

現代物理学 III 0. 特殊相対論の復習

この講義の主題である一般相対論は、重力を扱えるように特殊相対論を拡張した理論である。したがって、特殊相対論を理解していなければ、一般相対論を理解することはできない。初回の授業では、特殊相対論の概要を学び、その内容を再学習していく。

1 ニュートン力学と慣性系

物理学の出発点と言っても過言ではない「ニュートン力学」から出発して考えていこう。ニュートン力学は次の3つの法則から構成される。

- **第1法則**：力を受けていない物体は、静止あるいは等速直線運動をする。
- **第2法則**：物体の加速度は、その物体に作用する力 $\mathbf{f}$ に比例し、その質量 m に反比例する。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}. \quad (1)$$

- **第3法則**：2つの質点が互いに及ぼし合う力は大きさが等しく、かつ、向きは反対である。

さて、一見するとこの第1法則は第2法則に含まれているように思える。第2法則で $\mathbf{f} = 0$ として運動方程式を解けば第1法則に帰着するからだ。だが、この第1法則は、第2法則の基盤となる重要な仮定を提示している。そもそも、力を受けていない物体であっても、観測者が加速度運動していれば、その物体は「相対的に」加速度運動しているように見えるだろう。一方で、力を受けている物体であっても、その物体と同じように動く観測者にとってはその物体は「相対的には」運動していないように見える。しかし、第1法則が真に主張していることは「**力を受けていない全ての物体が、等速直線運動あるいは静止しているように見える座標系が存在する**」ということである。このような理想的な座標系を「**慣性系**」という。ニュートンの第2法則が成立するような座標系を慣性系と呼ぶ、と言っても良いだろう。

公転・自転運動（つまり加速度運動）する地球上は、慣性系ではないことは明らかである。それでも宇宙空間まで視野を広げれば、そのような（理想的な）慣性系が存在するだろうという仮定が、第一法則で暗になされているのだ。

一つの慣性系 $(t, \mathbf{x})$ が見つかったとしよう。そうすると、その慣性系に対して等速度運動（速度 $\mathbf{v}$ ）する別の座標系 $(t', \mathbf{x}')$

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \end{aligned} \quad (2)$$

も慣性系であることがわかる。なぜならば、ニュートンの第2法則から、

$$\frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \quad (3)$$

となるので、

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{f}, \quad (4)$$

というように、座標系 $(t', \mathbf{x}')$ でも同様にニュートンの第2法則が成立する。¹このような座標変換を「ガリレイ変換」という。ある慣性系が見つければ、それとガリレイ変換で結びつくあらゆる座標系もまた慣性系であり、このことから、慣性系は存在するなら、無数に存在することになる。

2 マクスウェル方程式とローレンツ変換

ニュートン力学はガリレイ変換に対して不変である、ということが前節から理解できるだろう。しかし、力学だけでなく、電磁気学もまた、物理学において重要な要素である。そこで自然と問いたくなるのは、「**電磁気学もまた、ガリレイ変換に対して不変であるのか？**」あるいはもっと砕いて言うならば「**静止している人（慣性系）とその人に対して等速度で運動している人、両者にとって電磁気学の法則は同様に成立するのか？**」ということである。

電磁気学の法則は、マクスウェル方程式（4つの方程式）に集約される。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (8)$$

これらの方程式から、電磁波（光）の真空中における波動方程式を得ることができる。

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} =: \square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0. \quad (9)$$

ここで、 $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ はラプラシアンであり、 $\square$ はダランベルシアンである。電磁

¹ ここでは、座標系 $(t', \mathbf{x}')$ でも質量や物体に作用する力は変わらないと仮定している。これは相対性理論による効果を見逃した議論であることに注意してほしい。

波がたとえば x 方向のみに伝搬する場合の一般解は次の通りである。

$$E_x = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (10)$$

E_x は $\mathbf{E}$ の x 成分であり、 f と g は任意の微分可能な関数である。

問 1 (10) が (9) の解になっていることを示しなさい。

この波動方程式が、ガリレイ変換に対してどのように変換されるかを見てみよう。つまり、 S 系の座標 (t, x, y, z) から x 方向に速度 v で運動する S' 系の座標 (t', x', y', z') へ座標変換した場合に、電磁波の波動方程式がどう変換されるかを確かめる。

(2) を用いると、偏微分の変換則を以下のように得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (12)$$

これを用いれば、ダランベルシアンの変換則は以下の通りになることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \left(v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

最後の項は一般にゼロにはならない。つまり、ダランベルシアンあるいは波動方程式自体はガリレイ変換に対して、不変にはならない。一方で、解はガリレイ変換に対して次のように変換する。

$$E_x \rightarrow E'_x = f(x' - (c-v)t') + g(x' + (c+v)t') \quad (14)$$

つまり、ガリレイ変換を施した後でも、マクスウェルの電磁気学が成立するのであれば、光の伝播速度が観測者の運動によって変化して見えることを意味する。

ところが（驚くべきことに）マイケルソンとモーリーの実験によって、光の速度は観測者によって変わることはないことが確認されている。つまり、ある観測者にとっての光の速度とその観測者に対して速度 $\mathbf{v}$ で運動している観測者が測る光の速度は（直感と反するが）同じであるべき、というのが実験事実なのである。したがって、光の速度は観測者によって変わらない、ということを勘案すれば、電磁波の伝播をガリレイ変換で扱うのは適切ではないことがわかる。これは、ニュートン力学と大きく異なる点である。

3 ローレンツ変換

では、異なる速度で運動する観測者がみる電磁波を実験通りに（光の速度が変化しないように）記述するには、どのような座標変換を施すべきだったのだろうか？

これを調べるべく、次のような座標変換 $(t, x) \rightarrow (t', x')$ を仮定しよう。

$$t' = At + Bx, \quad x' = D(x - vt), \quad (15)$$

ここで A, B, D は今のところは未知の係数であり、系によらず光速が変化しないように、これらの係数を決めることになる。ここで、ニュートン力学の場合 ($t' = t$) と異なり、系によって時間の流れが異なることも、この仮定に含まれることに注意してほしい。

問 2 この場合、次のように偏微分が変換されることを示しなさい。

$$\frac{\partial}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial x'} + B \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -Dv \frac{\partial}{\partial x'} + A \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (17)$$

これより、ダランベルシアンは次のように変換される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= D^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ &\quad + 2D \left(B + \frac{v}{c^2} A \right) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \\ &\quad + \left(B^2 - \frac{A^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

これが S' 系でのダランベルシアンと一致するためには係数 A, B, D が次のように固定される必要があることが示せる (t と t' および x と x' の向きが揃うように、符号を選ぶ必要があることに注意)。

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (19)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (20)$$

$$B = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (21)$$

つまり、 S' 系の座標と S 系の座標は次の変換で結ばれることになる。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (22)$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (23)$$

このように、等速度運動する別の系から見ても光速 c を保つような座標変換をローレンツ変換という。こ

ここで、

$$\beta := \frac{v}{c}, \quad (24)$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (25)$$

として、行列表記を使えば、ローレンツ変換は次のように書くこともできる。

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (26)$$

4 光速とマイケルソン-モーリーの実験

そもそも、光速が有限である可能性を検討し、その速度を測ることを初めて試みたのは、ガリレイであったとされている。数々のユニークなアイデアが提案されてきたものの、今知られている光速に近い値が測定されたのは、1676 年のレーマーの検証によるものである。木星の衛星であるイオ（公転周期 1.76 日）が地球から見て木星の背後に隠れる周期が、季節に応じてわずかに異なることが知られていた。レーマーは、(i) 地球が太陽の周りを公転しているため、木星と地球間の距離が時々刻々と変わっていること、(ii) 光の速度が有限であるという仮説の 2 つから説明できるとした。そしてこの仮説に基づいて算出された光の速度が、 $2.14 \times 10^8 \text{ m/s}$ であった。現在知られている光速 ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$) と 30% ほどずれてはいるものの、初期は光の速度が無限大と考えられていたこと、当時の技術でおおよそ近い値にまで迫っていたことを考えれば、極めて意義深い出来事である。

レーマー以外にも異なる実験によって、光は有限の速度で伝播することが明らかになった。水面の表面波が水を媒質として、音が空気を媒質として伝わるならば、光が伝播する媒質も存在すると考えるのは自然である。光が伝播する仮説上の媒質は「エーテル」と呼ばれていた。このエーテルが実在するかどうかは、実験によって実証されなければならない。もし存在すれば、観測者がエーテルに対してどのように（相対的に）運動しているかに依って、光の速度は変わることになる。つまり、ガリレイ変換で光の伝搬の現象は不変になることになる。これを検証するべくアレンジされた実験が、マイケルソン-モーリーの実験である。この模式図を図 1 に示している。

この実験では、光源 S から光が発射し、ビームスプリッター B に到達すると、鏡 M1 と鏡 M2 に向かう光に分けられる。それらの鏡で光が反射すると、再び光は B に集まり、最後にスクリーンで干渉する。この際に生じる干渉縞は、光路差と光の波長の比で定まる。まずは、各々の光路差を計算してみよう。ここでは、具体的に計算できるようにするため、エーテルが M1 から B に向かって速さ v で運動しているとしよう。光が B から M1 に進む場合の速度は

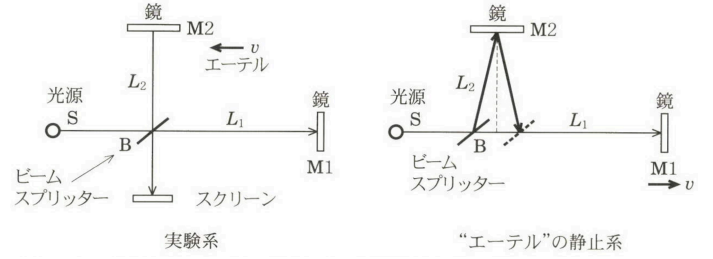


図 1. マイケルソン-モーリーの実験の模式図。「一般相対論入門」須藤靖 著 p.9 より引用。

$c - v$ で、M1 から B に進む場合は $c + v$ となる。したがって、B と M1 を往復するのに要する時間 $t_{\parallel 1}$ は、次のように計算できる。

$$t_{\parallel 1} = \frac{L_1}{c - v} + \frac{L_1}{c + v} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (27)$$

一方で、B と M2 を往復するのに要する時間 $t_{\perp 2}$ は、次の式を満たすことになる。

$$ct_{\perp 2} = 2\sqrt{L_2^2 + \left(v \frac{t_{\perp 2}}{2}\right)^2}. \quad (28)$$

これを解くことで、以下を得る。

$$t_{\perp 2} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (29)$$

これらから、以下の場合には光が強め合うことがわかる。

$$\begin{aligned} \Delta_0 &:= c(t_{\parallel 1} - t_{\perp 2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{L_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - L_2 \right) = \pm n\lambda, \end{aligned} \quad (30)$$

ここで n は整数である。この強め合いによってスクリーン上では干渉縞を観測することになる。

今、 L_1 と L_2 を調整して、光の干渉縞がスクリーン上に生じるように調整したとしよう。それから、この装置全体を回転させれば、装置に対するエーテルの速度も変わることになるため、当然ながら光が干渉により強め合う（あるいは弱め合う）条件も変わってくるだろう。したがって、干渉縞の位置がズレることになる。例えば、90 度回転させた場合には、上の条件式で L_1 と L_2 が入れ替わり、光路差も一般に異なる。

$$\Delta_{90} := c(t_{\perp 1} - t_{\parallel 2}) = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(L_1 - \frac{L_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (31)$$

この光路差の差分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Delta_0 - \Delta_{90} &= 2(L_1 + L_2) \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ &\simeq (L_1 + L_2)\beta^2.\end{aligned}\quad (32)$$

ここで、 $\beta \ll 1$ であることを仮定した。装置を90度だけ回転させれば、干渉縞の位置がこの差分に相当する分だけズレることになる。

マイケルソンとモーリーらが行った実験では、地球がエーテルに対して $v = 30 \text{ km/s}$ で運動²しているとした場合に生じ得る干渉縞の変化を捉えることができなかった。

これらのことから、i) 地球はエーテルに対してほぼ静止している、あるいは ii) エーテルはそもそも存在しない、以上、2つの可能性を考えることができる。i) のパターンをこの実験で棄却することはできないだろうが、地球が太陽の周りを公転し、その太陽は、銀河系に対してさらに大きな速さで運動していることを鑑みれば、無理のある結論となる。そこで、もっともらしい結論は ii) の「エーテルは存在しない」だろう。これは言い換えれば、光速はどの系でも変化しないということである。これは「**光速度不変の原理**」として特殊相対性理論の根幹をなす原理である。以下では特に断らない限りは光速 $c = 1$ として扱う。この操作は、単に単位系の取り方を変えただけに対応しており、自然単位系と呼ぶ。

5 Minkowski 時空

光速度不変の原理を認め、マクスウェル電磁気学を含むあらゆる物理法則がローレンツ変換で不変であると考えてみる。物理学は、あらゆる現象が数少ない最小限の理論で、ミニマルに説明できるという信念のもと発展してきた。この信念に基けば、物理法則はすべて1つの座標変換で不変になっている方がミニマルである。そのような座標変換こそがガリレイ変換ではなく、ローレンツ変換であったとすれば、ニュートン力学は修正を余儀なくされる。ニュートン力学がガリレイ変換に対して不変であるように見えたのは、対象とする運動の速度が光速よりも十分に小さいことが原因であったと考えられる。

問3 ローレンツ変換 (22) および (23) が、 $v/c \rightarrow 0$ の極限では、ガリレイ変換に帰着することを確認しなさい。

² 地球は太陽の周りをおよそ 30 km/s で公転している。そして、太陽は銀河系に対しておよそ 220 km/s で運動している。このことから、もしエーテルが存在しているならば、地上の干渉計のエーテルに対する速度はこれらの値と同程度と考えるのは不自然ではないだろう。

ニュートン力学がどのようにローレンツ変換に対して不変になるように修正されるかを議論するための準備として、時間と空間を1つの入れ物として捉える「時空」という概念を導入しよう。後に議論するように時空にも様々なものがあり、一般には「歪み」を伴う。しかしここでは、歪みを持たない時空である Minkowski 時空について考える。特殊相対論が対象とする時空は Minkowski 時空に限られる。

何か座標を導入する際、基本的には x, y, z の3つの空間座標（デカルト座標）を想定することが多いだろう。しかし、時空間を張る座標はそれに加えて時間座標を導入し、4つの座標軸を持つ座標系を指す。そして、座標は多くの場合上付き添え字を導入し

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \quad (33)$$

として表記することが多い。時間座標は

$$x^0 = t \quad (34)$$

として表記する。これをギリシャ文字の添え字で x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と表記することもある。このノートでは、添え字がギリシャ文字の場合は時間と空間合わせた4つの添え字を代表する。一方で、 x^i などとラテン文字で添え字を表記した際は、($i = 1, 2, 3$) というように空間座標のみを限定して指すものとする。

後に改めて詳しく説明する通り、相対性理論は一言で言うならば「時空間のダイナミクス」を論じる学問である。そして相対論によれば、時間と空間が独立に伸び縮みするのではなく、互いに影響を及ぼし合いながら複雑に伸縮するのである。相対速度の異なる系 S と S' 系の間でのローレンツ変換を考えると、 S' 系の時刻 t' は S 系の時間だけでなく S 系の位置によっても変わることを示している [(23) 式を参照]。このように、ローレンツ変換からも、時間と空間というのは切っても切れない関係にあることがわかるだろう。Minkowski 時空を導入することで、ローレンツ変換は時空間の伸縮と捉えることができる。それについて復習しよう。

(i) **固有距離の不変性**: ガリレイ変換では、時間や距離は、座標変換によって不変であった。しかし、ローレンツ変換では、それらは不変にはならない。静止系の人には、動く物体は進行方向に縮み（ローレンツ収縮）、動く時計の針はゆっくり進むように見える。

レポート課題 式 (22) と (23) を用いて、ローレンツ収縮と時間の進みのずれの導出について A4 1枚以内でまとめて、次の授業までに Classroom に提出すること。

それでも、見かけによらない「ものが固有に持つ長さ（固有長さ）」や、「ある事象が時間をかけて生じた場合の、その現象に固有の時間幅（固有時間）」

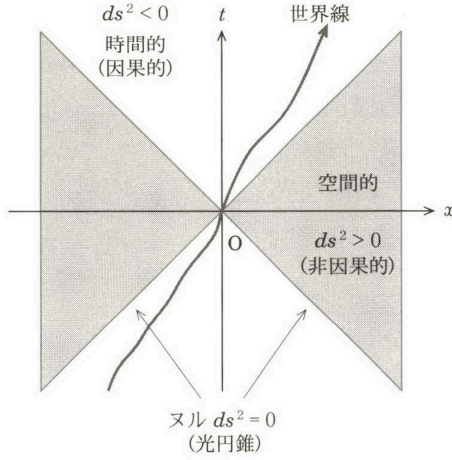


図 2. 光円錐の模式図. 「一般相対論入門」須藤靖 著 p.14 より引用.

などは、座標変換によらず不変なものであるべきだろう。実際に、Minkowski 時空において定義された「時空間における（見かけによらない）距離」は座標変換で不変であることを意味する。

Minkowski 空間における隣接する 2 点間の微小距離 ds は次で与えられる。

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (35)$$

これにローレンツ変換を行うと、

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -(dx'^0)^2 + (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 \\ &= -(\gamma dx^0 - \beta \gamma dx^1)^2 + (-\beta \gamma dx^0 + \gamma dx^1)^2 \\ &\quad + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \\ &= ds^2 \end{aligned} \quad (36)$$

となり、確かに $ds'^2 = ds^2$ を示すことができる。

これに基づき、固有時間は次のように定義される。

$$d\tau := \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - dr^2} = dt/\gamma, \quad (37)$$

ここで $dr := \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}$ とした。

(ii) **光円錐と因果律:** ds^2 は時空間における距離 ds の 2 乗であるから、それらは常に正であるべき、と思うだろう。しかし式 (35) をよく見ると、負の符号を含む項があるため ds^2 は負にもなり得ることに気づく。 ds^2 の符号にはどういう意味があるのかを考えてみよう。光の速度を 1 に規格化した事を思い出すと、光の軌跡上で離れた 2 点の距離は $\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}/dt = c = 1$ を用いると $ds^2 = 0$ であることがわかる。縦軸を時間、これに直交した軸を位置とした場合に、光の軌跡は時間軸から 45 度の傾斜を持つ面（円錐）として定義でき

る（図 2）。これを光円錐 (light cone) あるいはヌル (null) という。この光円錐の内側 ($ds^2 < 0$) には、光速より遅い速度でアクセスできるが、これより外側の領域 ($ds^2 > 0$) には、光速をもってしてもアクセスすることのできない、いわば「因果的に隔離された領域」である。したがって、質量を持つあらゆる物体は、（重力を無視した場合には）Minkowski 時空の光円錐の中を動くことになり、その軌道はどの接線も 45 度未満になる 1 つの線として記述できる。この軌跡を世界線という。

6 相対論的力学

ニュートン力学では、空間と時間は別物として、対等な扱いをしていない。しかし、相対性理論では 2 つで 1 つの時空間をなすため、対等な扱いをするべきだろう。そこで以下のような置き換え（空間 3 次元を尊重していた式や物理量に時間を含ませて再定式化することを「4 元化」という）を考えてみる。

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \rightarrow u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (38)$$

$$p^i = m_0 v^i \rightarrow P^\mu := m_0 u^\mu, \quad (39)$$

$$\frac{dp^i}{dt} = f^i \rightarrow \frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu, \quad (40)$$

ここで F^μ は 4 元化された力だが、これは考える相互作用に依存して決まる。実はこのようにして得られた方程式系でニュートン力学の拡張が完了する。ここで固有時間 τ に関する微分を採用しているのは、4 元速度 u^μ が座標 dx^μ と同じ変換性（つまりベクトルと同じ変換性）を持つようにするためである。なぜこの変換性を気にするのかは、一般相対論の講義において改めて説明するが、相対性理論で主張することは、あらゆる物理量は座標変換に対して「共変性」を持つということである。つまり、ある面に張り付いた微小な矢印 (e.g. dx^μ など) は、その面を張る座標が変わると、その変化に応じて異なる成分を持つことになる。 dx^μ だけでなく、向きなどを持つあらゆる物理量もこれと同様に、座標変換に伴って適切に変換されなければならない、というのが相対論が要求する「共変性」である。

ここで、相対論的力学とニュートン力学の違いを見るために、質量について再考してみよう。4 元運動量の空間成分 P^i を見てみると、

$$P^i = m_0 u^i = m_0 \frac{dx^i}{d\tau} = m_0 \gamma \frac{dx^i}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \times v^i, \quad (41)$$

となることがわかる。この量をニュートン力学の運動量 $p^i = mv^i$ と対応させるならば、この質点の質量は

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (42)$$

と読むことができる。 $\beta = v/c$ である事を思い出してもらおうと、これが意味するのは、見かけの質量 $m = m(v)$ は速度が光速に近づくにつれて重くなる事を意味する。特に速度ゼロの時の質量 m_0 は静止質量と呼ぶ。

さらに、エネルギー E は、4元運動量の第ゼロ成分と光速をかけた値 cp^0 で与えられる。³ 今、 c をあらわに書いているので $dx^0 = cdt$ であることに注意すると、

$$E = cp^0 = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2, \quad (43)$$

となる。これは、質量を持つ物体が光速に限りなく近づくためには、無限大のエネルギーを要する事を意味する。これをニュートン力学に帰着させる極限 $\beta \ll 1$ を仮定して、テイラー展開すると、

$$E \simeq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad (44)$$

となることがわかる。第1項は静止質量に起因するエネルギー、第2項は運動エネルギーに他ならない。

³ ここでは復習として、天下りの的にエネルギーを導入したが、詳しい議論は、例えば「相対性理論（江沢洋 著）」の3.2章を参照するのが良い。