

初修物理 (情報学科)

理工学部 理学科 近藤

Kondo@phys.kindai.ac.jp

<http://www.phys.kindai.ac.jp/kondo>

1日目 (4/12)

はじめに

物理学は自然現象の観察から発生した学問です。しかしながら、単なる自然現象の観察にとどまらずに、その背後にある法則性を見つけようとしています。この講義では、物体に働く力に関する法則や物体の運動に関連する法則を見出していきます。そして、この講義の目的は物理学を通して考える訓練をすることです。

注意

- 講義ノートを公開します。

<http://www.phys.kindai.ac.jp/kondo/lectures.html>

- 出席、授業態度について

- 毎回出席を取ります。
- 15分以上の遅刻は欠席とみなします。(遅刻2回で欠席1回)
- 毎回、講義の終わりに練習問題を行います。この提出がなければ、早退したとみなします。注意してください。(遅刻と同じ扱い)
- 授業態度が悪い場合は欠席扱いにします。

- 4コマ目と5コマ目の間に休憩を入れます。

0：物理量の記述

0.1：単位

- 物理量とは

- 物理学で取り扱う「質量」、「時間」、「速度」などの量のことです

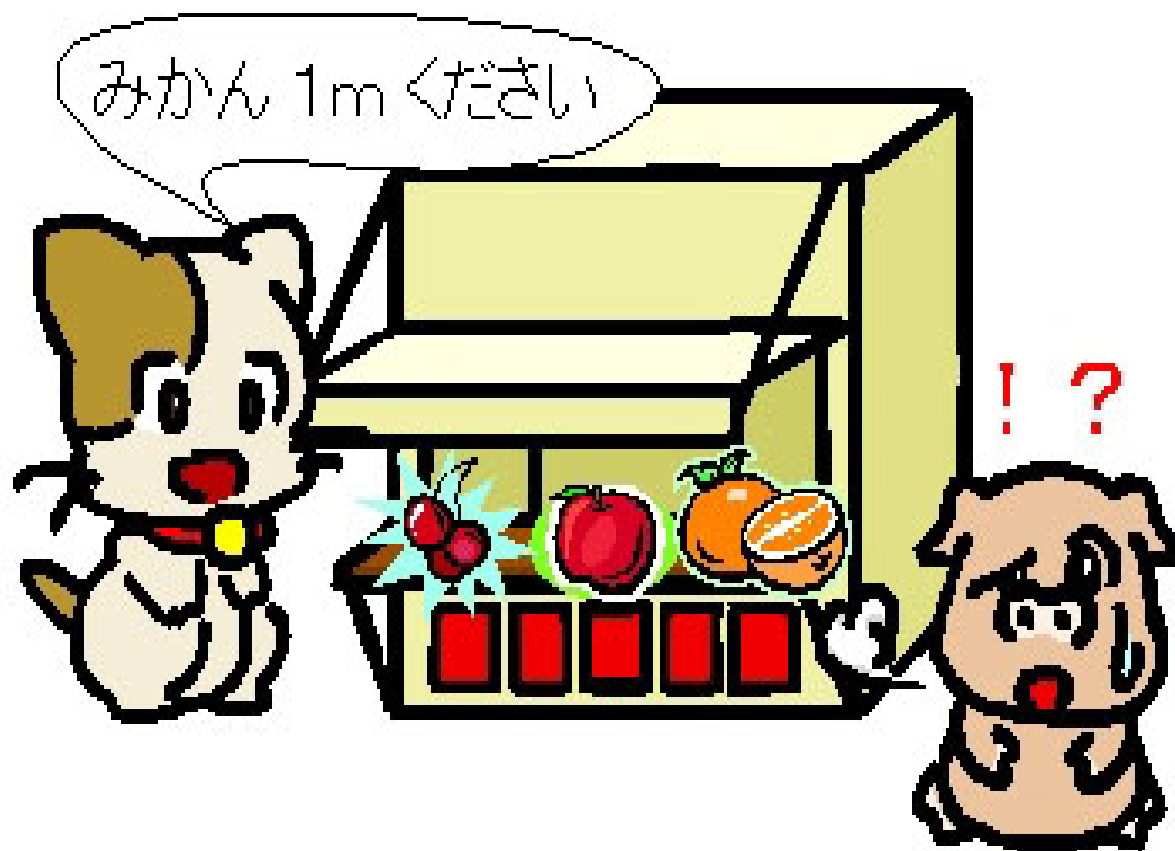
- 物理量では単位が大切

- どのような「物理量」を扱っているかを明確にするために付け加える「言葉」

- 物理量の比較

- 単位の助けを借りよう。比較は同じ単位を使う物理量の間で

0. 11: 果物屋にて



0. 12 : 国際単位系 (SI単位系)

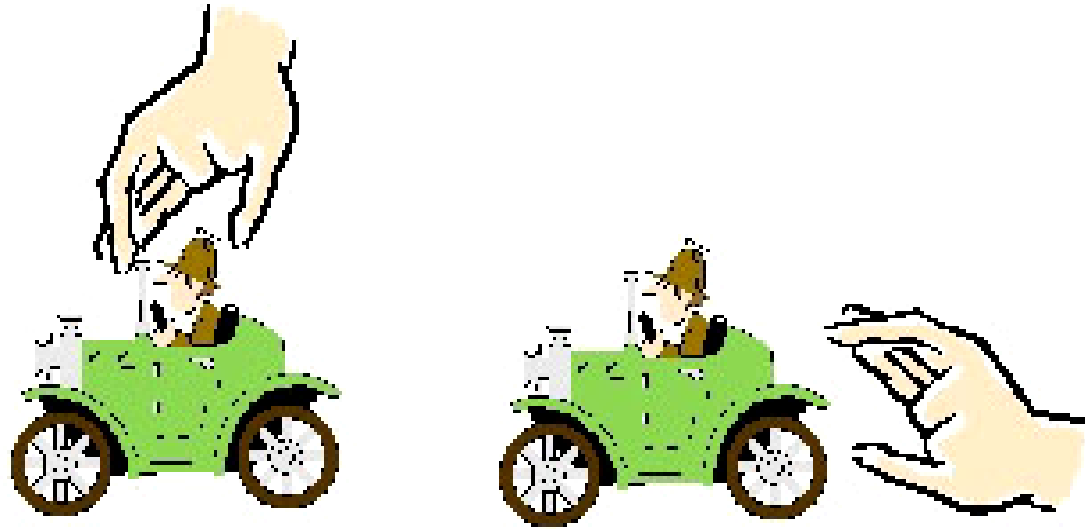
- 一般に使われる単位系です
 - 他の単位系については知らなくてもいいでしょう
 - 初修物理で特に重要な単位は
 - 長さ : m (メートル)
 - 質量 : kg (キログラム)
 - 時間 : s (秒)
- です

0. 20: スカラー

- **質量のように大きさと単位によって決まる物理量**
 - 質量 1 kg のオモリと質量 2 kg の台車がある
- **同じ種類のスカラー量は足し算ができます**
 - 上のオモリと台車の質量の和は 3 kg になります

0. 21:ベクトル

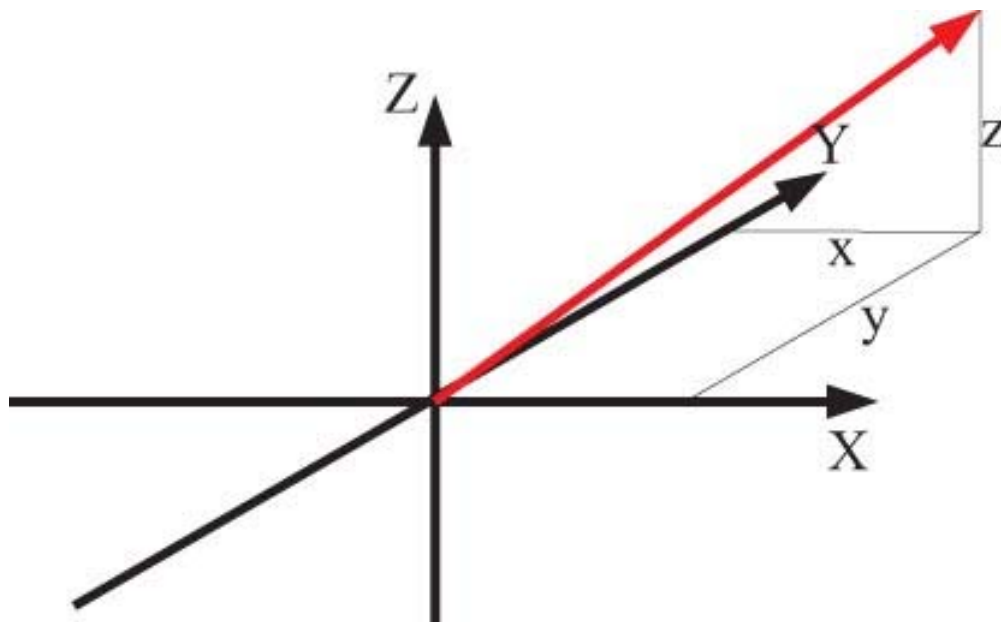
- 力のように「大きさ」、「向き」と「単位」によって決まる量です
 - － 1 N の力というだけでは不十分です。力の向きを指定しないといけません



- 同じ種類のベクトルは足し算ができます
 - － 平行四辺形の法則を使って足し算します

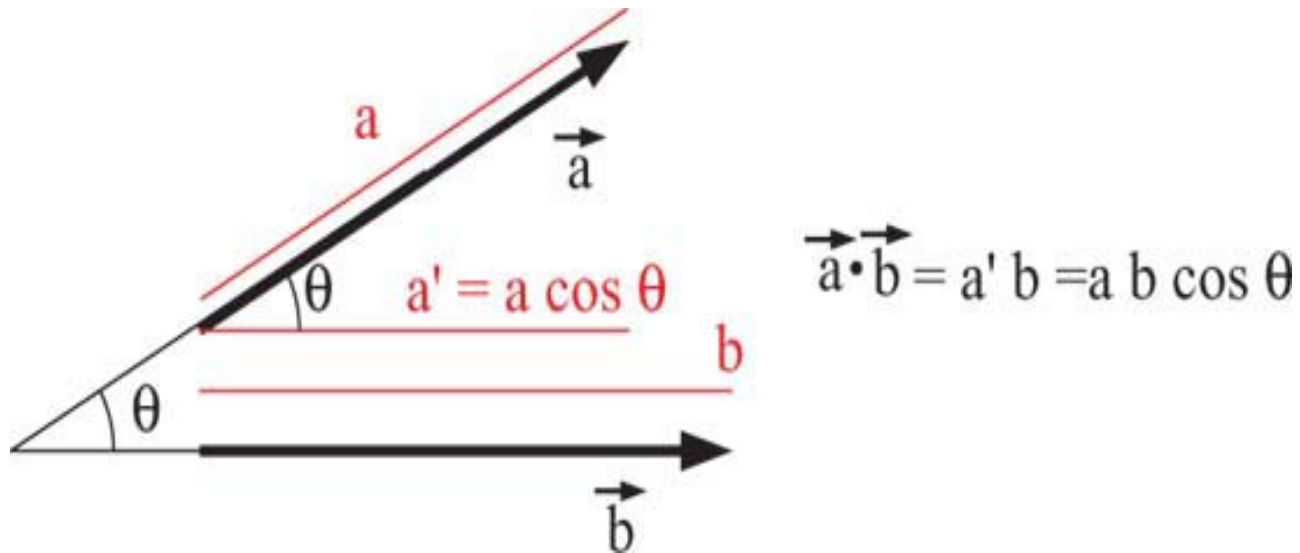
0. 22:ベクトルの成分表示

- ベクトルを表すために、成分表示を行います
 - 下図の赤い3次元のベクトルの場合、X, Y, Z方向の長さ x, y, z を用いて、 (x, y, z) と表します
 - ここでは原点を始点としています



0.23: ベクトルの内積

- ベクトルの掛け算を考えることができます。
 - ベクトルでは大きさだけでなく向きも考えます。



- 内積は2つのベクトルの同じ方向の長さの積です
- 成分表示を行うと簡単に内積を計算できます

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

第0章 物理量の記述

0.1 単位系

1. 長さ 1.1 [km] の橋は [m] の単位でいくらになるでしょう？
2. 質量 1 [g] の球の質量は [kg] の単位ではいくらになるでしょう。
3. 時間 1 時間 は [s] の単位ではいくらになるでしょう？
4. 時速 90 [km/h] で移動している自動車の速さは [m/s] の単位ではいくらになるでしょう？
5. 長さ $1 \text{ [}\mu\text{m]}$ の細菌は [m] の単位ではいくらになるでしょう？
6. 最近ではナノテクノロジーという言葉が新聞を賑わしていますが、 1 [nm] は [m] の単位ではいくらになるでしょう？

0.2 ベクトルの計算

0.2.1 ベクトルの加減算

01. $\vec{a} = (1, 0, 0)$ 、 $\vec{b} = (2, 1, 0)$ の二つのベクトルがある。以下の計算を行いなさい。

- $\vec{a} + \vec{b} =$
- $\vec{a} - \vec{b} =$
- $-\vec{a} + \vec{b} =$

02. $\vec{a} = (0, 1, 1)$ 、 $\vec{b} = (2, 0, 4)$ の二つのベクトルがある。以下の計算を行いなさい。

- $\vec{a} + \vec{b} =$
- $\vec{a} - \vec{b} =$
- $-\vec{a} + \vec{b} =$

03. $\vec{a} = (1, -1, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, -1, 4)$ の二つのベクトルがある。以下の計算を行いなさい。

- $\vec{a} + \vec{b} =$
- $\vec{a} - \vec{b} =$
- $-\vec{a} + \vec{b} =$

プログラムを使って、確認してみよう。

0.2.2 ベクトルの内積

01. $\vec{a} = (2, 0, 0)$ 、 $\vec{b} = (1, 2, 0)$ の二つのベクトルがある。内積を計算しなさい。

- グラフ用紙に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を描いて、図形的に内積を求めなさい。
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ より内積を求めなさい。
- 両者が一致することを確認しなさい。

02. $\vec{a} = (1, 1, 0)$ 、 $\vec{b} = (2, 1, 0)$ の二つのベクトルがある。内積を計算しなさい。

- グラフ用紙に $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を描いて、図形的に内積を求めなさい。
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ より内積を求めなさい。
- 両者が一致することを確認しなさい。

03. $\vec{a} = (1, -1, 0)$ 、 $\vec{b} = (-1, -2, 0)$ の二つのベクトルがある。この二つのベクトルのなす角度 θ を算しなさい。ヒント： $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ を使う。

04. $\vec{a} = (1, -1, 0)$ 、 $\vec{b} = (0, -1, 4)$ の二つのベクトルがある。この二つのベクトルのなす角度 θ を算しなさい。

2日目 (4/19)

1：運動の表し方

1. 1：質点

- **質点とは**

- 大きさを持たずに、質量だけがあるもの

- **質点系**

- 質点がいくつかある場合

- **剛体**

- 大きさ (質量も) があるけれど、変形はしないもの

1. 2: 位置と座標系

- 位置

- 日常生活で考える“位置”と同じ

- 座標系

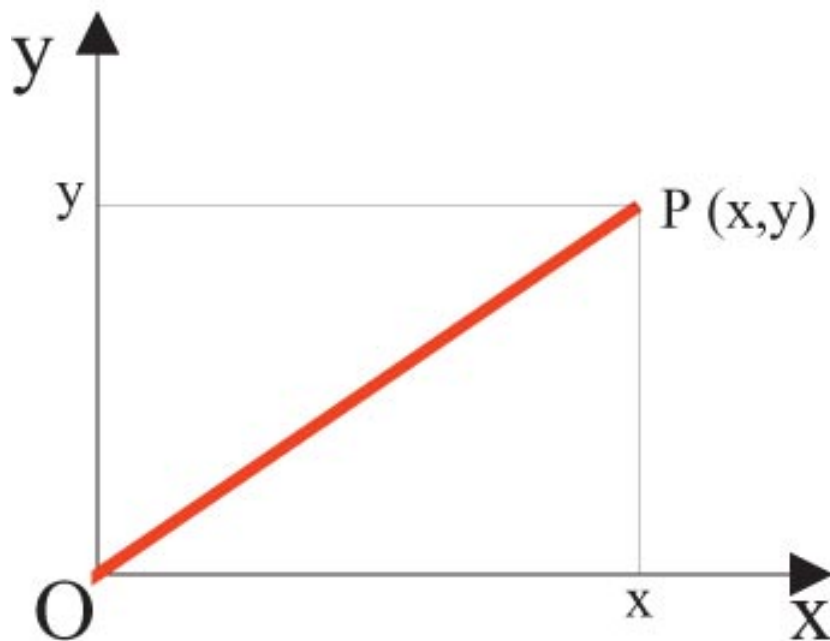
- 空間に置いた“目に見えない”ものさし
- 必要なものさしが1本ならば1次元、2本ならば2次元.....

- 座標

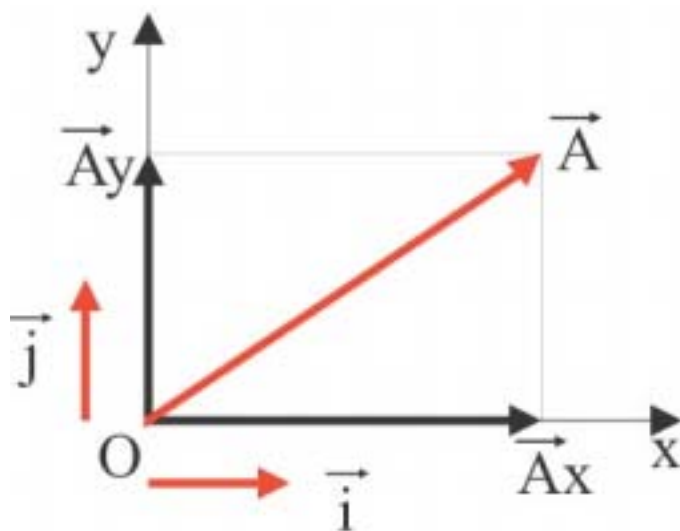
- “目に見えないものさし”のメモリの読み

1. 21: デカルト座標系

- “目に見えない”もののさしが直角になっている



1. 3: ベクトルと座標系



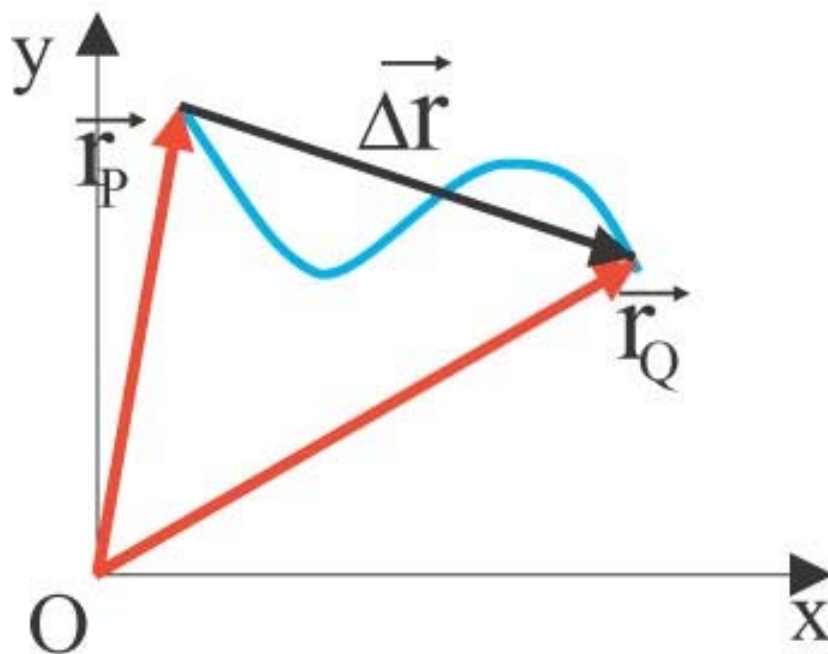
基本ベクトルとは？

基本ベクトルを使うと、

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = (A_x, A_y)$$

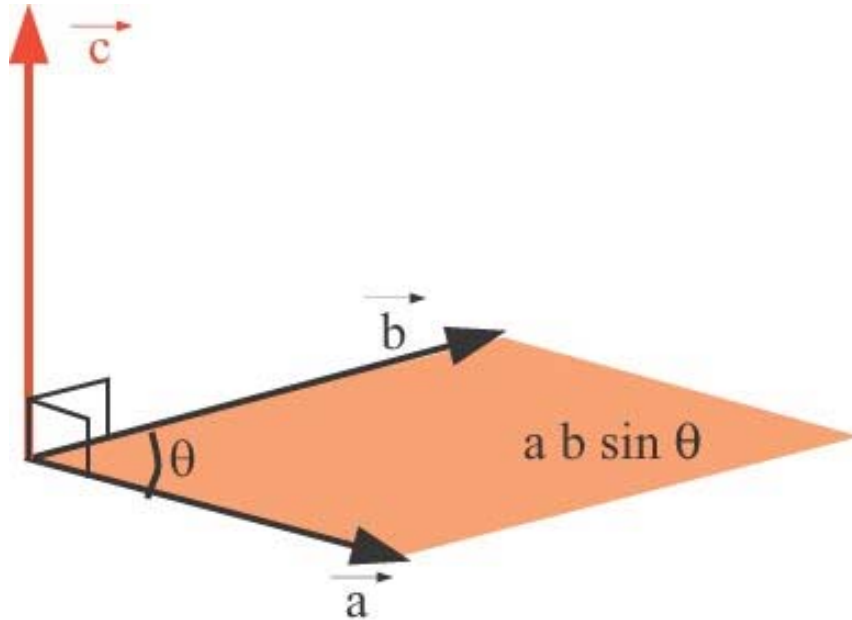
1. 3 1 : 位置ベクトルと変位ベクトル

- 位置を表すベクトル : 位置ベクトル
- 位置の変化を表すベクトル : 変位ベクトル



1. 3 2:ベクトル積

- 二つのベクトルのベクトル積はベクトル
 - 大きさは図の平行四辺形の面積
 - 方向は積を取ったベクトルと直交
 - 向きは右手の法則



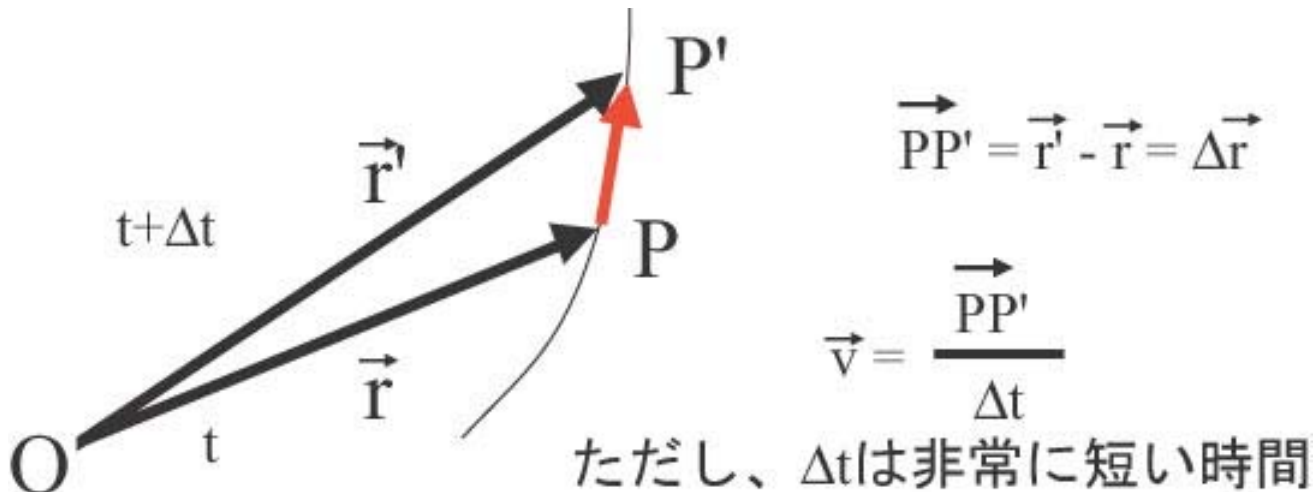
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

1. 4:速度

- 変位ベクトルをその変位に要した時間で割ったもの

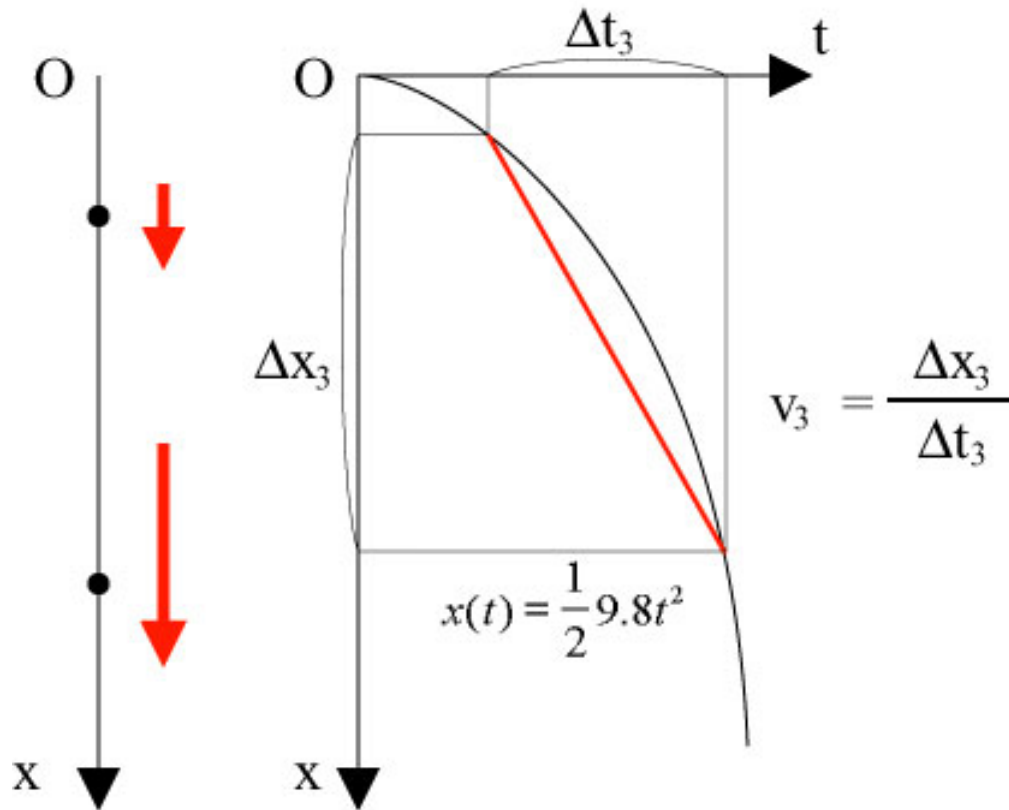


- 単位は[m/s]

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

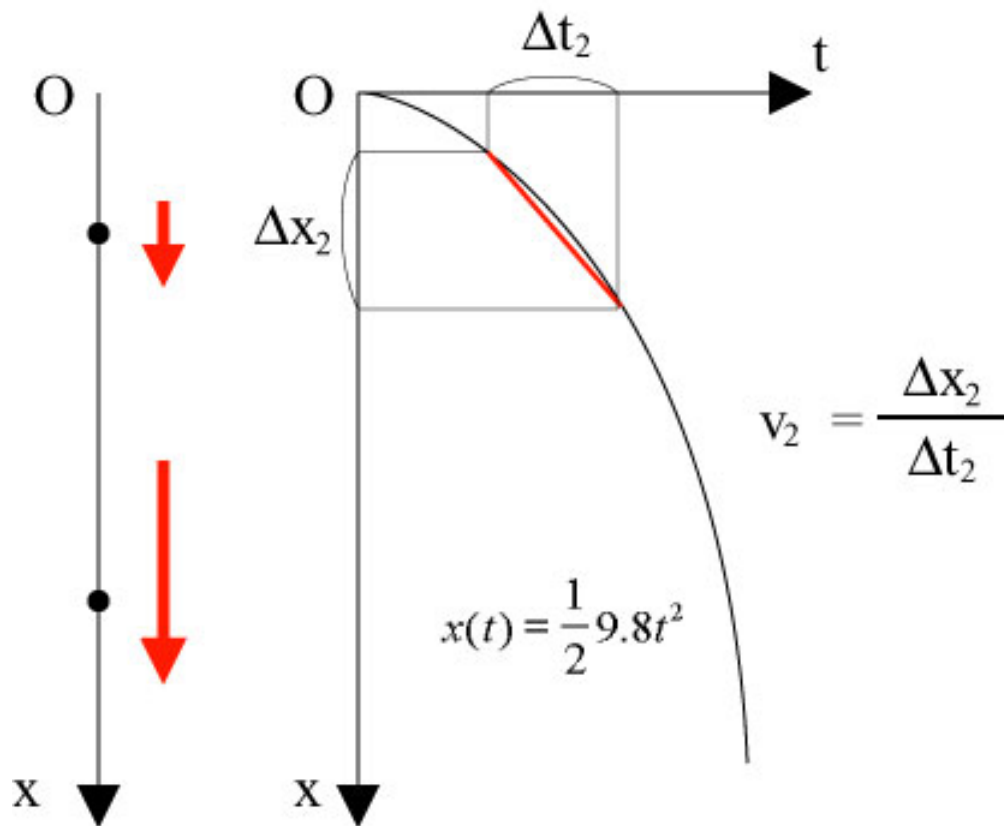
1. 411: 直線 (落下) 運動の速度

- 変位ベクトルをその変位に要した時間で割ったもの



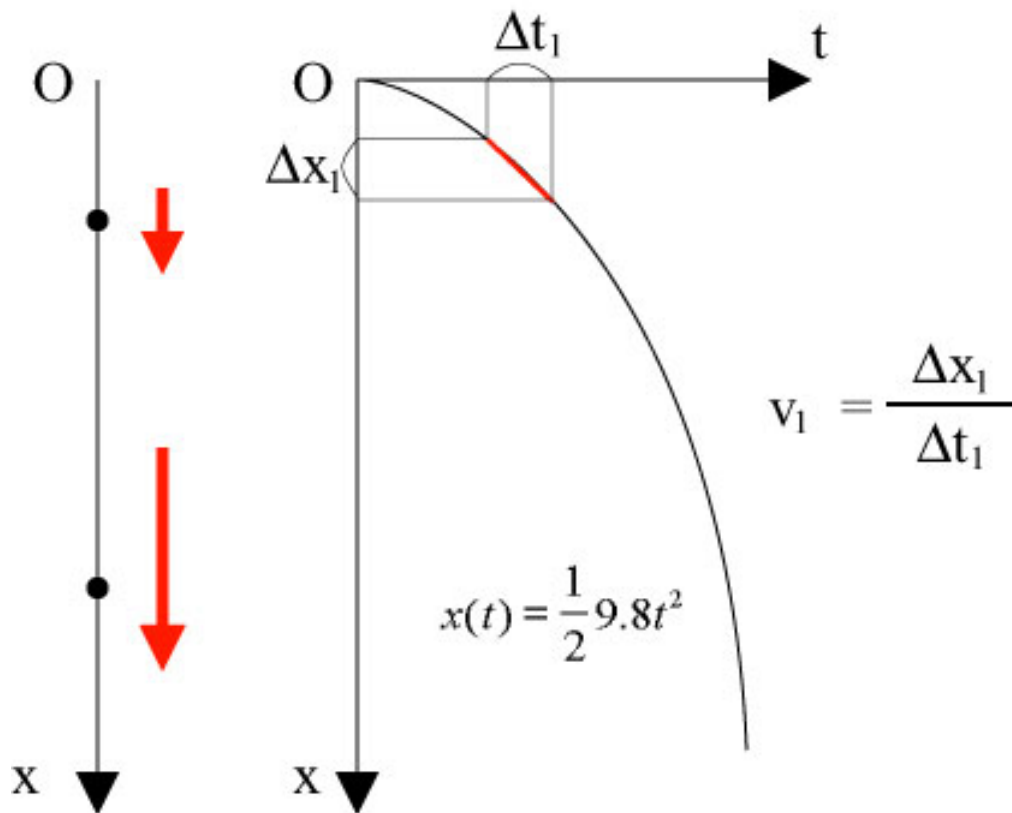
1. 4 1 2 : 直線 (落下) 運動の速度

- 変位ベクトルをその変位に要した時間で割ったもの



1. 4 1 3 : 直線 (落下) 運動の速度

- 変位ベクトルをその変位に要した時間で割ったもの



1. 414: 直線 (落下) 運動の速度

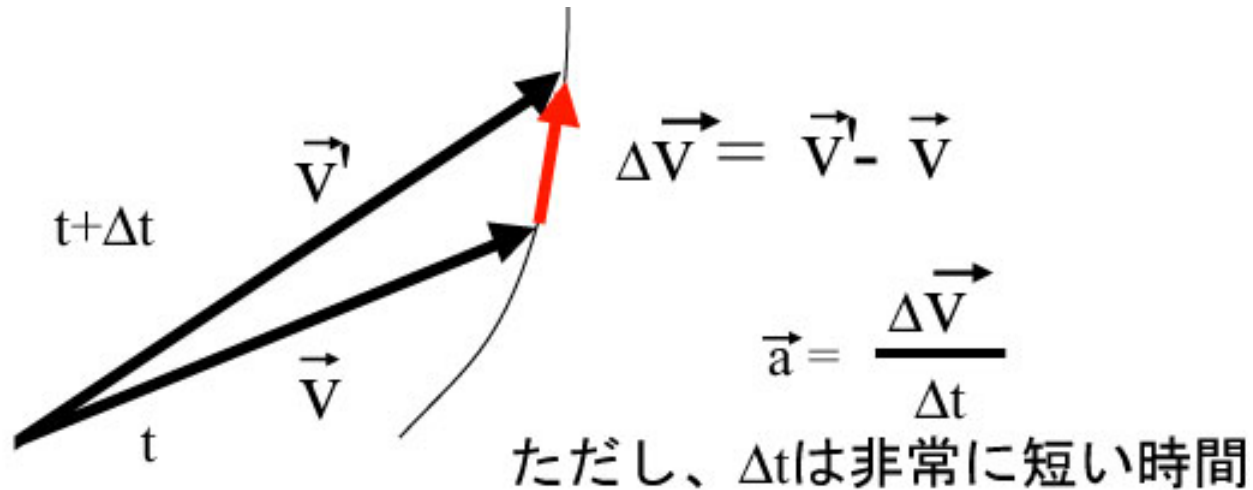
- 変位ベクトルをその変位に要した時間で割ったもの
 - $x(t) = \frac{1}{2} 9.8 t^2$ [m]

t [s]	x(t) [m]	$\Delta x = x(t) - x(1)$	$v = \Delta x / \Delta t$ [m/s]
2.0	19.6	14.7	14.7
1.1	5.929	1.029	10.29
1.01	4.99849	0.09849	9.849
1.001	4.90980	0.00980	9.80
1.0001	4.90098	0.00098	9.8

- Δt を小さくしていくと、平均速度は一定の値に近づく
 - 注意: $x(t)$ を t で微分すると $9.8t$ になる

1. 5 : 加速度

- 速度ベクトルの変化の割合



- 単位は $[m/s^2]$

1. 56 : 運動の例

位置、速度、加速度の関係を理解するために、シミュレーションを行いましょう

- 1次元運動について
- 2次元運動
 - X軸方向とy軸方向が独立な場合 (ものを投げるとき)
 - 大砲を向かい合わせに撃ったら？

問題1.2 ベクトル A, B, C, D が図1.7のように与えられているとき、

- (1) 各ベクトルを成分表示で表せ。
- (2) $A+B$, $A-B$, $|A+B|$, $A+B$ を求めよ。

問題1.3 $A = (2, -1, 0)$, $B = (-3, -1, 3)$, $C = (2, 2, -1)$ のとき、次のベクトルを成分表示で表せ。

- (1) $3A$
- (2) $A+B$
- (3) $3A-B$
- (4) $\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}C$
- (5) $A-i$
- (6) $|A-i|$
- (7) $|A-B|$
- (8) $(A+C)_z$
- (9) B の方向への単位ベクトル

ただし、 i は x 軸方向の単位ベクトルで $(1, 0, 0)$ である。

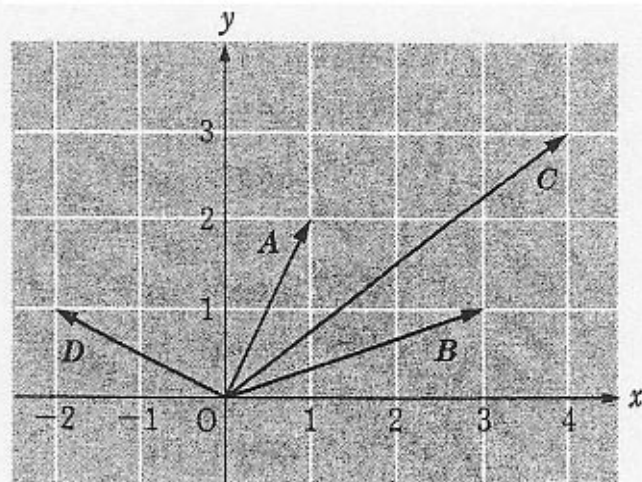


図 1.7

問題1.4 $A = (-1, 0, 1)$ と $B = (-1, -2, 2)$ のなす角 θ を求めよ。

問題1.5 $A = (-1, 0, 1)$, $B = (2, 3, 2)$ のとき、 $(A+B) \cdot (A-B)$ を求めよ。

問題 1.6 $A = i - 3j + 2k$, $B = 3i + 2j - k$ のとき, ベクトル積 $A \times B$ を求めよ.

問題 1.7 $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 5, 6)$ のとき, A と B のベクトル積 C について,

(1) C を成分表示で表せ.

(2) $C = |C|$ を求めよ.

問題 1.8 $A = (2, 0, -1)$, $B = (2, -1, 2)$ のとき,
 $(A+B) \times (A-B)$ を求めよ.

問題 1.11 $A = (2, 0, -1)$, $B = (2, -1, 2)$, $C = (2, -3, 1)$ のとき, 次のものを求めよ.

(1) $A \cdot (B \times C)$ (2) $A \times (B \times C)$

問題 1.12 $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 4, 1)$, $C = (5, -1, 0)$ のとき, 次のものを求めよ.

(1) $A \times (B \times C)$ (2) $(A \times B) \times C$

問題 1.13 x 軸に沿って運動している質点が $t_1 = 1 \text{ s}$ のとき $x_1 = 10 \text{ m}$ の位置にあり, $t_2 = 3 \text{ s}$ のとき $x_2 = 4 \text{ m}$ の位置にある. この時間における変位と平均速度を求めよ.

問題 1.14 ある質点が x 軸に沿って運動している. その x 座標 (単位は m) は時刻 t (単位は s) とともに $x = 2t^2 - 4t$ にしたがって変化する. $t = 1$ s から $t = 3$ s までの平均速度はいくらか. また, $t = 2.5$ s における速度を求めよ.

問題 1.15 x 軸に沿って運動する質点の速さが $v = (40 - 5t^2)$ m/s にしたがって変化している. $t = 1$ s から $t = 2$ s までの時間における平均加速度の大きさを求めよ. また, $t = 2$ s における加速度の大きさを求めよ.

問題 1.16 $r(t) = 5(\cos 3\pi t \mathbf{i} + \sin 3\pi t \mathbf{j}) + 0\mathbf{k}$ のとき,

(1) $v(t), |v(t)|, v(0)$ を求めよ.

(2) $a(t), |a(t)|, a(0)$ を求めよ.

例題 1.1 x 軸上を運動する点 P の時刻 t での位置が, a, b, c, ω を定数として

(a) $x = a + bt + ct^2$

(b) $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$

で与えられるとき, (1) 速度, (2) 加速度, (3) $x = 0$ を通る時刻, (4) 速度が 0 になる時刻, を求めよ.

例題 1.2 x 軸上を運動する物体の速度が時間とともに図 1.17 のように変化した。

(1) 加速度 a はいくらか。

(2) 速度が 0 になる時刻 t はいくらか。また出発点からの位置 x (すなわち変位) はいくらか。

(3) $t = 5.0$ s 後の位置 x' とそこに達するまでに動いた距離 (道のり) l はいくらか。

(4) $x-t$ 図をつくれ。これより再び出発点にもどる時刻 t' を求めよ。

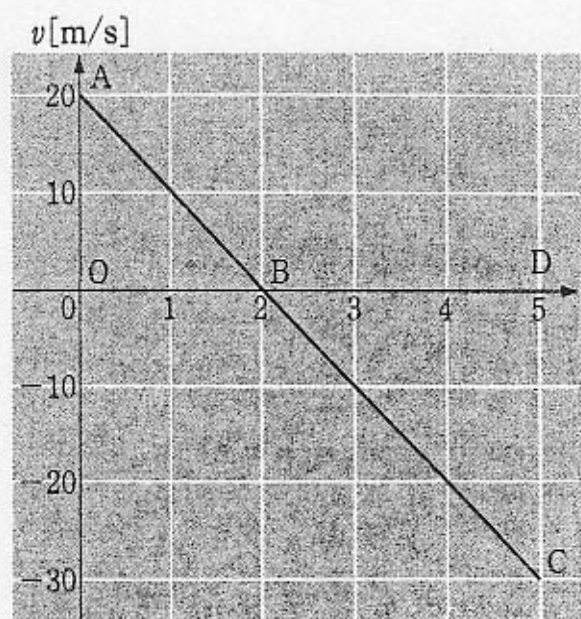


図 1.17

類題 1.1 時刻 $t = 0$ に地表から鉛直上方に打ち上げられたロケットは、一定の加速度 $3g$ (g は重力加速度の大きさ) で上昇をつづけた後、時刻 $t = T$ で加速を終えた。

(1) ロケットの速度の変化をグラフで示せ (鉛直上方を正の向きとする)。

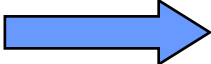
(2) 最高点に達する時刻とそのときの高度を求めよ。

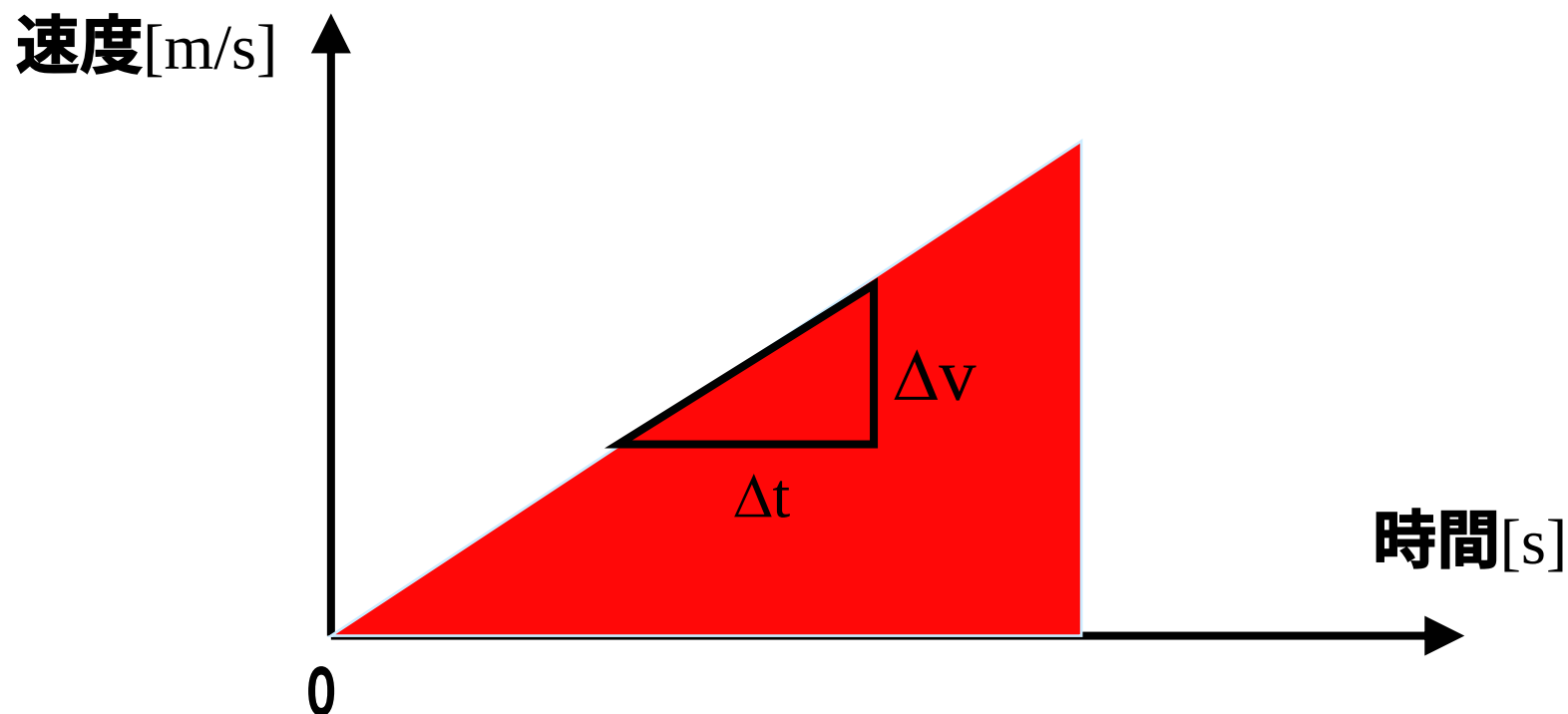
(3) ロケットが地表にもどる時刻と、そのときの落下の速さを求めよ。

3 日目 (4/26)

1. 51:速度-時間のグラフ 1

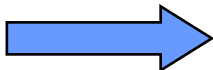
- グラフの読み方

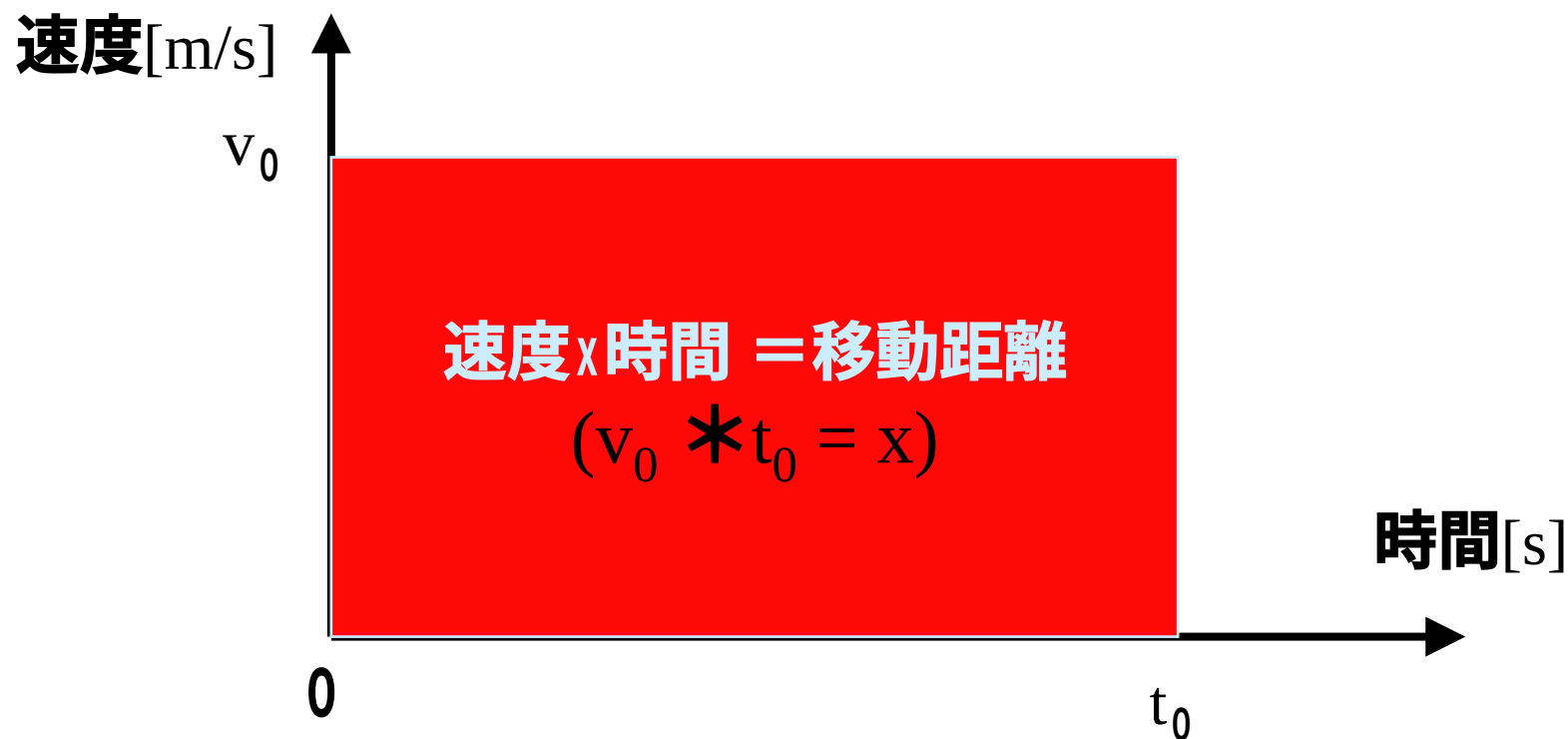
– 傾き  加速度



1. 5 2 : 速度-時間のグラフ 2

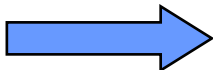
● グラフの読み方

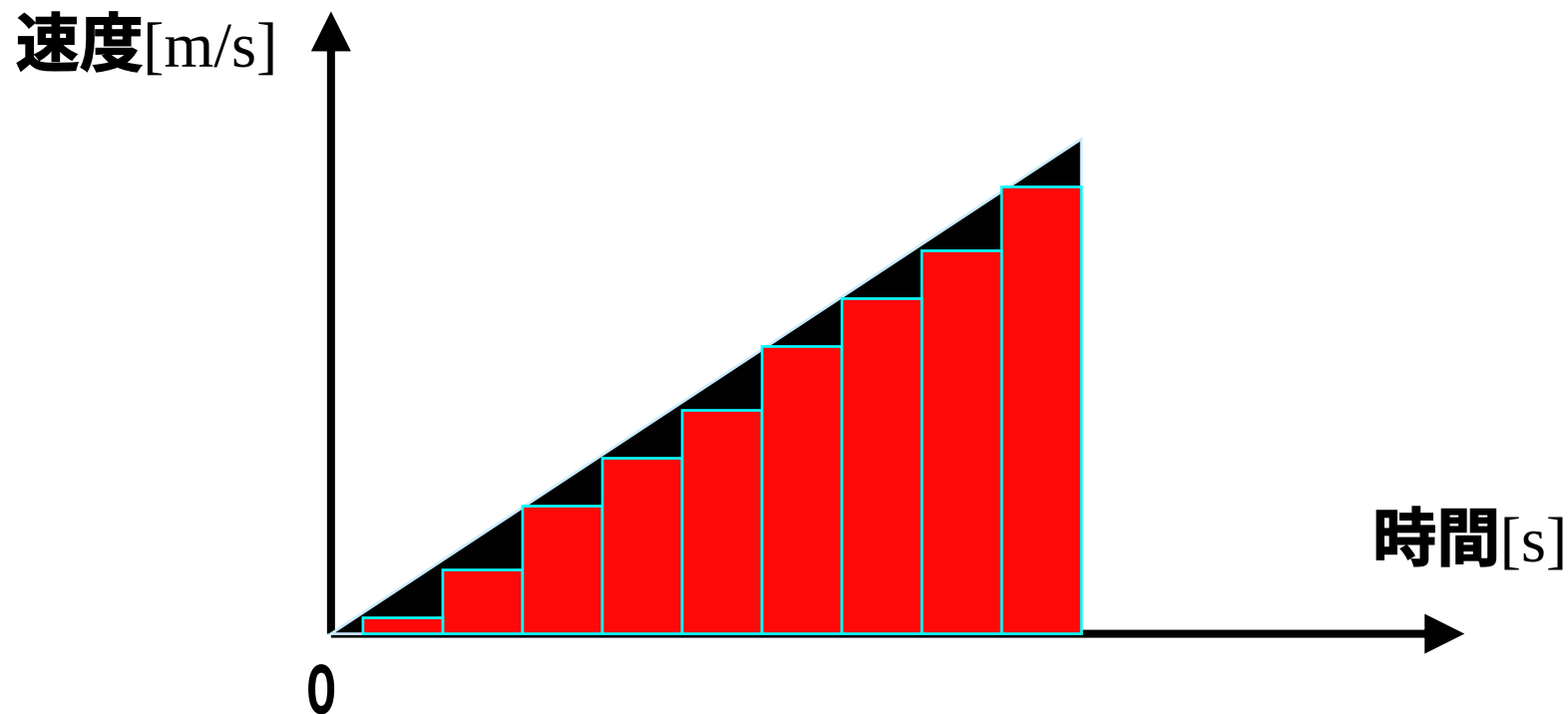
– 面積  位置 (移動距離)



1. 53 : 速度-時間のグラフ 3

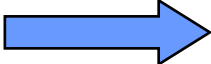
● グラフの読み方

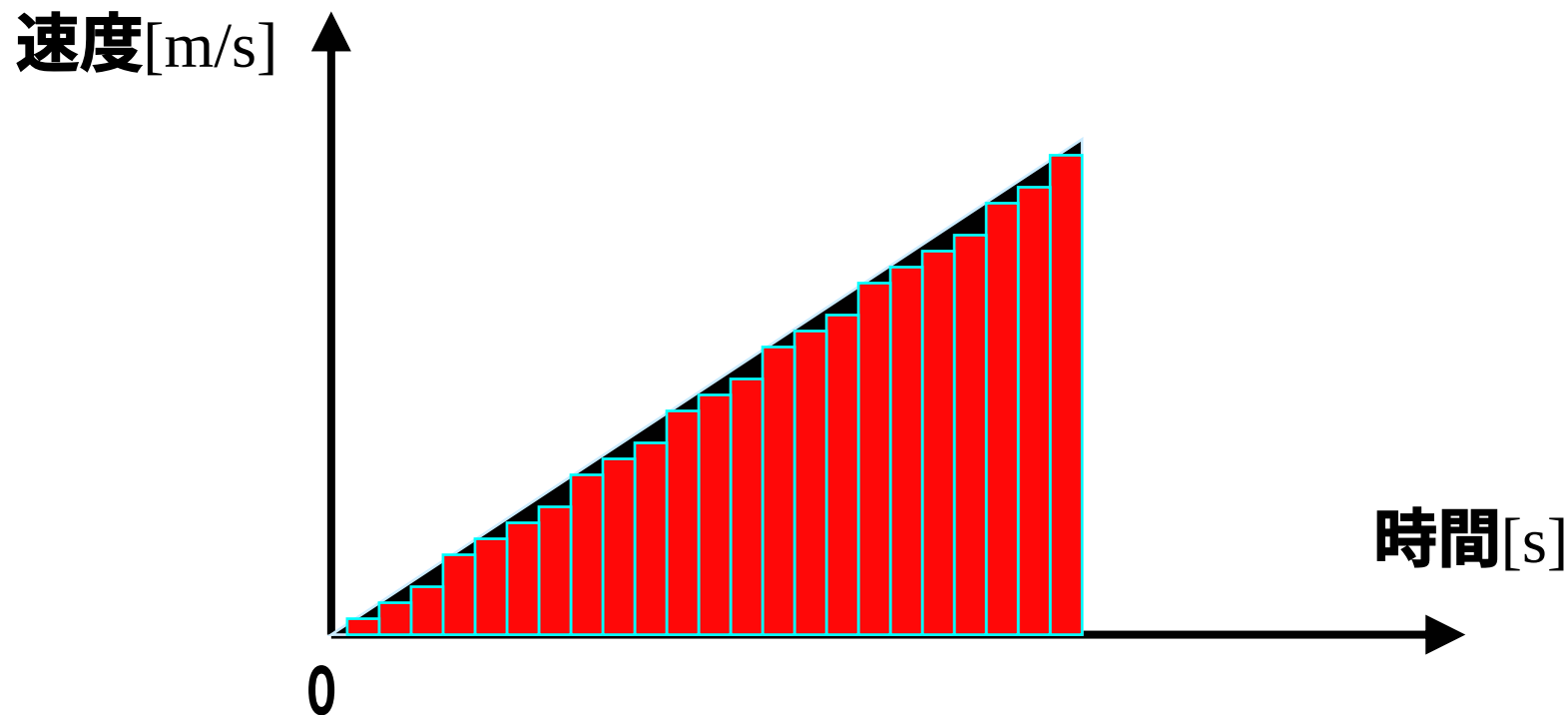
– 面積  位置 (移動距離)



1. 54:速度-時間のグラフ 4

● グラフの読み方

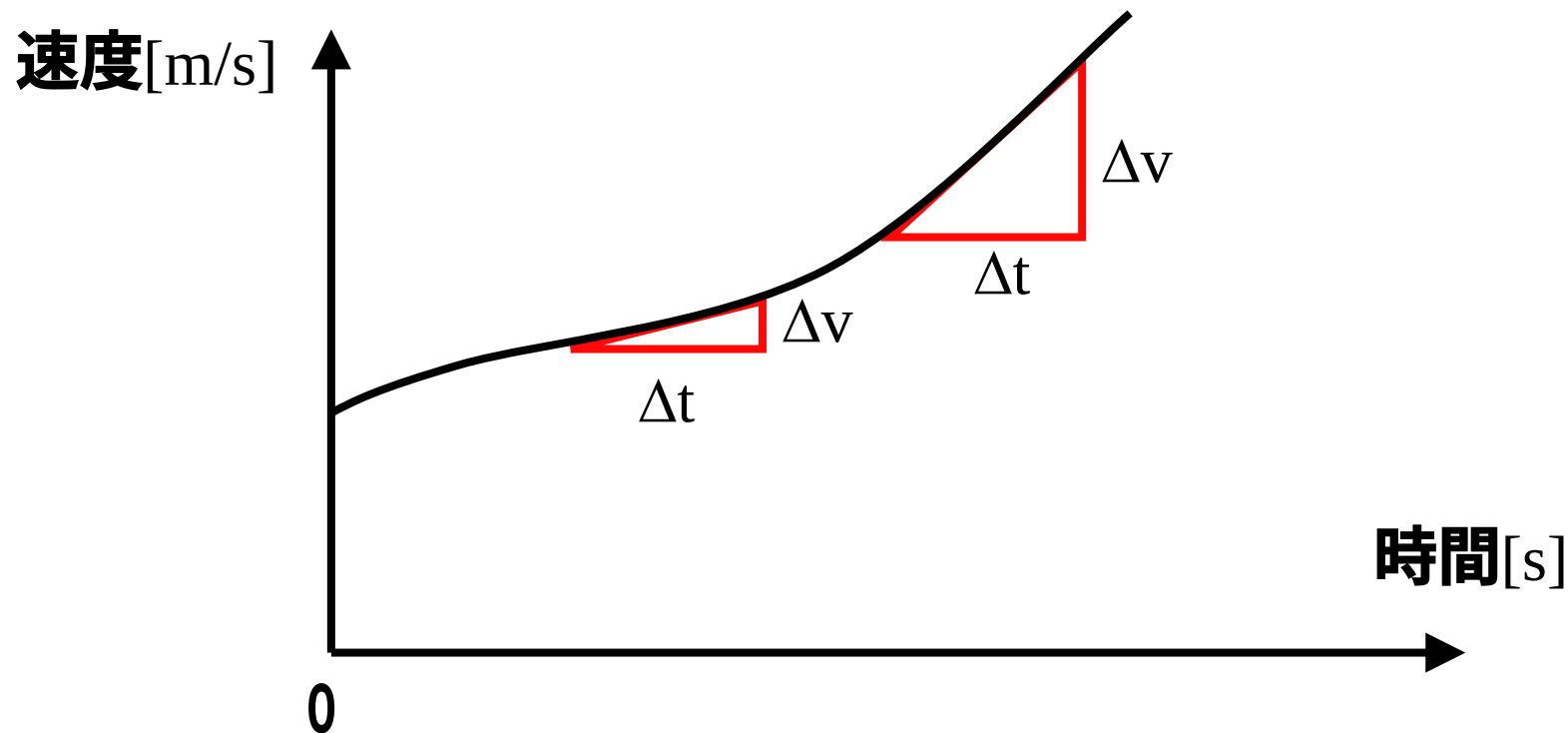
– 面積  位置 (移動距離)



1. 55 : 速度-時間のグラフ 5

● グラフの読み方

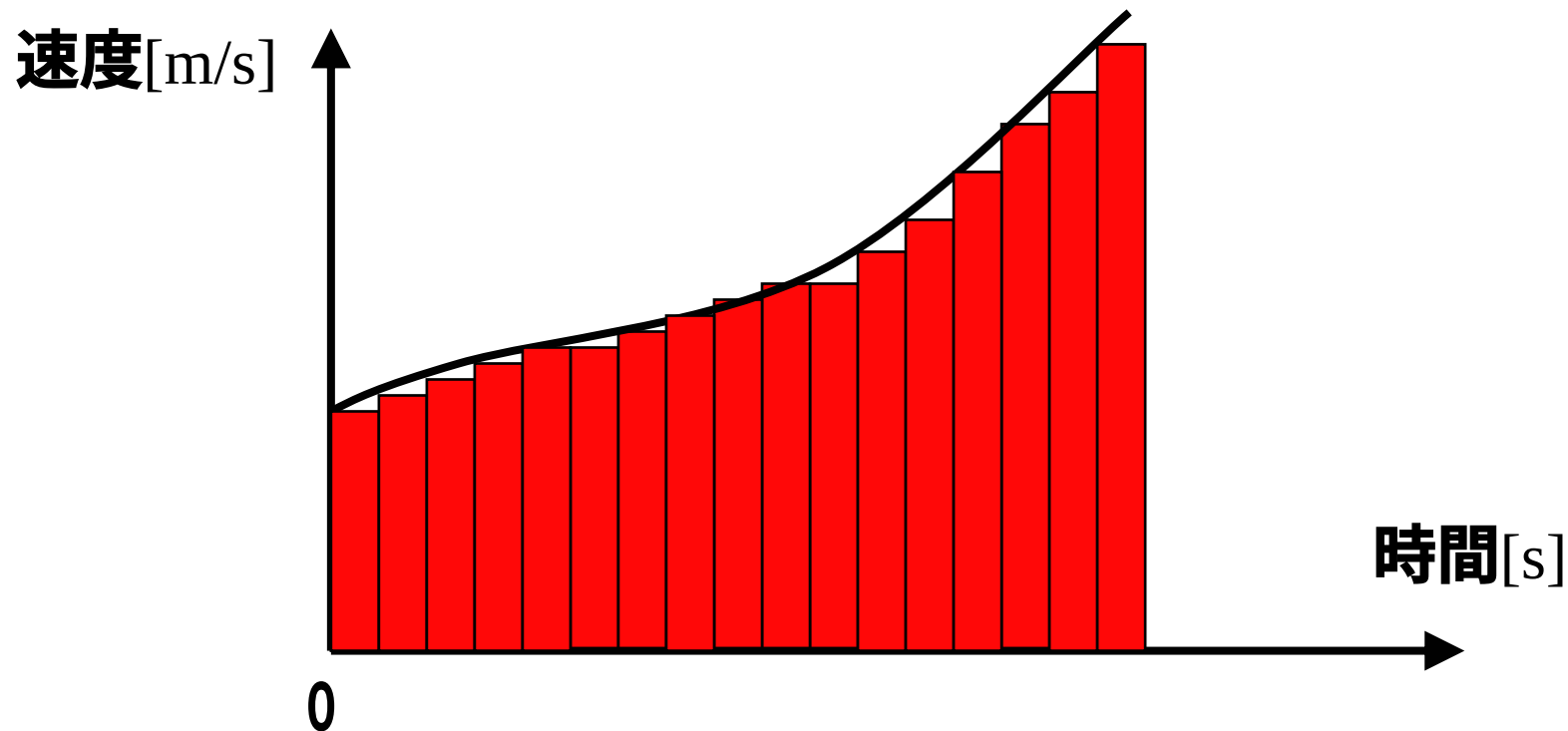
- 面積 $\longrightarrow$ 位置 (移動距離)
- 傾き $\longrightarrow$ 加速度



1. 55:速度-時間のグラフ 6

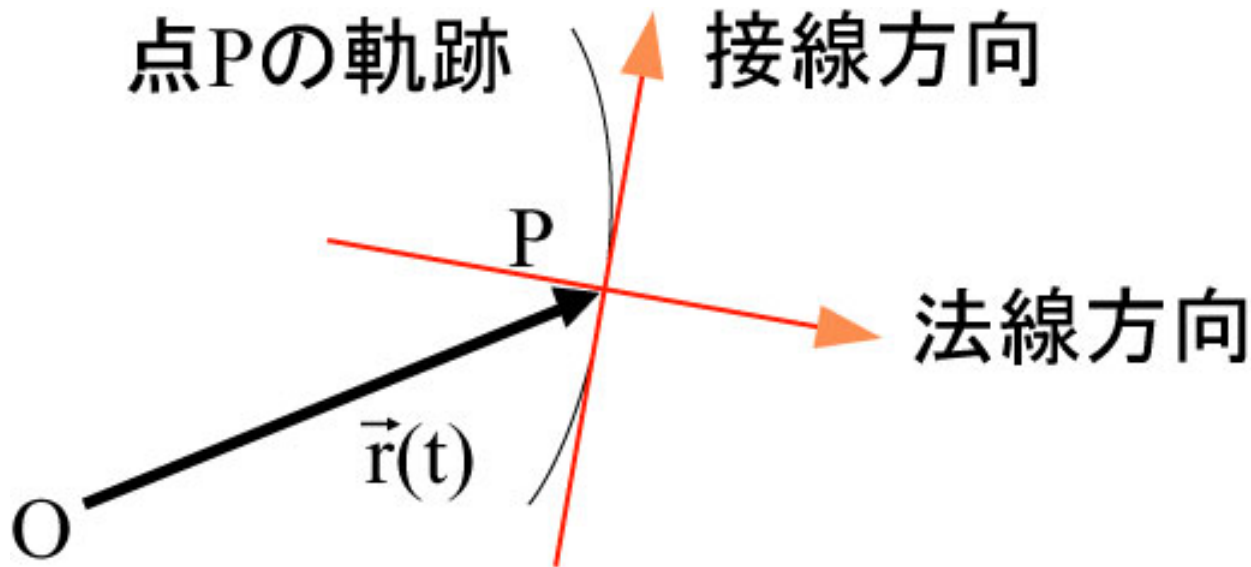
● グラフの読み方

- 面積 $\longrightarrow$ 位置 (移動距離)
- 傾き $\longrightarrow$ 加速度



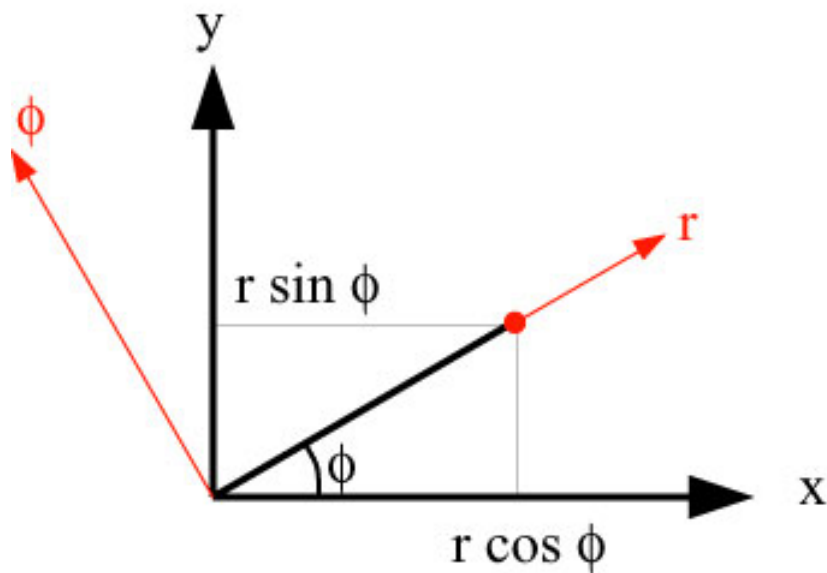
1. 6：接線方向と法線方向

- 質点の軌跡の接線方向と法線方向
 - 便利なこともあります



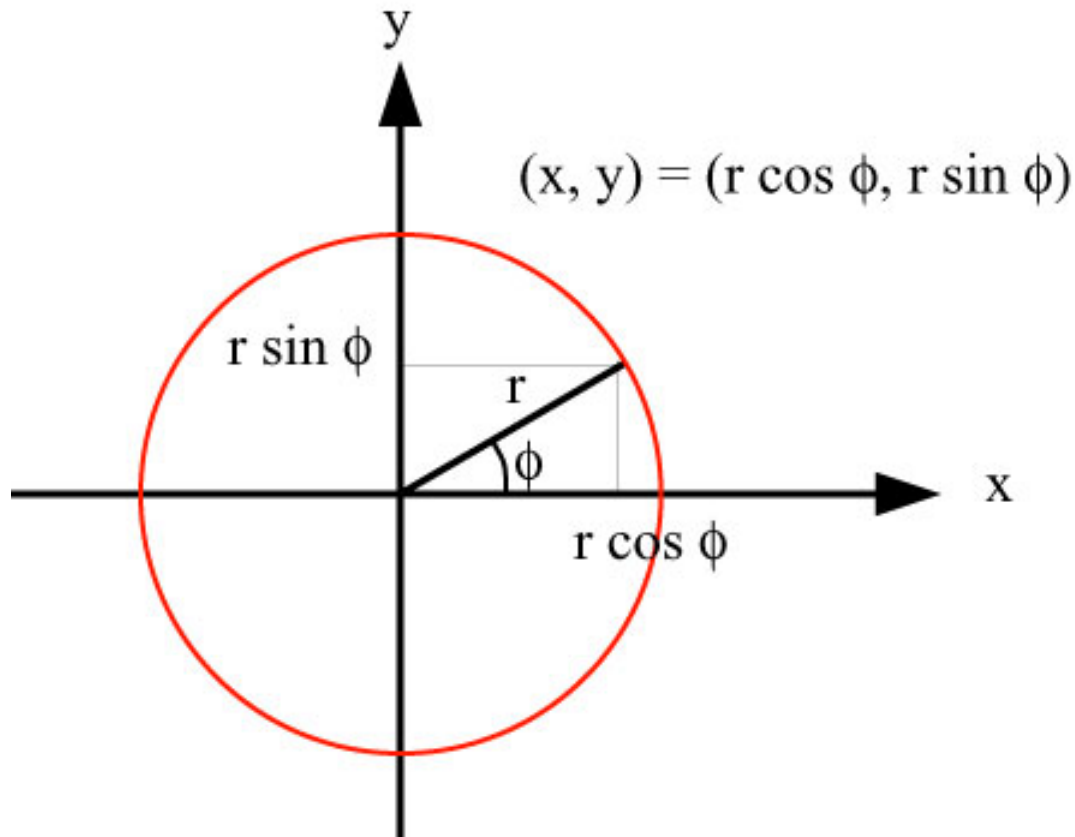
1. 7次元の極座標系

- 2次元上の点の位置を表す方法のひとつ
 - 便利なこともあります



1. 8:円運動

- 円周上を運動する場合です



1. 81:等速円運動

- 円周上を一定の速さで運動する場合は
 - シミュレーションを見ましょう

- 重要な言葉

- 角度 ϕ 、角速度 $\omega = \Delta \phi / \Delta t$

- 周期 $T = 2\pi / \omega = 2\pi r / v$

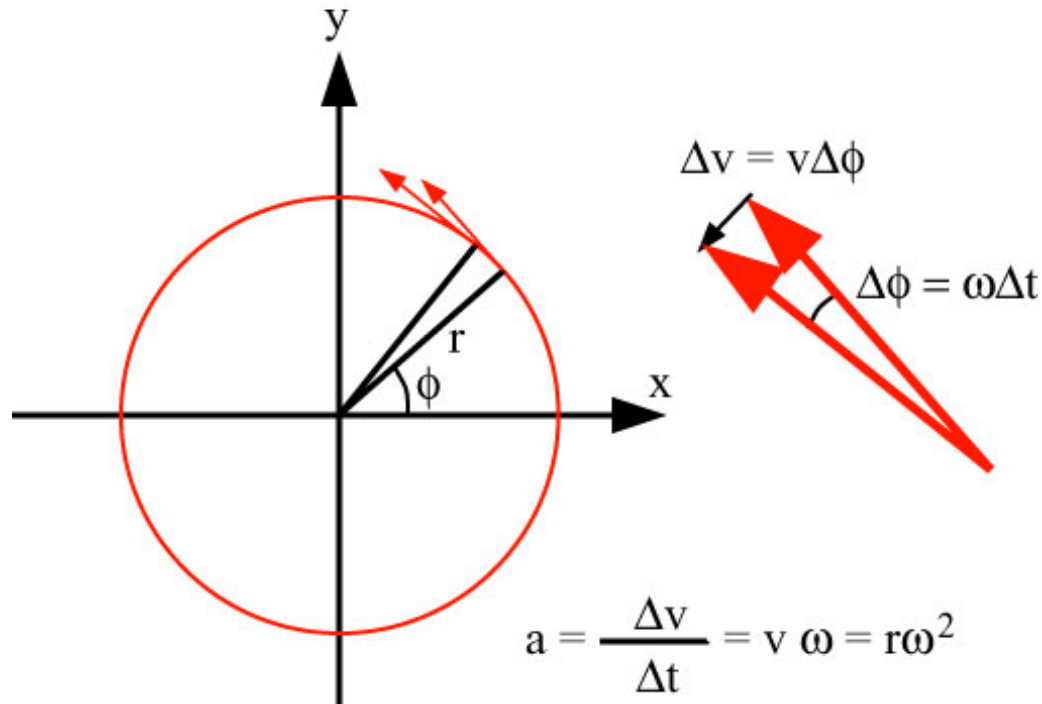
- 速度の大きさ、加速度の大きさ

$$v = r\omega \qquad a = r\omega^2$$

- 向心力

1. 8 2 : 等速円運動の加速度1

- 図形的に加速度について考えてみましょう



- 加速度の向きは？
- 加速度の大きさは？

1. 83:等速円運動の加速度2

- 計算によって加速度について考えてみましょう

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$$

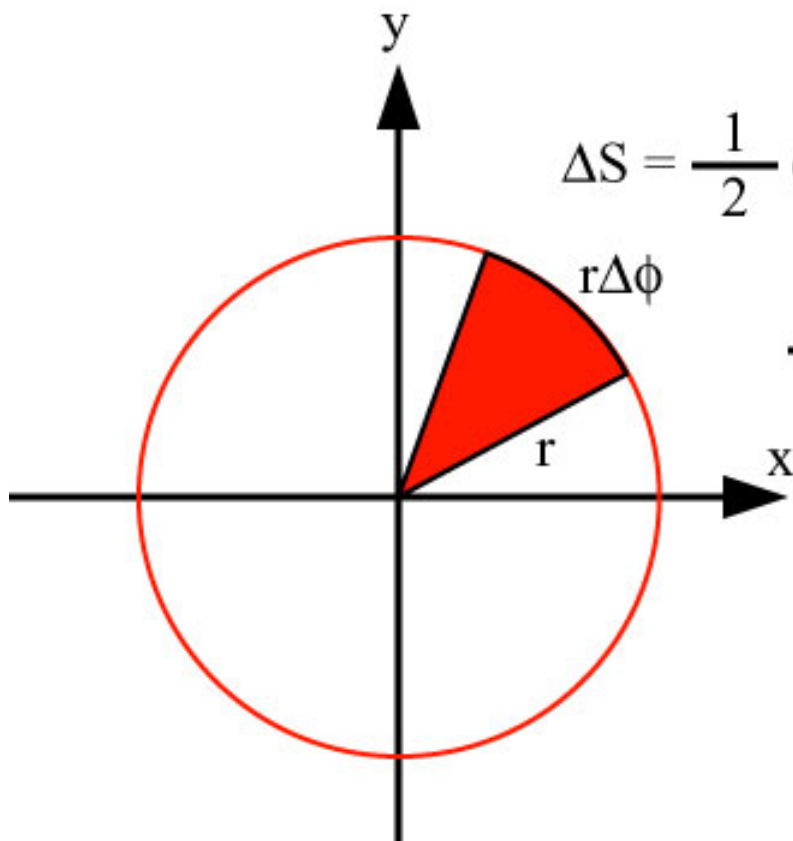
$$\vec{v} \approx \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \left(r \frac{\Delta \cos \omega t}{\Delta t}, r \frac{\Delta \sin \omega t}{\Delta t} \right)$$

$$\therefore \vec{v} = (v_x, v_y) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

$$\vec{a} \approx \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) = \left(-r\omega \frac{\Delta \sin \omega t}{\Delta t}, r\omega \frac{\Delta \cos \omega t}{\Delta t} \right)$$

$$\therefore \vec{a} = (a_x, a_y) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)$$

1. 9 : 面積速度



$$\Delta S = \frac{1}{2} (r\Delta\phi)r = \frac{1}{2} r^2 \omega \Delta t$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

1. Aa:練習問題a

●相対速度に関して

- 静水に対する速さが v_1 の船が、流速 v_2 で川幅が L の川をわたる。

- (1) 船首を流れに直角に向けて進むとき、岸から見た船の速さを求めよ。

- (2) $v_1=4$ [m/s]、 $v_2=2$ [m]の時、船が川に対して垂直に進むためには船首を上流に何度川上に向けて進めば良いか？

- 速さ 20 [m/s]で鉛直に落ちてくる雨粒を時速 90 [km/h]の電車から見た。雨粒は鉛直から角度 θ だけずれて落ちるように見える。 $\tan \theta$ を求めよ。

●円運動に関して

- 質点が等速円運動をしている場合、質点の位置を表す位置ベクトルと速度ベクトルは直交することを証明せよ。

- 位置ベクトルと加速度ベクトルの向きはちょうど逆向きになることを証明せよ。

1. Ab:練習問題b

●相対運動に関して

- 東西方向に走る道路を東に向かって、自動車が 20 [m/s] で走っている。
 - (1) 道路の近くを南北に走っている鉄橋があり、そこを 20 [m/s] で電車が通過した。自動車に乗った人には電車はどの方向にどれだけの速さで進んでいるように見えるか？
 - (2) 逆に電車に乗っている人には自動車の動きはどう見えるか？
- 速さ 25 [m/s] で鉛直に落ちてくる雨粒を時速 90 [km/h] の電車から見た。雨粒は鉛直から何度ずれて落ちるように見えるか。

●円運動に関して

- 質点が原点を中心にして、半径 10 [m] の円周上を速さ 10 [m/s] で等速円運動をしている。この質点の円運動の周期はいくらか？また、加速度の大きさを求めよ。ただし、 π は 3.14 として計算せよ。
- 質点が原点を中心として、半径 $a \text{ [m]}$ の円周上を角速度 $\omega \text{ [rad/s]}$ で等速円運動している。質点が $(a,0)$ 、 $(0,a)$ 、 $(-a,0)$ 、 $(0,-a)$ にあるとき、それぞれの位置での質点の速度と加速度を求めよ。

1. Ac:練習問題C

●ものを投げた場合の運動

ものを投げると鉛直下方に約 $10 \text{ [m/s}^2\text{]}$ の加速度を得る。一方、水平方向の速度は変化しない。

●ものを落とした場合の運動を考えよう。

- (1) ものを落とした瞬間を 0 [s] として、そのものの $t \text{ [s]}$ 後の速度を求めよ。
- (2) $t \text{ [s]}$ 後に落下した距離を求めよ。
- (3) 水平方向に 10 [m/s] の速さでものを投げる。 $t \text{ [s]}$ 後の位置を求めよ。

●地上から、石をまっすぐ上向きに速さ 10 [m/s] で投げ上げた。

- (1) 最高点に達するまでの時間と最高点の高さを求めよ。
- (2) 落下地点までの水平距離を求めよ。

●地上から、石を水平から 30 度の方向に初速度 30 [m/s] で投げた。

- (1) 最高点に達するまでの時間と最高点の高さを求めよ。
- (2) 落下地点までの水平距離を求めよ。

1. Ad:練習問題d

●ものを投げた場合の運動

ものを投げると鉛直下方に約 $10 \text{ [m/s}^2\text{]}$ の加速度を得る。一方、水平方向の速度は変化しない。

●地上 20 [m] の高さのビルの屋上から、石を水平に投げた。

- (1) 初速度 10 [m/s] の場合、落下地点までの水平距離を求めよ。
- (2) 初速度 20 [m/s] の場合、落下地点までの水平距離を求めよ。

●石をできるだけ遠くまで投げたい。水平方向からの投げる角度を変化させた。それぞれの場合の水平方向の到達距離を求めよ。ただし、初速度はどの場合も 10 [m/s] とする。

- (1) 角度 30° 、(2) 角度 45° 、そして(3) 角度 60°
- (4) この場合、初速度によらず最大の到達距離になる角度は 45° である。これを証明せよ。

1. Ae:練習問題e

●三角方程式の一般解

次の方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(6) \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(7) \tan \theta = 1$$

$$(8) \tan \theta = -1$$

$$(3) \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(9) \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$(10) \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$(4) \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(5) \cos \theta = \frac{1}{2}$$

4日目 (5/10)

2:運動の法則

2. 1ニュートンの運動の3法則

- 第1法則 (慣性の法則)

- 質点に力が作用していないとき、その質点はそのまま静止し続けるか、等速直線運動を続ける。

- 第2法則 (運動の法則)

- 質点に力が作用するとき、質点の運動量の時間変化は作用した力に比例し、その力の向きに生じる。

- 第3法則 (作用・反作用の法則)

- 2つの質点がある場合を考える。質点1が質点2に力 F_{21} を及ぼしているときには、質点2は質点1に力 F_{12} を及ぼしている。これらの力は同一直線状にあって、その向きは反対で大きさは等しい。

2. 11: 慣性の法則

- 第1法則 (慣性の法則)

- 質点に力が作用していないとき、その質点はそのまま静止し続けるか、等速直線運動を続ける。

- 質量

- 慣性の大きさを測る物理量: 単位は kg

- 運動量

- ボールが当たったときに感じる衝撃に関連した物理量:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

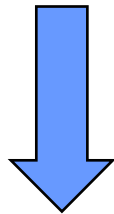
単位は kg・m/s

2. 1 2 : 運動の法則

- 第2法則 (運動の法則)

- 質点に力が作用するとき、質点の運動量の時間変化は作用した力に比例し、その力の向きに生じる。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$



$$m\vec{a} = \vec{F}$$

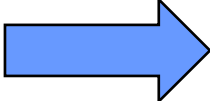
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{mv}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

力の単位 : $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$

2. 121:力のつりあい

- つりあいの式

- 質点に複数の力が作用しているのに、質点が静止しているとき、

速度ゼロ  加速度ゼロ

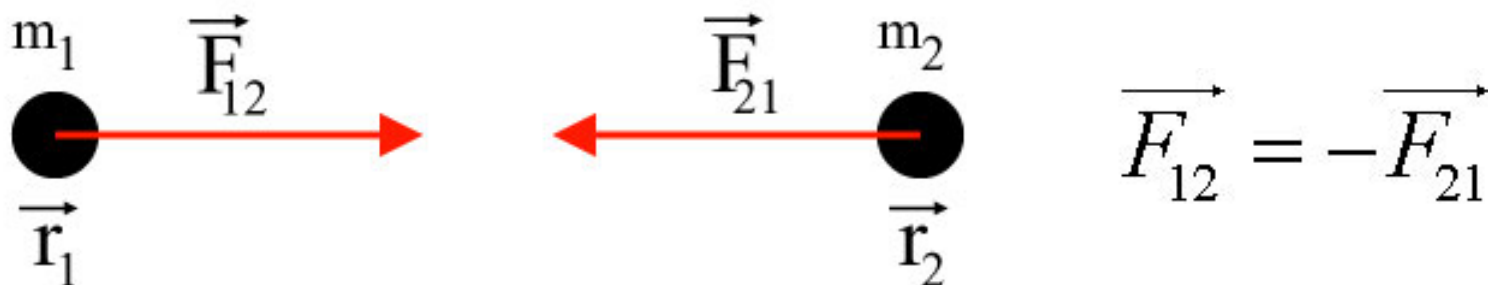
これらの力の合力はゼロである。

(運動の第2法則の応用)

2. 13 : 作用・反作用の法則

● 第3法則 (作用・反作用の法則)

- 2つの質点がある場合を考える。質点1が質点2に力 F_{21} を及ぼしているときには、質点2は質点1に力 F_{12} を及ぼしている。これらの力は同一直線状にあって、その向きは反対で大きさは等しい。



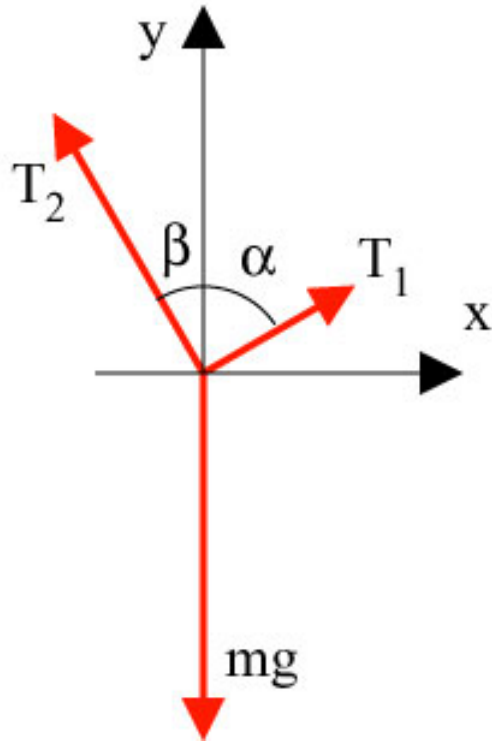
$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ と $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ は平行

2. 14a: 練習問題a

●力のつりあい

- 質量 m [kg]のオモリを鉛直方向と角度 α 、 β をなす2本の糸でつるす。それぞれの糸の張力の大きさ T_1 、 T_2 を求めよ。おもりには mg [kg m/s²]の力が下向きに作用している。

つりあいの式は $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$



$$x \text{ 成分は } T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = 0 \quad (1)$$

$$y \text{ 成分は } T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta - mg = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ より } T_1 = T_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (3)$$

$$(3) \text{ を } (2) \text{ に代入 } T_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + T_2 \cos \beta - mg = 0$$

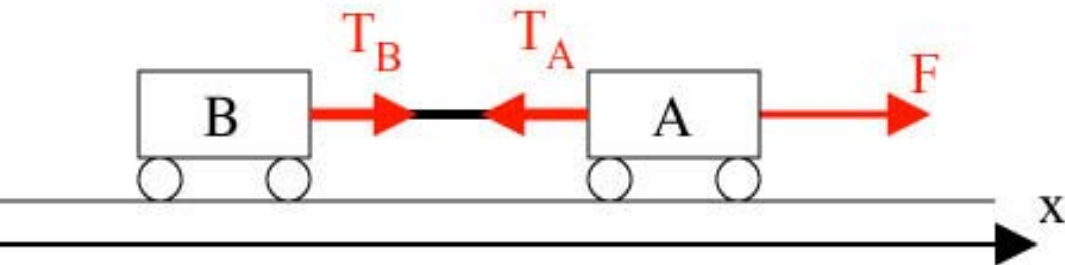
$$\text{整理して、} T_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} mg \quad (4)$$

$$(4) \text{ を } (3) \text{ に代入 } T_1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} mg$$

2. 14b: 練習問題b

●作用・反作用の法則

● 滑らかな直線レール上に、質量 m_A, m_B [kg]の台車A,Bをおいた。これらは質量 m [kg]の紐(ひも)で繋がれている。今、Aに力 F [kg m/s²]を加えて台車A,Bを右向きに引く。台車A,Bの加速度と台車に作用している力を求めよ。



運動方程式

台車A : $m_A a = F - T_A$

台車B : $m_B a = T_B$

紐 : $ma = T_A - T_B$

すべての和を取ると

$$(m_A + m_B + m)a = F$$

よって、

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m}$$

代入すると

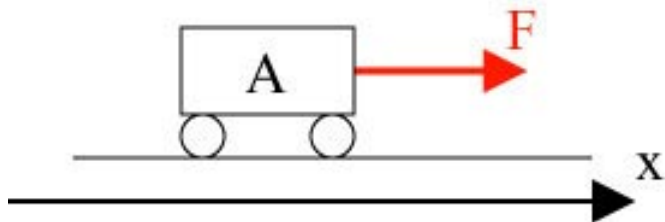
$$T_B = \frac{m_B}{m_A + m_B + m} F$$

$$T_A = \frac{m_B + m}{m_A + m_B + m} F$$

2. 14c: 練習問題c

●運動方程式の解

- 滑らかな直線レール上に、質量 m [kg]の台車をおいた。今、力 F [kg m/s²]を加えて台車を右向きに引く。最初の位置は $x=0$ [m]、速度 $v=0$ [m/s]であった。引き始めた時刻をゼロとして、 t [s]後の台車の速度 v 、位置 x を求めよ。



運動方程式

$$ma = F$$

速度を求めるために積分すると

$$v = \frac{F}{m}t + v_0$$

ここで、 $t=0$ では $v=0$ だから

$$v = \frac{F}{m}t$$

位置を求めるために積分すると

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + x_0$$

同様に、 $t=0$ では $x=0$ だから

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

2. 14d: 練習問題d

運動方程式

- 滑らかな直線レール上に、3台の台車A,B,Cが置かれている。それぞれの質量は m_A, m_B, m_C [kg]である。台車Aに水平右向きに力Fを加えたところ、3台の台車は一体となって運動した。台車Aが台車Bを押す力を F_{BA} 、台車Bが台車Cを押す力を F_{CB} とする。次の問いに答えよ。
 1. 作用している力を図示せよ。
 2. 台車Aの運動方程式を書け。また、言葉で説明せよ。
 3. 台車Bの運動方程式を書け。また、言葉で説明せよ。
 4. 台車Cの運動方程式を書け。また、言葉で説明せよ。
 5. 全体の加速度と力 F_{BA} 、 F_{CB} を求めよ。

解答例

1. 各自描くこと。
2. $m_A a = F - F_{BA}$

台車Aには力Fと力 F_{AB} が作用している。力Fは右向き、力 F_{AB} は左向きである。作用反作用の法則から $F_{AB} = -F_{BA}$ であるから、台車Aに作用している合力(正味の力)は $F - F_{BA}$ である。台車Aの質量は m_A であるから未知の加速度を a として運動方程式をたてると、

$$m_A a = F - F_{BA} \text{ となる。}$$

2. 14e: 練習問題e

1. 滑らかな平面上を質点 (質量 m [kg]) が運動している。質点に力は作用していない。時刻 $t=0$ のときに原点を通過した。また、その時の速度は (v_x, v_y) [m/s] であった。 t [s] 後の質点の速度と位置を求めよ。
2. 滑らかな直線レール上 (x 軸と同じ方向) に、質量 10 [kg] の台車をおいた。今、力 20 [kg m/s²] を加えて台車を右向きに引く。最初の位置は $x=10$ [m]、速度 $v=5$ [m/s] であった。引き始めた時刻をゼロとして、 t [s] 後の台車の速度 v 、位置 x を求めよ。
3. 滑らかな平面上を質点 (質量 m [kg]) が運動している。質点には x 軸から y 軸に向かって 45 度の方向に力 F [kg m/s²] が作用している。時刻 $t=0$ のときに原点を通過した。また、その時の速度は $(0,0)$ [m/s] であった。 t [s] 後の質点の速度と位置を求めよ。
4. 問題2の台車に乗った人が問題3の質点を見た。時刻 t [s] での質点の (相対) 速度を求めよ。
5. 半径 r [m] の円周上を一定の角速度 ω [rad/s] で円運動している質量 m [kg] の質点がある。質点に作用している力の向きと大きさを各瞬間毎に求めよ。時刻 $t=0$ [s] には質点は $(r,0)$ にいた。

5 日目 (5/17)

2. 2 慣性質量と重力質量

- **慣性質量**

- 運動の変化の起こりにくさの目安
- 運動の変化の様子を観察によって

- **重力質量**

- 万有引力の源
- 力の測定によって

- **実験的には同じ値を持つ**

- 物理は実験に基礎をおいた学問

2. 21万有引力

- 万有引力の法則

- 2つの質点の質量を m, M 、質点間の距離を r とする。この質点間には m と M の積に比例し、 r の2乗に反比例する力で引き合っている。

大きさ : $F = G \frac{mM}{r^2}$ $G = 6.67 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$

向きも一緒に表すと : $\vec{F} = - G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

$\frac{\vec{r}}{r}$: $\vec{r}$ と平行、向きが同じで大きさ1のベクトル

2. 2 重力場

- 特別な性質を持った空間＝場

- ここでは「重力場」を考えます

物体 (質量 m) をこの空間に置くと、鉛直下向きに力 mg を受ける。

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$\vec{g}$: 鉛直下向きで、

大きさはそこでの重力場の強さ

g は重力加速度と言い、地表では約 $9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$

地球の半径を R 、質量を M とすると、

$$\vec{F} = G \frac{mM}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = m \left(G \frac{M}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad \therefore \vec{g} = G \frac{M}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}$$

2. 3 静電気力と電場

- クーロンの法則

- 2つの点電荷 q, Q [c]の間にく静電気力 F の大きさは q と Q の積に比例し、点電荷間の距離 r の2乗に反比例する。
- 注意: $qQ < 0$ ならば引力、 $qQ > 0$ ならば斥力

$$\vec{F} = k \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad k = 9.0 \times 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2]$$

- 電場

- 電荷 q を置くと力を受ける空間

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

2. 3a: 練習問題a

●万有引力

- 地球の半径は 6.38×10^6 [m]、富士山の高さは 3776 [m] である。富士山頂での重力加速度と地表における重力加速度の大きさの比を求めよ。

地球の半径を R 、質量を M とおく。

地表での重力加速度 g の大きさは

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

高さ h での重力加速度 g_h の大きさは

$$g_h = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

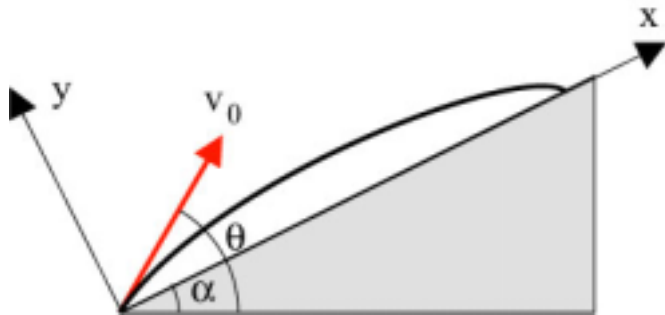
ここで比を取ると、

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

数値を代入すると、比は 0.999 になる。

2. 3b: 練習問題b1

- ボールを水平面に対して傾斜角 α の斜面に向けて、初速度 v_0 で水平となす角 θ で斜め上方に投げた。
 1. 斜面に沿ったボールの飛距離を求めよ。
 2. 飛距離が最大になる角度 θ を求めよ。



加速度は $(-g \sin \alpha, -g \cos \alpha)$

初速度は $(v_0 \cos(\theta - \alpha), v_0 \sin(\theta - \alpha))$

$t = 0$ における位置は $(0, 0)$

t [s]後の速度は

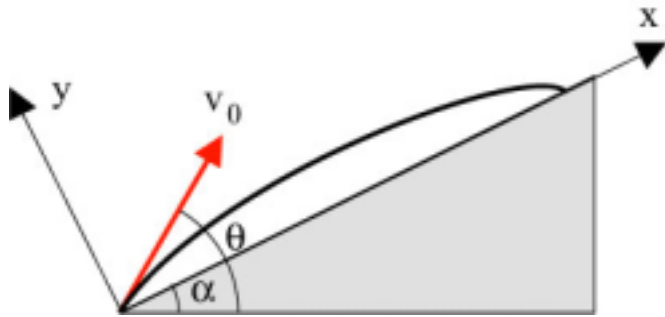
$$(v_0 \cos(\theta - \alpha) - gt \sin \alpha, v_0 \sin(\theta - \alpha) - gt \cos \alpha)$$

t [s]後の位置は

$$\left(v_0 t \cos(\theta - \alpha) - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha, v_0 t \sin(\theta - \alpha) - \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha \right)$$

2. 3b: 練習問題b2

- ボールを水平面に対して傾斜角 α の斜面に向けて、初速度 v_0 で水平となす角 θ で斜め上方に投げた。
 1. 斜面に沿ったボールの飛距離を求めよ。
 2. 飛距離が最大になる角度 θ を求めよ。



$y = 0$ となる時間は

$$t = 0, \frac{2v_0 \sin(\theta - \alpha)}{g \cos \alpha}$$

その時の x の値は

$$x = 0, \frac{2v_0^2 \sin(\theta - \alpha) \cos \theta}{g \cos^2 \alpha}$$

最大値を与える θ は

$$\frac{d}{d\theta} \frac{2v_0^2 \sin(\theta - \alpha) \cos \theta}{g \cos^2 \alpha} = 0 \text{ より}$$

$$\cos(2\theta - \alpha) = 0$$

2. 3c: 練習問題c1

- モンキーハンティング: 高さ h [m]の木にぶら下がっているサルPに向けて初速 v_0 で小球Qを発射した。サルPは発射の音に驚いて、手を離して自由落下を始めた。はじめのPQ間の水平距離は l (エル) [m]とする。重力加速度を下向きに g として以下の設問に答えよ。

1. サルから小球を見たときの小球の速度を求めよ。

小球Qの最初の位置を原点として、サルPの最初の位置が (l, h) となるように座標軸を取る。また、小球の投げ上げる角度を θ ($\tan \theta = h/l$)とする。

サルPの運動は

初速度 $(0, 0)$ 、加速度 $(0, -g)$ 、

最初の位置 (l, h) だから

t [s]後には、速度 $(0, -gt)$ 、

位置 $(0, h - \frac{1}{2}gt^2)$ となる。

サルPから見た小球の速度は

$$(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - gt) - (0, -gt) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$$

小球Qの運動は

初速度 $(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ 、加速度 $(0, -g)$ 、

最初の位置 $(0, 0)$ だから

t [s]には、速度 $(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - gt)$

位置 $(v_0 t \cos \theta, v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2)$ となる。

2. 3c: 練習問題c2

2. 小球がサルに当たる初速度の条件を求めよ。

サルQが地面に達する前に小球Qが水平方向に l (エル) だけ動けばいいと考える

サルPが地上に落下するまでの時間は その間に小球が動く水平方向の距離

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \text{ より、} \quad t = \sqrt{2h/g} \quad v_0 \sqrt{2h/g} \cos \theta$$

よって、 $v_0 \sqrt{2h/g} \cos \theta > l$

ならば小球QはサルPに当たる。

$\cos \theta$ を l, h で表すと、
$$v_0 \geq \sqrt{\frac{g(l^2 + h^2)}{2h}} \quad \text{となる。}$$

3. 小球が水平方向からサルに当たるときの初速度を求めよ。

小球Qの持つ鉛直方向 (y方向) の速度がゼロの時に当たると考える。

この時間は

このときまでの小球Qの水平方向の移動距離

$v_0 \sin \theta - gt = 0$ より求まる。
$$v_0 \frac{v_0 \sin \theta}{g} \cos \theta = l$$

$\sin \theta, \cos \theta$ を l, h で表して変形すると、
$$v_0 = \sqrt{\frac{g(l^2 + h^2)}{h}}$$

2. 3d: 練習問題d1

例題 2.8 図 2.17 のように，平行な 2 枚の極板 A, B 間に，極板に垂直で A から B に向かう一様な電場 (強さ E) をかけた．これに負電荷 $-e$ をもつ電子 (質量 m) を点 O から電場に垂直に速さ v_0 で入射させる．電場がない場合には，電子は点 P を通過し，入射方向に垂直で点 P より距離 L だけ離れた蛍光面 C 上の点 Q に到達する．座標軸を図 2.17 のようにとる．

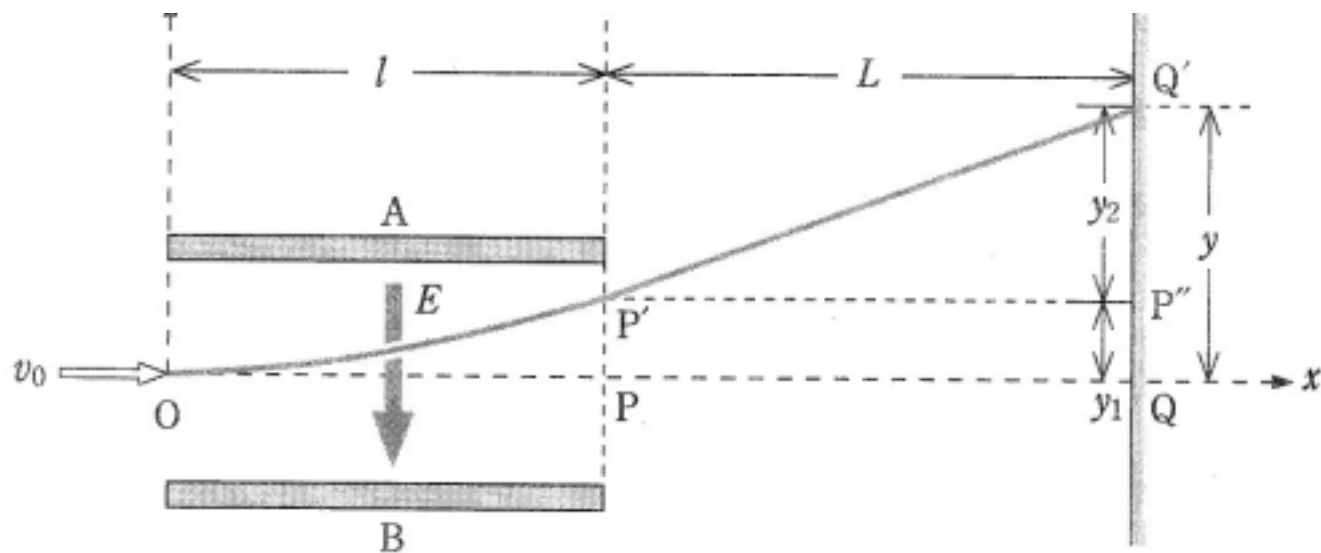


図 2.17

2. 3d:練習問題d2

- (1) この電子が極板間で電場から受ける力の
- (イ) 大きさを求めよ。
 - (ロ) 向きを示せ。
- (2) 電場の幅 (OP 間の距離) を l として、この電子が
- (イ) 電場を通り抜けるのに要する時間、
 - (ロ) 電場を通り抜けるときの電子の位置 P' の P からの距離 y_1 ,
 - (ハ) 電場を通り抜けた後の速さ、
- を求めよ。
- (3) 電子が極板 A, B 間にあるとき、電子の軌道の方程式を求めよ。
- (4) 電場を通り抜けた電子は蛍光面 C 上の点 Q' に到達した。このとき点 Q, Q' 間の距離は y であった。この電子の比電荷 e/m を求めよ。

6 日目 (5/24)

3. 振動

- 振動とは

- 同じことが何回も繰り返される運動
- 世の中の多くの運動が振動

- 単振動

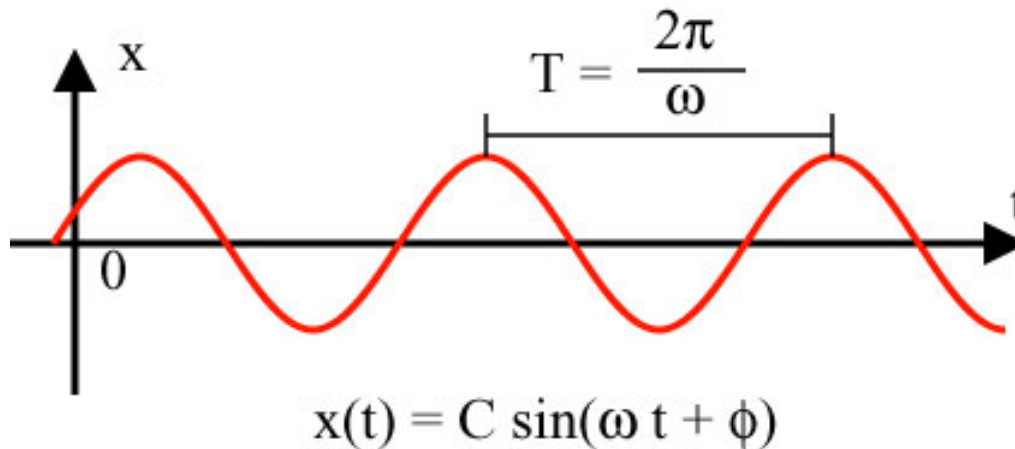
- もっとも単純な振動
- 基本的な振動

- 等速円運動と単振動

- 2種類の周期的な運動の間の関係は？

3. 1 単振動

- 単振動とはこんな運動



—位置 x が $\sin$ 関数で表される

- 振幅 C 、角速度 ω 、初期位相 ϕ によって決まる。
- 周期 $T = 2\pi/\omega$ 、振動数 $f = 1/T$

3. 1 1 単振動の運動方程式

- 質点 (質量 m) が単振動 $x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$ を行っている場合を考えます。

速度は？

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dC \sin(\omega t + \phi)}{dt} = C\omega \cos(\omega t + \phi)$$

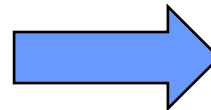
加速度は？

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dC\omega \cos(\omega t + \phi)}{dt} = -C\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \\ &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

質点に作用している力は？ $F = -m\omega^2 x$

運動方程式は？

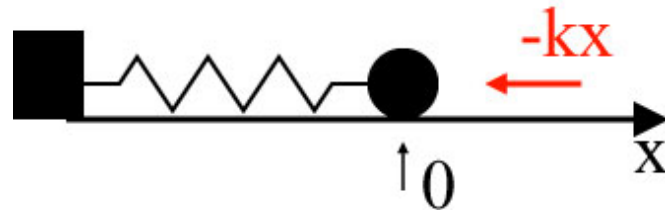
$$ma = -m\omega^2 x$$



$$a = -\omega^2 x$$

3. 12バネとおもりの運動

- バネ定数 k のバネの一端を固定し、もう一方の端に質量 m の質点をつけます。



バネとは？

のばすと縮まろうとし、縮めるとのびようとします。

力はバネの長さの変化に比例します。比例定数をバネ定数と言う。

$$F = -kx$$

運動方程式は？

$$ma = -kx$$



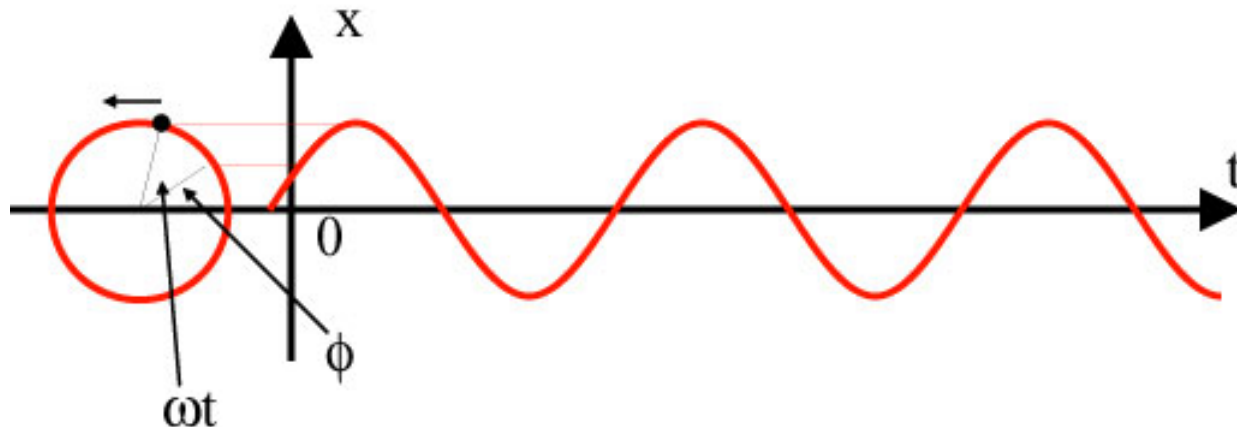
$$ma = -m\omega^2 x$$

$$k = m\omega^2 \longleftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = C \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

3. 1 3 単振動と等速円運動

- 単振動と等速円運動の間の関係を見てください。
 - 円運動をいろいろな角度から見ると、よく分かります。

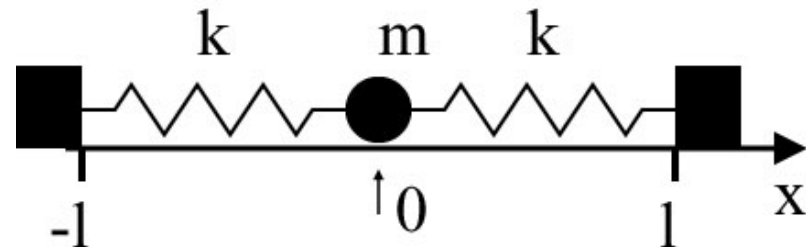


- 円運動はx方向とy方向に単振動している

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$$

3. 14a: 練習問題a

- 滑らかな水平面上で一端を固定したバネ定数 k [N/m] のバネの他端に質量 m [kg] の質点をつけた。時刻 $t=0$ で
 1. 自然の長さから a だけのばして、静かにはなしたとき、
 2. 自然の長さの位置でバネの方向に初速 v_0 を与えたとき、のそれぞれの場合について、質点の運動の様子を数式で表せ。
- 自然長 l (エル) [m]、バネ定数 k [N/m] の二つの同じバネがある。滑らかな水平面上で、質量 m [kg] のおもりの両側にこれらのバネを固定した。そして、バネを図のように壁に固定する。いま、おもりを時刻 $t = 0$ [s] で中心から A [m] だけずらして、離すとおもりは単振動を始めた。
 1. おもりの変位が x [m] のときにかかる力 F [N] を求めよ。
 2. おもりの運動方程式を書け。
 3. 周期を求めよ。
 4. 任意の時刻におけるおもりの変位 $x(t)$ [m] を求めよ。



3. 14b: 練習問題b

- バネ定数 k_1 と k_2 [N/m] の自然長が等しい二つのバネがある。

1. 二つのバネを直列につないだとき、
2. 二つのバネを並列につないだとき、

のそれぞれの場合について、バネ全体としてバネ定数を求めよ。

- 上端を固定したバネ定数 k [N/m] のバネの下端に質量 m [kg] のおもりを吊るした。

1. バネの自然長からの伸び x_0 [m] はいくらか？
2. おもりをつりあいの位置よりさらに、 $2x_0$ [m] だけ引き下げて、静かに手を離した。このとき、おもりがつりあいの位置に最初に戻るまでの時間を求めよ。
3. つりあいの位置におけるおもりの速さを求めよ。

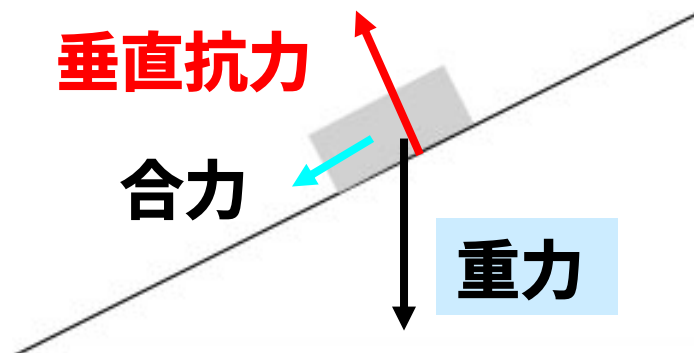
3. 14c: 練習問題c

- 長さ1.2 [m]の糸の先に質量0.2 [kg]のおもりをつけ、糸が鉛直と常に角度60度の角をなすように、おもりを水平面内で円運動させる。
 1. おもりに働いている力をすべて図示せよ。
 2. おもりの回転周期を求めよ。重力加速度を9.8 [m/s²]とする。
- 振幅 a_0 [m]、角速度 ω [rad/s]で単振動している質量 m [kg]の質点がある。すなわち、 $x(t) = a_0 \sin \omega t$ である。時刻 t [s]における速度を求めよ。また、時刻 t [s]において質点に作用している力を求めよ。
- 質量 0.1 [kg]の物体が振幅 0.5 [m]、周期 4 [s]のx軸方向に単振動をしている。原点における物体の速さを求めよ。
- 円運動は $(x,y)=(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ と表すことができた。それでは、 $(x,y) = (r \cos \omega t, r \cos \omega t)$ のように位置ベクトルが時間的に変化する運動はどのような運動か？また、任意の時刻 t [s]における加速度と速度を求めよ。

7 日目 (5/31)

4. 1 束縛運動

- 束縛運動とは
 - 制限 (束縛) された条件の下での運動
- 束縛力
 - 束縛運動にするために必要な力
- 例1：摩擦のない斜面の運動



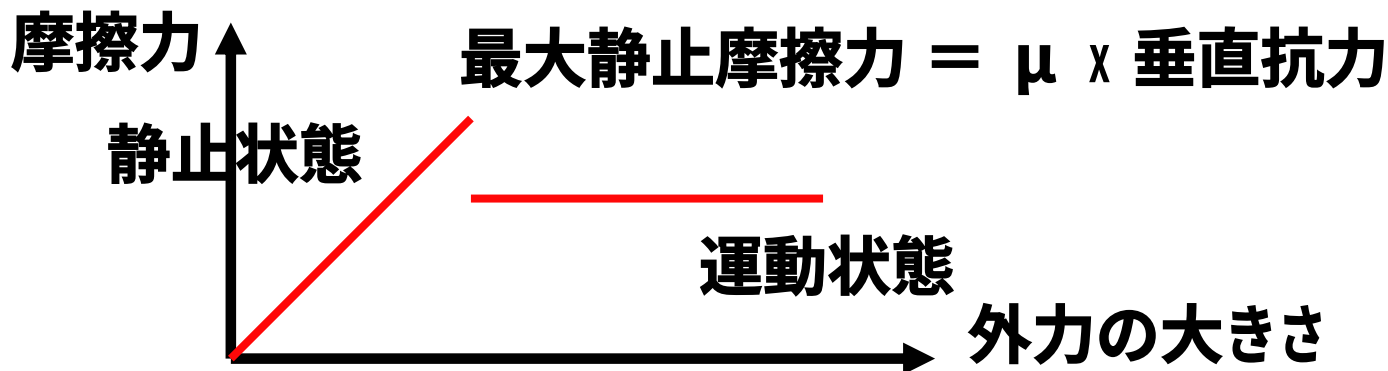
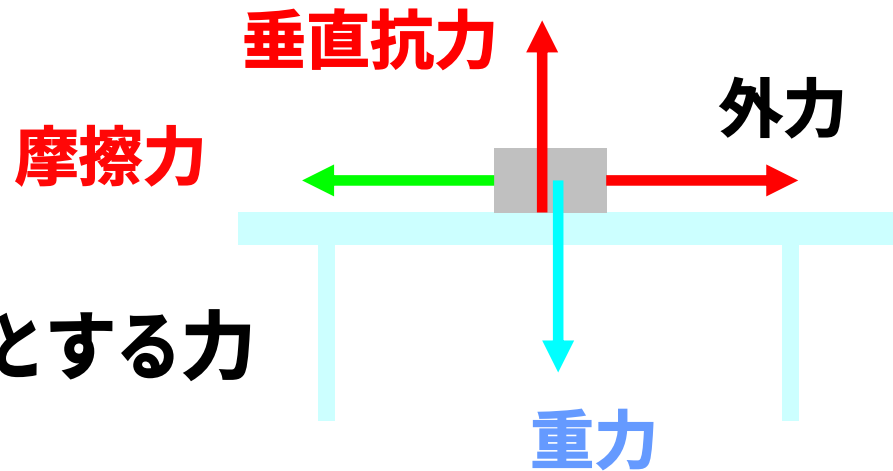
4. 1.1 摩擦のある面を滑る物体の運動

- 垂直抗力

- 物体が面にめり込まないようにする力

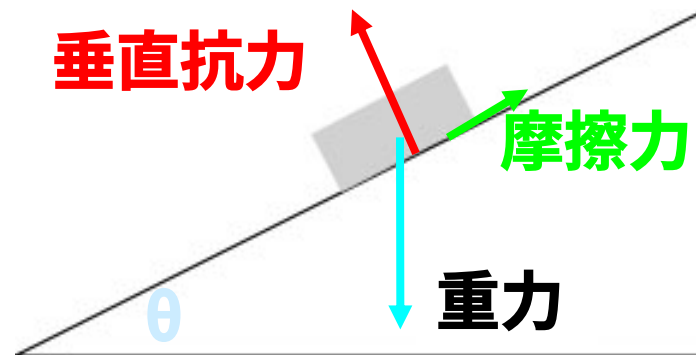
- 摩擦力

- 動きを妨げようとする力



4. 2斜面を滑る物体の運動

- 斜面に置かれた物体に作用している力は？



- 力のつりあい

- 斜面に垂直

$$N - mg \cos \theta = 0$$

- 斜面に平行

$$F_f - mg \sin \theta = 0$$

- 滑り出す瞬間の角度 θ は？ $\tan \theta_0 = \mu$

$$F_{f0} - mg \sin \theta_0 = 0, N_0 - mg \cos \theta_0 = 0, F_{f0} = \mu N_0$$

4. 3単振り子

- 動径方向

- 糸の張力と重力の成分
- つりあっている

- 接線方向

- 重力の成分 $F = -mg \sin \theta$
- 運動方程式は

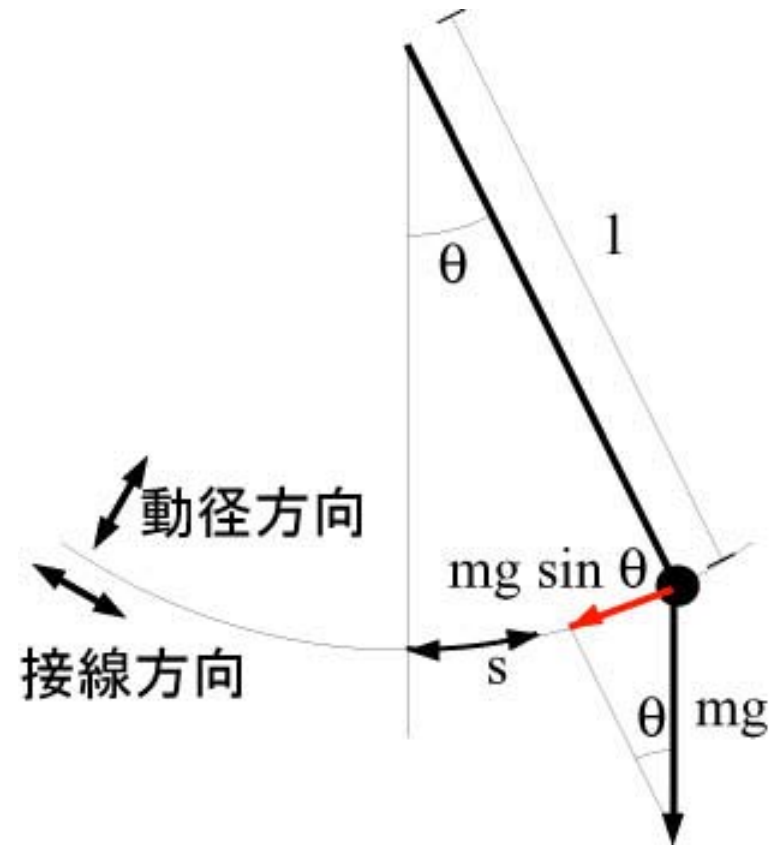
$$ma = -mg \sin \theta$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \sin \theta \approx \theta = \frac{s}{l}$$



$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -m \left(\frac{g}{l} \right) s$$

ω^2



4. 4a: 練習問題a

- A (質量 $3m$ [kg]) , B (質量 m [kg]) の2つの板を水平な台の上に重ねておいた。AB間とBC間の静摩擦係数は、それぞれ 2μ と μ である。Aに大きさ F [N] の力を右向き水平方向に加える。重力加速度を g [m/s²] として、以下の問題に答えよ。
 1. 力 F を大きくしていくと、A, B は一体となって動き出した。このときの F の大きさを求めよ。
 2. BC間の動摩擦係数は $\mu/3$ である。設問1で求めた力がそのまま作用しているとき、A, Bの加速度を求めよ。
 3. さらに力 F を大きくしていくと、AとBがすべり始めた。このときの力 F の大きさを求めよ。



4. 4b: 練習問題b

- A (質量 M [kg]) , B (質量 m [kg]) の2つの板を水平な床の上に重ねておいた。Aに水平方向右向きに大きさ F [N] の力を加える。床とAの間の動摩擦係数は μ_1 、AとBの間の静止摩擦係数は μ_0 、動摩擦係数は μ_2 である。重力加速度を g [m/s²] として、以下の問題に答えよ。
 1. 最初AとBは一体となって運動した。 μ_0 と μ_1 の間の関係を求めよ。
 2. さらに、力を増すと、AとBはすべりながら床の上を運動するようになった。AとBの加速度の大きさを求めよ。

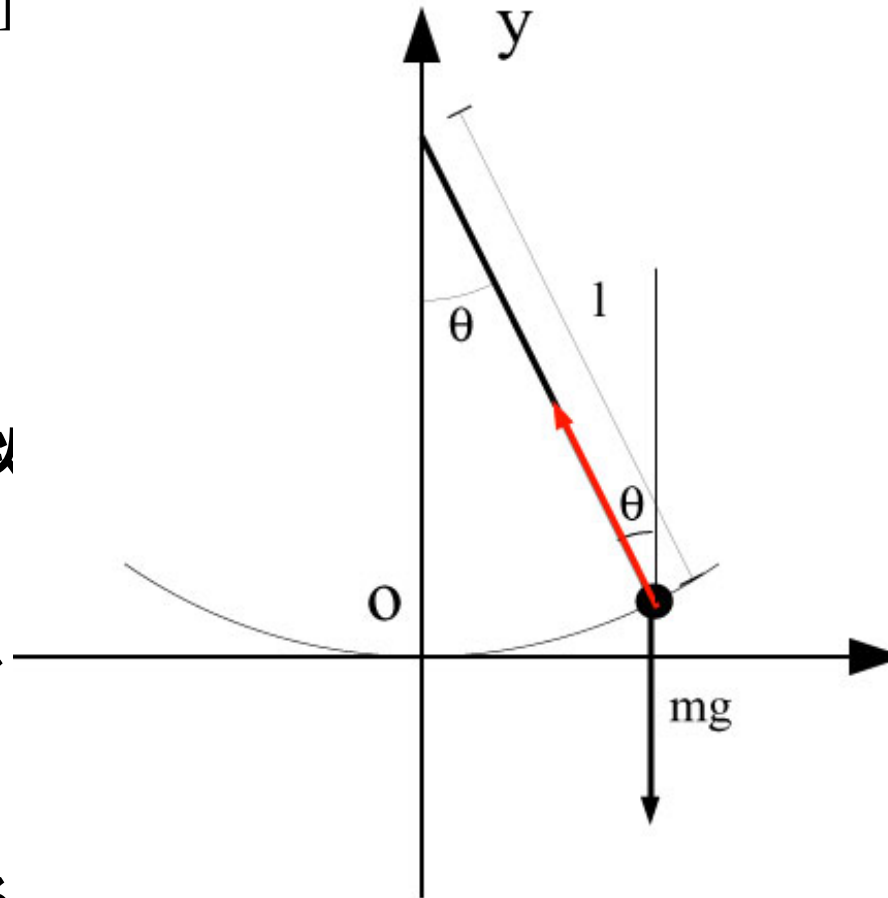


4. 4c: 練習問題C

- 長さ l (エル) [m]、おもりの質量 m [kg] の単振り子を考える。糸の張力の大きさを T として以下の問題に答えよ。ただし、図のように、座標軸を取る。

1. x 軸方向の運動方程式を求めよ。
2. y 軸方向の運動方程式を求めよ。
3. θ が小さい場合、 $\sin \theta = \theta$ と近似できることを用いて、1の運動方程式を簡単化せよ。
4. θ が小さい場合、 $\cos \theta = 1$ と近似できることを用いて、2の運動方程式を簡単化せよ。

ただし、重力加速度を g [m/s²] とする



7 日目 (6/7)

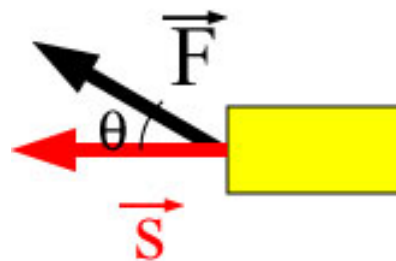
5 仕事とエネルギー

- 仕事 W の定義

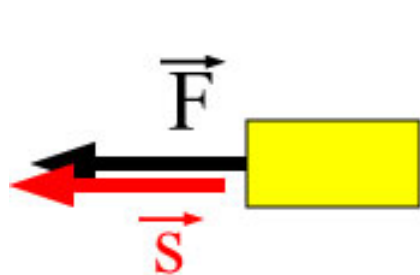
- 力と移動距離の内積

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

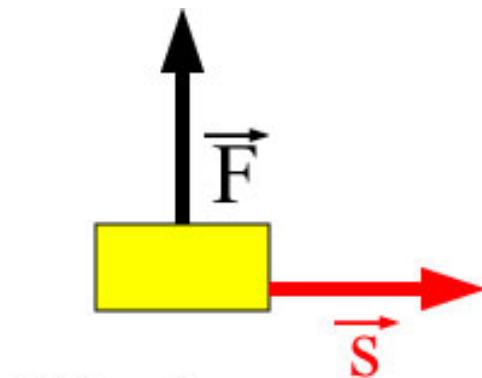
- 単位は $[\text{N} \cdot \text{m}] = [\text{kgm}^2/\text{s}^2]$
- この単位を $[\text{J}]$ と呼ぶ



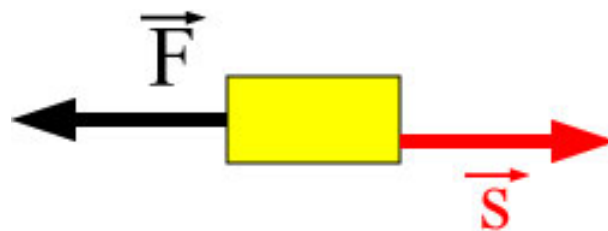
$$W = Fs \cos \theta$$



$$W = Fs$$



$$W = 0$$



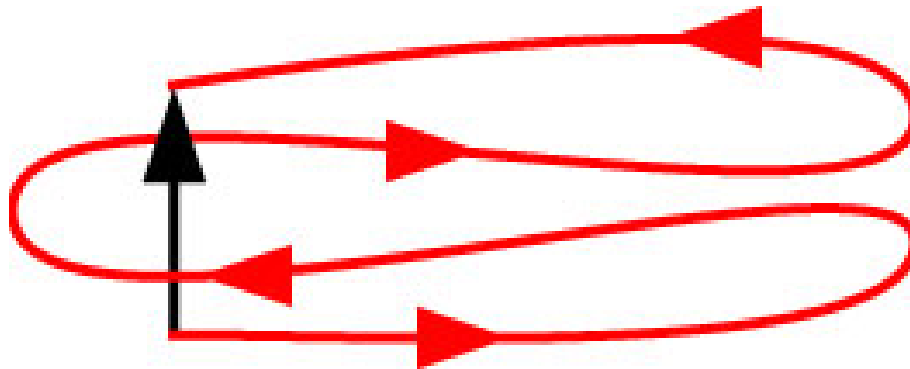
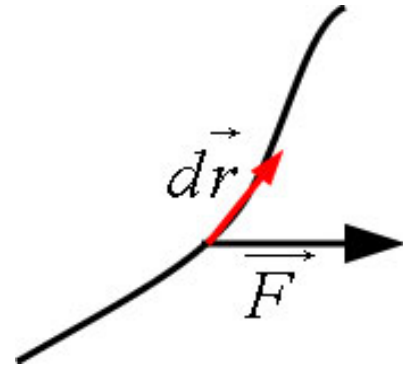
$$W = -Fs$$

5.1 曲がった経路に沿った仕事

- 仕事 W の定義

- 力と移動距離の内積

$$W = \int_{\text{start}}^{\text{goal}} F ds \cos \theta = \int_{\text{start}}^{\text{goal}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



- 仕事は経路によって異なる場合がある

5.2 保存力

- 仕事の総量が経路に依存する場合としない場合

- 依存しない場合: 力は保存力
- 依存する場合: 力は保存力ではない

- 重力の場合

重力下で質量 $m[\text{kg}]$ のものをSからGまで動かすとき

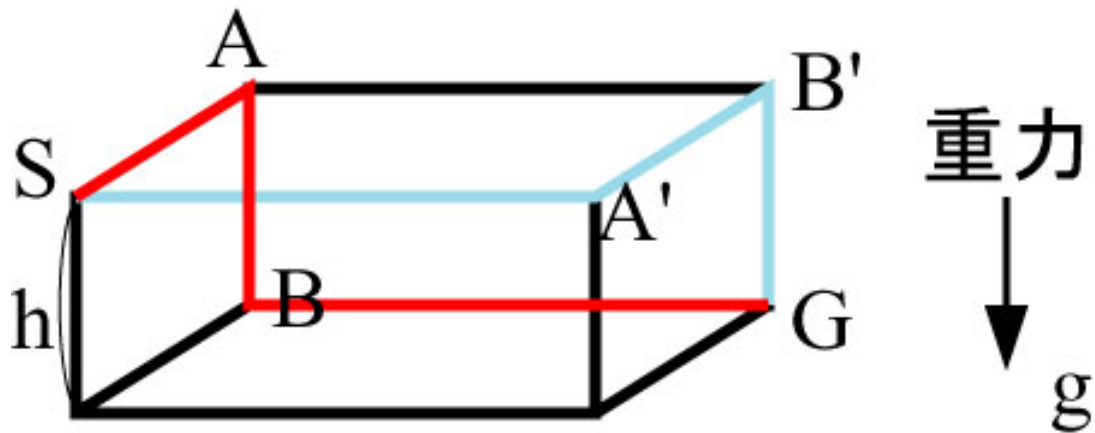
- 経路SABG

- SA: 仕事ゼロ
- AB: mgh
- BG: 仕事ゼロ

- 経路SA'B'G

- SA': 仕事ゼロ
- A'B': 仕事ゼロ
- B'G: mgh

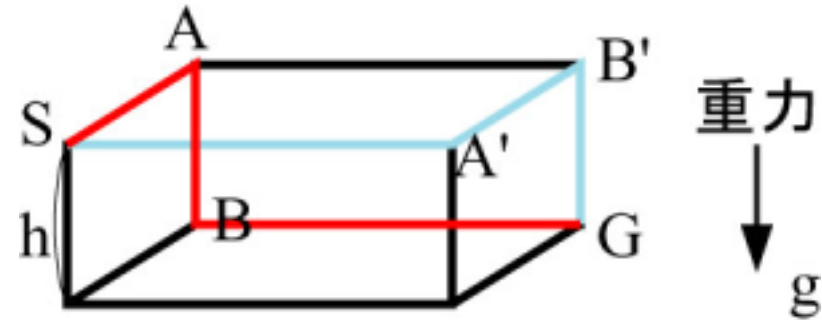
- 重力による仕事は同じ



5.21ポテンシャル

位置エネルギーの差は経路によらず、位置だけに依存する

- 重力：保存力
 - 位置エネルギー：ポテンシャル
- 保存力を考えて、そのポテンシャル U を次のように定義する
- 単位は[J]、仕事と同じ



$$U(\vec{r}_S) - U(\vec{r}_G) = - \int_G^S \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

5.22 保存力とポテンシャル

重力と位置エネルギー

- xy 面内: 位置エネルギーは一定

位置を変えるために仕事をする必要がない
力は働いていない

- z 方向: 位置エネルギーは変化する、 mgh

位置を変えるために仕事をする必要がある
力が働いている

位置エネルギーの勾配  z 方向に mg  重力

- ポテンシャルの勾配を計算すると、保存力が求まる
 - x 、 y 、 z 方向を考えると保存力の x 、 y 、 z 成分が求まる

5.23 保存力とポテンシャル

x、y、z方向の勾配を計算のための特別な記号

$$\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi, \frac{\partial}{\partial y} \phi, \frac{\partial}{\partial z} \phi \right)$$

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi, \frac{\partial}{\partial y} \phi, \frac{\partial}{\partial z} \phi \right)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

5.3 運動エネルギーと仕事

速度 v_0 、質量 m の物体が一定の力 F を受けて静止した

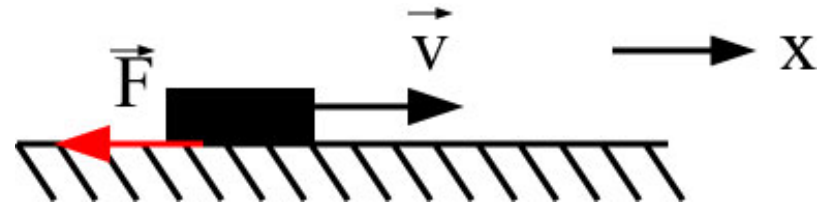
- 1次元の運動を考えましょう

- 運動方程式より、

$$a = -\frac{F}{m}$$

$$v(t) = v_0 - \frac{F}{m}t$$

$$x(t) = v_0t - \frac{F}{2m}t^2$$



静止するまでに動く距離は $L = \frac{1}{2} \frac{m}{F} v_0^2$

力 F による仕事 W は $W = LF = \frac{1}{2}mv_0^2$

- 速度 v_0 、質量 m の物体は外部に仕事をすることができる

- 運動エネルギーと呼ぶ

$$KE = \frac{1}{2}mv_0^2$$

単位は[J]

5.3 1 運動エネルギーと仕事

仕事率P

- 単位時間内にした仕事
- 速度 v_0 で運動している物体に力 F が作用している場合

摩擦のある面を一定の力 F で物体を押すと、
一定の速度 v_0 で運動した (直線運動を考える)



dt という時間にした仕事 dW は動いた距離 ($v_0 dt$) と力 F の積

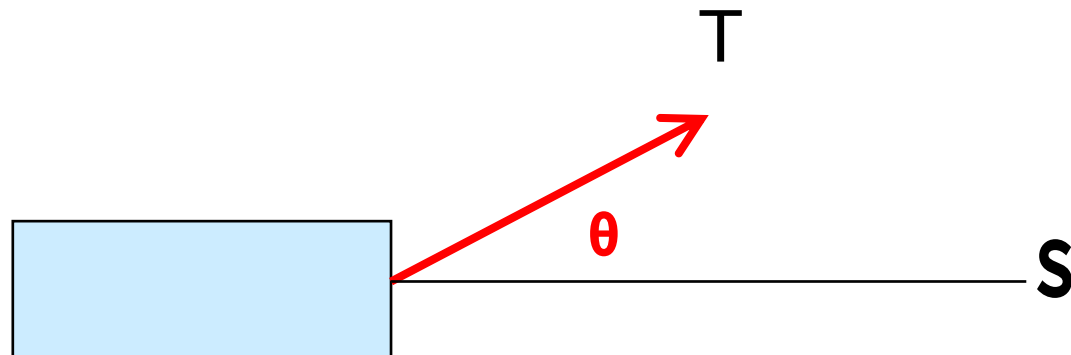


この仕事 $dW = Fv_0 dt$ を時間 dt で割ると仕事率 P が求まる

- $P = Fv_0$

5. 3 2 : 練習問題a

- 質量 2.0 kg の物体が水平な床に置かれている。その物体に大きさ 10 N の一定の力を水平方向に加え続けて、その力の向きに 3.0 m 動かした。このとき、加えた力、重力、垂直効力にがした仕事はいくらか？
- 動摩擦係数 μ' の水平面上に質量 m の物体が置かれている。これに糸をつけて水平面から θ 右上向きに大きさ T の一定の張力を加え続けて、物体を面に沿って s だけ動かした。
 1. 糸の張力を求めよ。
 2. 張力のした仕事を求めよ。
 3. 動摩擦力のした仕事を求めよ。



5. 3 2 : 練習問題b

- 水平面に置かれた質点に位置に依存した力 (ベクトルであらわすと、 $(k,0)$ となる) が作用している。この質点を原点O から点P(a,b)まで動かしたとき、その力がした仕事を求めよ。
 1. 経路 $(0,0) \rightarrow (0,b) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
 2. 経路 $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
 3. 経路 $(0,0) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
- 作用している力が (k_y, k') の場合はどうなるか。
 1. 経路 $(0,0) \rightarrow (0,b) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
 2. 経路 $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
 3. 経路 $(0,0) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
- 作用している力が $(-k_x, -k_y)$ の場合はどうなるか。
 1. 経路 $(0,0) \rightarrow (0,b) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
 2. 経路 $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。
 3. 経路 $(0,0) \rightarrow (a,b)$ に沿って動く場合。

5. 3 2 : 練習問題c

次の計算を行え。

(1) $\phi = -x$ である。

(a) $\text{grad } \phi$

(b) $\nabla \cdot \phi$

(2) $\phi = -(x + y + z)$ である。

(a) $\text{grad } \phi$

(b) $\nabla \cdot \phi$

(3) $\phi = -xy$ である。

(a) $\text{grad } \phi$

(b) $\nabla \cdot \phi$

(4) $\phi = xyz$ である。

(a) $\text{grad } \phi$

(b) $\nabla \cdot \phi$

5. 3 2 : 練習問題d

- 次の物体の運動エネルギーを求めよ。
 1. 質量 1.5×10^3 kgの自動車が時速72kmで走っている。
 2. 質量0.01kgの弾丸が速さ1000m/sで飛んでいる。
- 次の物体が壁にぶつかって静止した。その物体が壁に与えた仕事とそのときの力を求めよ。
 1. 質量 1.5×10^3 kgの自動車が初め時速36kmで走っていた。壁にぶつかってから一定の加速度で減速し1秒後に静止した。
 2. 質量0.01kgの弾丸が速さ2000m/sで飛んでいた。壁にぶつかってから一定の加速度で減速し0.1秒後に静止した。

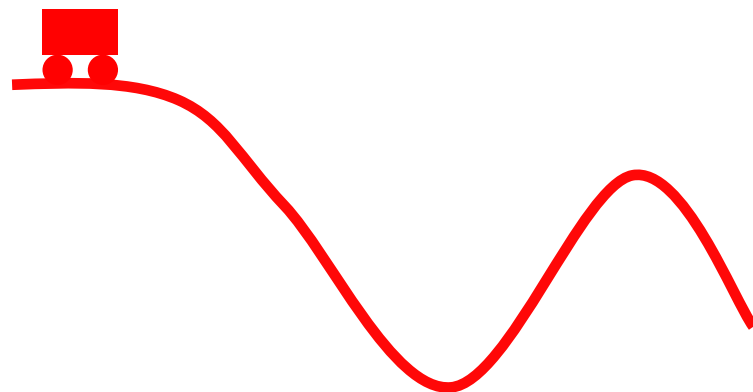
7 日目 (6/14)

5.4 力学的エネルギー保存の法則

力学的エネルギー (重力が働いている場合)

●運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$

●位置エネルギー mgh



 和は一定

非保存力がなかったり、非保存力が仕事をしない場合は、力学的エネルギー (運動エネルギーと位置エネルギー) の和は保存される。

5.5 一般的なエネルギー保存の法則

●さまざまなエネルギー

- 運動エネルギー
 - 位置エネルギー
 - 熱エネルギー
 - 化学エネルギー
 - 光エネルギー
 - 電気・磁気エネルギー
 - 質量エネルギー
- などなど

総和は一定

エネルギーはさまざまな種類があります。これらのエネルギーは互いに変化することがありますが、その総和は一定です。

5.6 いろいろなポテンシャル

- ばね

- 位置 (弾性) エネルギー

- 力

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) = -kx$$

- 重力

- 位置エネルギー

- 力

$$U(x, y, z) = mgz$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} U, -\frac{\partial}{\partial y} U, -\frac{\partial}{\partial z} U\right) = (0, 0, -mg)$$

- 万有引力

- 位置エネルギー

- 力

$$U(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r}$$

$$\vec{F}(x, y, z) = -G \frac{Mm}{r^3} (x, y, z)$$

5. 7: 練習問題a

- 傾斜角 θ の滑らかな斜面に沿って、質量 $m[\text{kg}]$ の小球を初速度 $v_0[\text{m/s}^2]$ で上向きに打ち出した。小球は距離 $L[\text{m}]$ だけ滑って一旦静止し、また滑り落ち始めた。 v_0 と L の間の関係を求めよ。
- 質量 $m[\text{kg}]$ の物体を摩擦のある水平面で運動させた。初速度は $v_0[\text{m/s}^2]$ で距離 $L[\text{m}]$ だけ滑って静止した。動摩擦係数を μ' 、重力加速度を g とする。
 1. 摩擦力が物体にした仕事はいくらか。
 2. 運動を始めたときの運動エネルギーはいくらか。
 3. 初速度はいくらか。
- バネ定数 $m\omega^2$ のバネに質量 m の物体を取り付けた。この質点は振幅 a の単振動している。質点の位置を x で表す。ただし、単振動の中心を原点とする。
 1. 時刻 t における $x(t)$ を求めよ。ただし時刻 $t=0$ において、 $x(0)=a$ であった。
 2. 時刻 t における質点の速度を求めよ。
 3. 時刻 t における運動エネルギー $KE(t)$ を求めよ。
 4. 時刻 t における位置 (弾性) エネルギー $U(t)$ を求めよ。
 5. 時刻 t における $KE(t)+U(t)$ を求めよ。

5. 7 : 練習問題b

次の計算をおこなえ。

(1) $\vec{F} = -k\vec{r}$ のとき、

$$\nabla \times \vec{F} =$$

(2) $\vec{F} = (kx(x^2 + y^2), ky(x^2 + y^2))$ のとき、

$$\nabla \times \vec{F} =$$

(3) $\vec{F} = -k(0, 0, z)$ のとき、

$$\nabla \times \vec{F} =$$

(4) $\vec{F} = -k(x, 0, 0)$ のとき、

$$\nabla \times \vec{F} =$$

(5) $\vec{F} = -k(x, y, 0)$ のとき、

$$\nabla \times \vec{F} =$$

5. 7: 練習問題c

- ある空間に質量 $m[\text{kg}]$ の物体を置くと、力 $(m\alpha, 0, 0)$ の力が作用した。この力に対するポテンシャル $U(x, y, z)$ を求めよ。
- ある空間に質量 $m[\text{kg}]$ の物体を置くと、力 $(0, m\beta, 0)$ の力が作用した。この力に対するポテンシャル $U(x, y, z)$ を求めよ。
- 質量 $m[\text{kg}]$ の物体が高さ $z=h[\text{m}]$ の位置にある。この物体をそっと放すと重力によって落ちる。地面 $z=0[\text{m}]$ における速度を異なった方法で計算する。重力加速度を g とする。
 1. 高さ $z=h$ における位置エネルギーはいくらか。
 2. 力学的エネルギーの保存則より、 $z=0$ における速さを求めよ。
 3. 運動方程式を立てて、 $z=0$ における速度を求めよ。
- 半径 r の滑らかな球の頂点Pに質量 m の質点がある。時刻 $t=0$ に質点に初速 v_0 を水平方向に与えた。質点はこの球面上を滑って点Qに達した。角度 POQ を θ (ただしOは球の中心) とする。球面からの抗力の大きさを N 、重力加速度を g として以下の問いに答えよ。
 1. 接線方向と法線方向の運動方程式を立てよ。
 2. 点Qにおける運動エネルギー KE を θ を用いて表せ。
 3. 点Qにおける質点の速さを求めよ。
 4. 垂直抗力 N がゼロになる角度 θ を求めよ。

7 日目 (6/21)

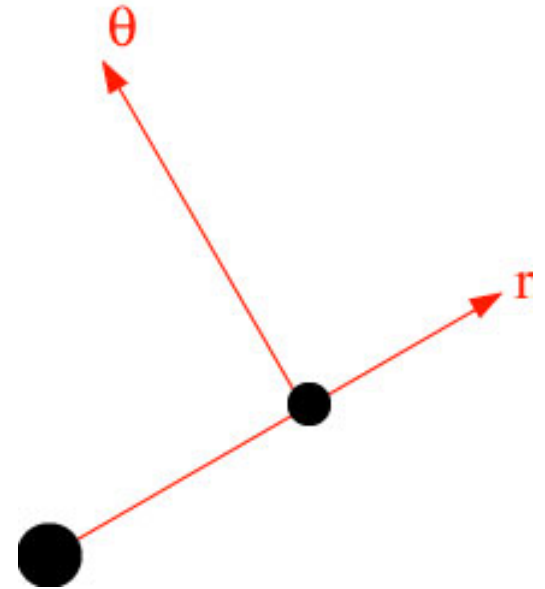
6. 惑星の運動 シミュレーション

● 万有引力

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

2つの質点 m と M を結ぶ
方向に力が作用する。

中心力



● θ 成分の力

$$F = 0$$

● r 成分の力

$$F = -G \frac{mM}{r^2}$$

● θ 方向の運動方程式

$$ma_{\theta} = 0$$

● r 方向の運動方程式

$$ma_r = -G \frac{mM}{r^2}$$

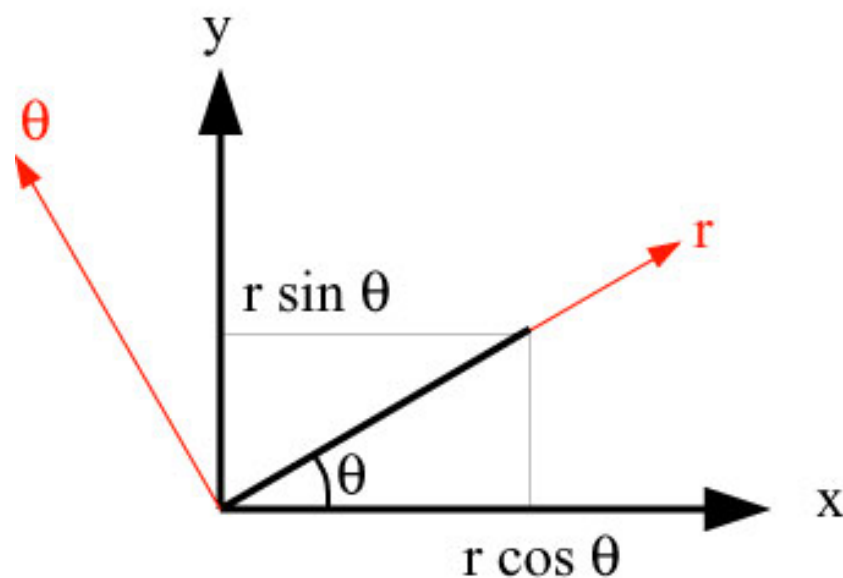
● 位置エネルギー

$$U(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r}$$

●6.01 2次元の極座標系

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



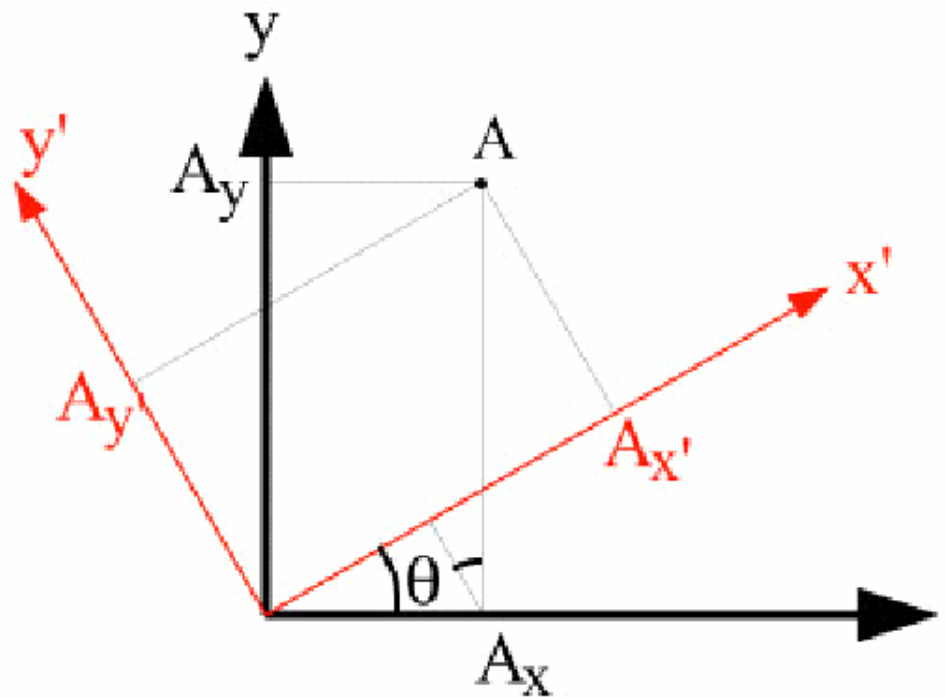
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

6.0 2座標變換



$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

6.03 極座標表示における加速度

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ r \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \end{pmatrix}$$

6. 11 惑星の運動方程式 I

●運動方程式の θ 方向

$$ma_{\theta} = 0$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) = \text{const.}$$



面積速度

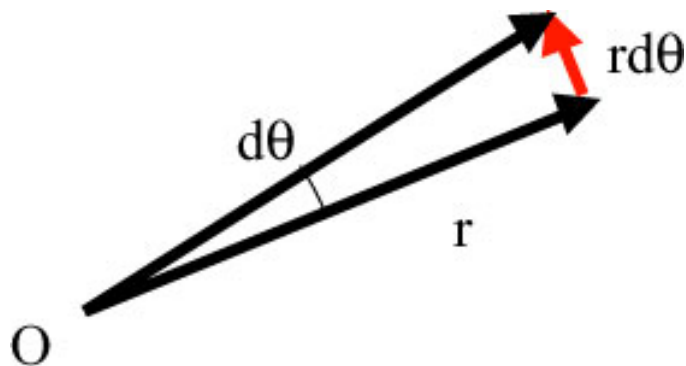
θ 方向の力がない



θ 方向の加速度がない



面積速度が一定



6. 1 2惑星の運動方程式 II

●運動方程式の r 方向

$$ma_r = -G \frac{mM}{r^2}$$



$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -G \frac{mM}{r^2}$$

ここから先は難しいのでパス！

6.13: 練習問題a

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ である。

(1) x と y を時間で微分せよ。

ただし、 $\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$ で表すこと。

(2) 次の計算を行え。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

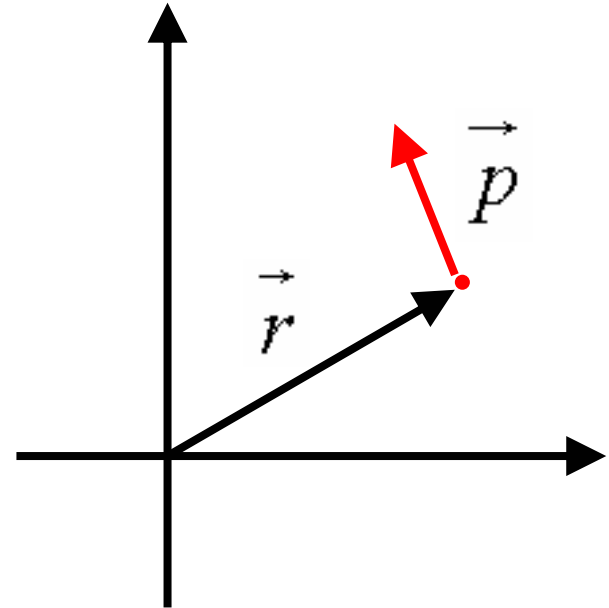
(3) x と y を時間で2回微分せよ。

(4) 次の計算を行え。

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \end{pmatrix}$$

6.13: 練習問題b

角運動量 $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$



- 運動量が (p_x, p_y, p_z) で運動している質点がある。その位置ベクトルは (x, y, z) である。上の式に従って角運動量を計算せよ。
- 質量 m の質点が速度 (v_x, v_y, v_z) で運動している。その質点の位置ベクトルは (x, y, z) である。上の式に従って、角運動量を計算せよ。
- 速さ v で半径 r の等速円運動を行っている質点 (質量 m) がある。その質点の面積速度を求めよ。この円は xy 平面上にある。この質点の持つ角運動量はいくらか。ただし、角運動量の x, y, z 成分 (l_x, l_y, l_z) を求めること。

レポート課題 3

バネ定数 k のバネに質量 m の物体を取り付けた。この質点は x 軸上を振幅 a の単振動している。質点の位置を x で表す。ただし、単振動の中心を原点とする。

- (1) 時刻 t における位置 $x(t)$ を求めよ。ただし時刻 $t=0$ において、 $x(0)=a$ であった。
- (2) 時刻 t における質点の速度を求めよ。
- (3) 時刻 t における運動エネルギー $KE(t)$ を求めよ。
- (4) 時刻 t における位置 (弾性) エネルギー $U(t)$ を求めよ。
- (5) 時刻 t における $KE(t)+U(t)$ を求めよ。

8日目 (6/28)

6.2人工衛星

シミュレーション

- ものを水平に投げます。その速さを増していくと、ものはだんだん遠くに到達するようになります。
- 最後には地球にぶつからなくなります。
- これは落ちないのではなく、永久に落ち続けているのです。

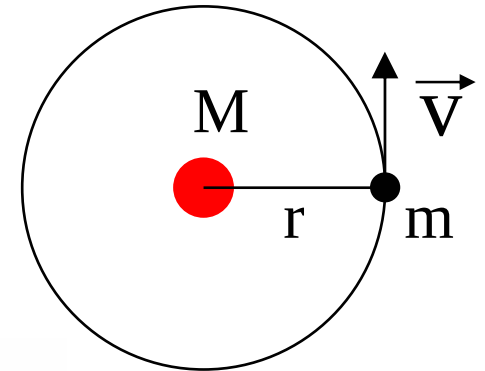
6.21人工衛星

力学的エネルギー保存の観点から

●運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$

●位置エネルギー $-G\frac{Mm}{r}$

→ $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{const.}$



人工衛星には万有引力しか作用していないので、力学的エネルギー（運動エネルギーと位置エネルギー）の和は保存される。

6.22人工衛星

力学的エネルギー保存の観点から

- 第一宇宙速度**：地表すれすれに回る人工衛星の速さ
向心力は重力によって与えられている

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} = mg \quad \longrightarrow \quad v_{10} = \sqrt{gR}$$

- 第二宇宙速度**：地球の重力の影響を受けなくなる速さ
人工衛星が無限のかなたへ飛んでいける速さ
力学的エネルギーの和がゼロになる速さ

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m0^2 - G \frac{Mm}{\infty} = 0$$

$$\longrightarrow v_{20} = \sqrt{2gR}$$

6.3: 練習問題a

- 自転周期が T の惑星 (質量 M) に静止衛星 (赤道上空にあり、自転と同じ周期で回っている) を打ち上げた。惑星の中心から人工衛星までの距離はいくらか？また、人工衛星の速さはいくらか？
- 惑星の周りを人工衛星が楕円軌道を描いて回っている。惑星と人工衛星の距離がもっとも近い時、その距離は r_1 であった。一方、もっとも遠いときは、 r_2 であった。また、それぞれの場所での人工衛星の速さは、 v_1 と v_2 である。
 1. 面積速度一定の法則より、 v_1, v_2, r_1, r_2 の間の関係を求めよ。
 2. 力学的エネルギー保存の法則より、 v_1, v_2, r_1, r_2 の間の関係を求めよ。
 3. 先の二つの式より、 v_2 を求めよ。

6.3：練習問題b

- 半径10kmで質量 $2.3 \times 10^{16} \text{kg}$ の球形の小惑星がある。その上に立っている人が石を水平に投げた。 $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}$ として以下の問いに答えよ。
 1. この小惑星の密度を求めよ。
 2. この石が人工衛星になる最小の速さを求めよ。
 3. この石が無限のかなたへ行く最小の速さを求めよ。
- 地球上で1mの高さジャンプすることができる人がいる。地上での重力加速度を 9.8 m/s^2 、 $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}$ として以下の問いに答えよ。
 1. 地面を蹴った瞬間の鉛直方向の速さを求めよ。
 2. この人が小惑星に行った。自らのジャンプ力で人工衛星になることができる小惑星の質量はいくらか？ただし、小惑星の半径は10kmとする。
 3. 小惑星の半径が20kmの場合はどうか？