}^{\mu} = 0. \quad (16)$$

これを第二 Bianchi 恒等式という。

この恒等式は、添字 λ, β, γ について循環和を取った形で書かれている。すなわち、

$$R_{\alpha[\beta\gamma;\lambda]}^{\mu} = 0 \quad (17)$$

とも書ける。

証明のために、ある点 p において局所慣性座標系を取る。この座標系では点 p において

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0 \quad (18)$$

となる。したがって、点 p では共変微分は通常の偏微分に等しい。よって

$$R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} = \partial_{\lambda}R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} \quad (19)$$

である。

また、点 p において Riemann テンソルは

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (20)$$

と書ける。したがって、

$$R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} = \partial_{\lambda}\partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} - \partial_{\lambda}\partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}, \quad (21)$$

$$R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\mu} = \partial_{\beta}\partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} - \partial_{\beta}\partial_{\lambda}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}, \quad (22)$$

$$R_{\alpha\lambda\beta;\gamma}^{\mu} = \partial_{\gamma}\partial_{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\gamma}\partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}. \quad (23)$$

これらを足し合わせると、

$$\begin{aligned} & R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} + R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\mu} + R_{\alpha\lambda\beta;\gamma}^{\mu} \\ &= \partial_{\lambda}\partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} - \partial_{\lambda}\partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \partial_{\beta}\partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} \\ & \quad - \partial_{\beta}\partial_{\lambda}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} + \partial_{\gamma}\partial_{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \partial_{\gamma}\partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

最後の等号では、偏微分が交換することを用いた。

したがって、点 p において

$$R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} + R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\mu} + R_{\alpha\lambda\beta;\gamma}^{\mu} = 0 \quad (25)$$

が成り立つ。

この式はテンソル方程式なので、ある座標系の一点で成り立てば任意の座標系でも成り立つ。よって、

$$R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} + R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\mu} + R_{\alpha\lambda\beta;\gamma}^{\mu} = 0 \quad (26)$$

が示された。

3 Einstein テンソルの発散

Bianchi 恒等式

$$R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\mu} + R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\mu} + R_{\alpha\lambda\beta;\gamma}^{\mu} = 0 \quad (27)$$

から、Einstein テンソルの発散が恒等的にゼロとなることを示そう。

まず、式 (27) において上付き添字 μ と添字 β を縮約すると、

$$R_{\alpha\beta\gamma;\lambda}^{\beta} + R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\beta} + R_{\alpha\lambda\beta;\gamma}^{\beta} = 0 \quad (28)$$

を得る。

ここで、

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\beta} = R_{\alpha\gamma}, \quad R_{\alpha\lambda\beta}^{\beta} = -R_{\alpha\lambda} \quad (29)$$

であることを用いると、

$$R_{\alpha\gamma;\lambda} + R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\beta} - R_{\alpha\lambda;\gamma} = 0 \quad (30)$$

となる。

次に、この式に計量 $g^{\alpha\lambda}$ を掛けてさらに縮約する。計量の共変微分はゼロであるため、

$$g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\gamma;\lambda} = R^{\lambda}_{\gamma;\lambda}, \quad (31)$$

$$g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\lambda;\gamma} = R_{;\gamma}, \quad (32)$$

となる。

また、Riemann テンソルの反対称性

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\mu\alpha\gamma\beta} \quad (33)$$

より、

$$g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\gamma\lambda;\beta}^{\beta} = R^{\lambda}_{\gamma;\lambda} \quad (34)$$

である。

したがって、式 (30) は

$$2R^{\lambda}_{\gamma;\lambda} - R_{;\gamma} = 0 \quad (35)$$

となる。すなわち、

$$R^{\lambda}_{\gamma;\lambda} = \frac{1}{2}R_{;\gamma} \quad (36)$$

を得る。これを次のように書き換えておこう。 $g^{\gamma\nu}$ を両辺に作用させて、

$$R^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{1}{2}R^{;\nu}. \quad (37)$$

ここで、Einstein テンソル

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (38)$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}_{;\mu} &= R^{\mu\nu}_{;\mu} - \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}R)_{;\mu} \\ &= R^{\mu\nu}_{;\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{;\mu} \\ &= R^{\mu\nu}_{;\mu} - \frac{1}{2}R^{;\nu} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、(37) を用いた。

したがって、

$$G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (40)$$

が示された。

この関係式のこと（元々は (16) 式が出发点であるから）Bianchi 恒等式という。すなわちエネルギー・運動量保存則とも一貫性があることがわかる。したがって、Einstein 方程式は、Bianchi 恒等式を満たす幾何学的テンソル量と物質のエネルギーや運動量を表し、保存則を満たすエネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \quad (41)$$

が比例関係にあるという形で記述されることがわかる。

Einstein 方程式（重力場の方程式）

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (42)$$

4 非相対論的極限と Poisson 方程式

Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (43)$$

が、非相対論的極限で Newton 重力の Poisson 方程式を再現することを確認する。

まず、式 (43) の両辺を縮約する。

$$G^\mu{}_\mu = R - \frac{1}{2}g^\mu{}_\mu R = R - 2R = -R \quad (44)$$

であるから、

$$-R = \frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (45)$$

すなわち

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T \quad (46)$$

を得る。

非相対論的極限では、

$$T_{00} \simeq \rho c^2, \quad T_{ij} \ll T_{00}, \quad (47)$$

であり、したがって

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \simeq g^{00}T_{00} \simeq -\rho c^2 \quad (48)$$

となる。よって式 (46) より

$$R \simeq \frac{8\pi G}{c^2}\rho \quad (49)$$

が得られる。

次に、Einstein 方程式の 00 成分

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \quad (50)$$

を考える。

弱重力場では

$$g_{00} \simeq -1, \quad (51)$$

と近似できるため、

$$R_{00} + \frac{1}{2}R \simeq \frac{8\pi G}{c^2}\rho. \quad (52)$$

さらに式 (49) を代入すると、

$$R_{00} \simeq \frac{4\pi G}{c^2}\rho \quad (53)$$

となる。

以下では、弱重力・静的近似を用いる。この時

$$g^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (54)$$

で、 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ であるため、以下では $h_{\mu\nu}$ の一次までを考慮する近似を行う。このとき Ricci テンソルは

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \mathcal{O}(\Gamma^2) \simeq \partial_i \Gamma_{00}^i \quad (55)$$

となる。ここで、Christoffel 記号の定義

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{i\alpha}(\partial_0 g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{0\alpha} - \partial_\alpha g_{00}) \quad (56)$$

を用いる。

ここで、静的近似では、

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}g^{i\alpha}\partial_\alpha g_{00} \quad (57)$$

となる。

さらに、 h の一次までを考慮する近似で

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_j g_{00} \quad (58)$$

と書ける。

したがって、

$$R_{00} \simeq \partial_i \Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2}\partial_i (g^{ij}\partial_j g_{00}). \quad (59)$$

弱重力場では

$$g^{ij} \simeq \delta^{ij} \quad (60)$$

と近似できるので、

$$\partial_i \Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j g_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}. \quad (61)$$

最後に、

$$g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \quad (62)$$

を代入すると、

$$\partial_i \Gamma_{00}^i \simeq \frac{1}{c^2}\nabla^2 \phi \quad (63)$$

を得る。

これを式 (53) と比較すると、

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2 \phi = \frac{4\pi G}{c^2}\rho \quad (64)$$

より、

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho} \quad (65)$$

を得る。

これは Newton 重力における Poisson 方程式である。したがって、Einstein 方程式は弱重力・非相対論的極限において Newton 重力を正しく再現する。

5 付録: Riemann テンソルの添字ペア交換対称性の証明

ここでは記法を簡単にするため、

$$R_{abcd} \equiv R_{\mu\alpha\beta\gamma} \quad (66)$$

のように書く。示したいのは

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (67)$$

である。

式 (3) より

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adb c} = 0 \quad (68)$$

である。したがって

$$R_{abcd} = -R_{acdb} - R_{adb c} \quad (69)$$

となる。

一方で、 R_{cdab} に対して式 (3) を用いると、

$$R_{cdab} + R_{cabd} + R_{cbda} = 0 \quad (70)$$

であるから、

$$R_{cdab} = -R_{cabd} - R_{cbda} \quad (71)$$

となる。ここで反対称性を用いると、

$$R_{cabd} = -R_{acbd} = R_{acdb} \quad (72)$$

および

$$R_{cbda} = -R_{bcd a} = R_{bcd a} \quad (73)$$

である。したがって

$$R_{cdab} = -R_{acdb} - R_{bcd a} \quad (74)$$

を得る。

式 (69) と式 (74) を引き算すると、

$$R_{abcd} - R_{cdab} = -R_{adb c} + R_{bcd a} \quad (75)$$

となる。

次に、 R_{bcad} に式 (3) を用いる。

$$R_{bcad} + R_{badc} + R_{bdca} = 0 \quad (76)$$

より、

$$R_{bcad} = -R_{badc} - R_{bdca} \quad (77)$$

である。反対称性を用いると、

$$R_{badc} = -R_{abdc} = R_{abcd} \quad (78)$$

および

$$R_{bdca} = -R_{bdac} \quad (79)$$

なので、

$$R_{bcad} = -R_{abcd} + R_{bdac} \quad (80)$$

となる。

さらに、 R_{dabc} に式 (3) を用いると、

$$R_{dabc} + R_{dbca} + R_{dcab} = 0 \quad (81)$$

である。反対称性より

$$R_{dabc} = -R_{adb c}, \quad R_{dbca} = R_{bdac}, \quad R_{dcab} = -R_{cdab} \quad (82)$$

なので、

$$-R_{adb c} + R_{bdac} - R_{cdab} = 0 \quad (83)$$

となる。したがって

$$R_{bdac} = R_{adb c} + R_{cdab} \quad (84)$$

である。

式 (84) を式 (80) に代入すると、

$$R_{bcad} = -R_{abcd} + R_{adb c} + R_{cdab} \quad (85)$$

となる。これを式 (75) に代入すると、

$$\begin{aligned} R_{abcd} - R_{cdab} &= -R_{adb c} + (-R_{abcd} + R_{adb c} + R_{cdab}) \\ &= -R_{abcd} + R_{cdab} \\ &= -(R_{abcd} - R_{cdab}). \end{aligned} \quad (86)$$

したがって

$$R_{abcd} - R_{cdab} = 0 \quad (87)$$

であり、

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (88)$$

が示された。

元の添字に戻すと、

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\alpha} \quad (89)$$

である。