

# 目次

11	フィルター	— 61 —
11.1	1次フィルタ	→ 61 —
11.2	1次 RC ローパスフィルタ	→ 61 —
11.3	規準角周波数 $\omega_s$ の導入	→ 63 —
11.4	ボード線図 (Bode Diagram)	→ 64 —
11.5	カットオフ周波数	→ 65 —
11.6	デシベル [dB]	→ 66 —
11.7	1次 CR ハイパスフィルタ	→ 67 —
11.8	規準角周波数 $\omega_s$ の導入	→ 69 —
11.9	カットオフ周波数	→ 71 —
11.10	1次 LR ローパスフィルタ	→ 73 —
11.11	規準角周波数 $\omega_s$ の導入	→ 75 —
11.12	ボード線図 (Bode Diagram)	→ 77 —
11.13	カットオフ周波数	→ 77 —
11.14	1次 RL ハイパスフィルタ	→ 79 —
11.15	規準角周波数 $\omega_s$ の導入	→ 81 —
11.16	ボード線図 (Bode Diagram)	→ 83 —
11.17	カットオフ周波数	→ 83 —
11.18	フィルタのきれ	→ 85 —

# 11 フィルター

## 11.1 1次フィルタ

抵抗，コンデンサ，コイルなどの2つの素子（インピーダンス  $\dot{z}_1$   $\dot{z}_2$ ）を図57のように接続すると最も簡単な1次フィルタが構成される。フィルタは，さまざまな周波数成分をもつ信号から特定の周波数領域だけを取り出したり除去したりするものである。例えば，フィルタによって，雑音が混ざっている信号から雑音を取り除いてクリアな信号を得ることができる。

図(a)の回路で，入力  $\dot{v}_i$  は2つのインピーダンス  $\dot{z}_1$   $\dot{z}_2$  で分圧されて出力  $\dot{v}_o$  になる。これは回路を図(b)のように変形してみれば明らかであろう。図(a)と図(b)は全く同じ回路である。

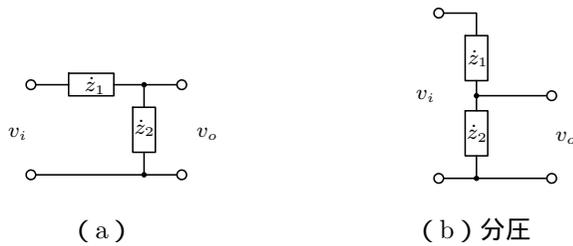


図57. 1次フィルタの回路

$\dot{v}_i$  をインピーダンス  $\dot{z}_1$   $\dot{z}_2$  で分圧すると出力  $\dot{v}_o$  は

$$\dot{v}_o = \dot{G} \dot{v}_i \tag{86}$$

$$= \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} \dot{v}_i \tag{87}$$

で与えられる。 $\dot{v}_o$  に対する  $\dot{v}_i$  の比はゲインである。

$$\dot{G} = \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} \tag{88}$$

ゲインを求めておけば，任意の入力信号電圧  $\dot{v}_i$  を与えたときの，出力信号電圧  $\dot{v}_o$  は，式(??)で計算することができる。

以下で，抵抗，コンデンサ，コイルのいろいろな組み合わせについて，具体的に  $\dot{G}$  を求めてみよう。

## 11.2 1次 RC ローパスフィルタ

図 58 のように抵抗とコンデンサを接続すると、高域をカットし、低域を通す最も簡単な一次 RC ローパスフィルタとなる。周波数が上がれば、コンデンサのインピーダンスが小さくなるので、分圧比が小さくなって出力が下がることは見当がつく。

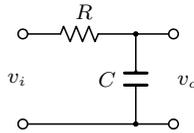


図 58. 一次 RC ローパスフィルタ

この回路のゲイン  $\dot{G}$  は、インピーダンス

$$z_1 = R$$

$$z_2 = \frac{1}{i\omega C}$$

を式(??)に代入して、次のように計算される。

$$\dot{G} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{i\omega CR + 1}$$

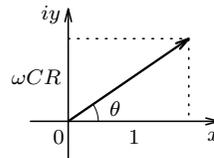


図 59.  $\omega CR + 1$  の複素ベクトル図

この式の分母は複素ベクトル図を参照して、

$$i\omega CR + 1 = \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} \cdot e^{i\theta} \quad \text{ただし} \quad \theta = \tan^{-1}(\omega CR)$$

と表される。これを代入し、 $\dot{G}$  は

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \cdot e^{-i\theta}$$

となるが、 $-\theta$  を改めて  $\theta$  と書いて

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \cdot e^{i\theta} \quad (89)$$

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega CR) \quad (90)$$

と表される。 $\dot{G}$  の式は多少複雑に見えるが、 $\dot{G}$  を大きさと位相（偏角）に分けて解析するのが普通である。

式(??)の係数部分を  $G_0$  と置いて

$$\dot{G} \equiv G_0 \cdot e^{i\theta} \quad (91)$$

$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \\ \theta = -\tan^{-1}(\omega CR) \end{cases} \quad (92)$$

$G_0$  と  $e^{i\theta}$  の  $\theta$  をそれぞれ解析する。

### 11.3 規準角周波数 $\omega_s$ の導入

ここで、関数を見易くするために  $\omega$  の代わりに

$$\omega_s \equiv \omega CR \quad (93)$$

を変数とする。式(??)は次のように表現が簡単になる。

$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_s^2}} \\ \theta = -\tan^{-1}(\omega_s) \end{cases} \quad (94)$$

$\omega_s$  を用いるとただ表現が簡単になるだけでなく、 $C$  や  $R$  の回路定数は実際の回路ごとに異なるが、それらは変数  $\omega_s$  に押し込められて、関数  $G_0$  や  $\theta$  が回路の定数を含まない形になるという利点がある。新しい変数  $\omega_s$  を規準角周波数という。規準と称するのは  $CR$  で規格化された、という意味である。

$G_0$  はゲイン  $\dot{G}$  の大きさ（複素数の絶対値）である。 $G_0$  は、比（出力信号電圧/入力信号電圧）の大きさの周波数による変化を表す。また  $\theta$  は入力信号電圧に対する出力信号電圧の位相のずれの周波数依存を表す。変化の要点を表にしてみると次のようになる。

$\omega_s$	0		1		$\infty$
$G_0$	1		$\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.7$	$\frac{1}{\omega_s}$	0
$\log_{10} G_0$	0		-0.15	$-\log_{10} \omega_s$	$-\infty$
$20 \log_{10} G_0$ [dB]	0		-3	$-20 \log_{10} \omega_s$	$-\infty$
$\theta$	$0^\circ$		$-45^\circ$		$-90^\circ$

表 8.  $G_0$  と  $\theta$  の規準角周波数  $\omega_s$  による変化

## 11.4 ボード線図 (Bode Diagram)

$G_0$  と  $\theta$  を両対数グラフに表したものを、2 つあわせてボード線図 (Bode Diagram) という。横軸のスケールは共通にする。

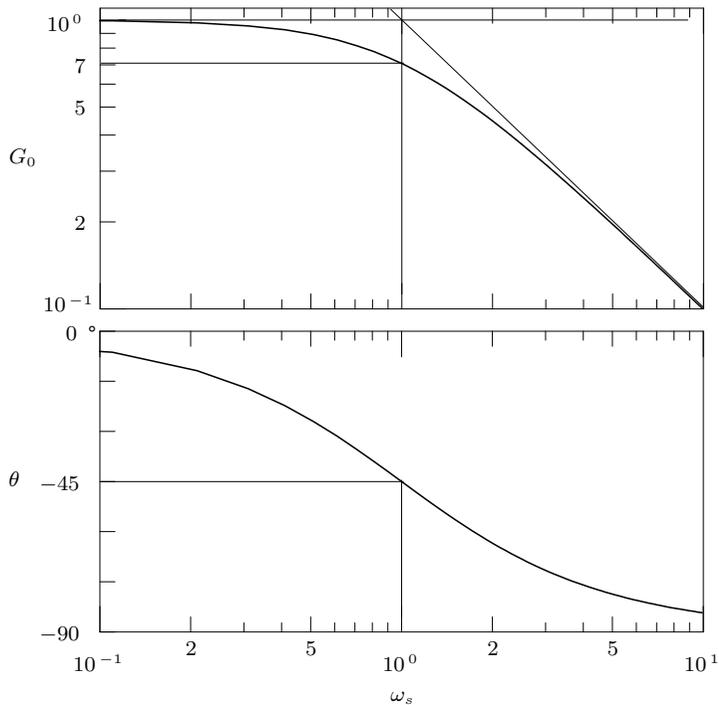


図 60. CR ローパスフィルターのボード線図

## 11.5 カットオフ周波数

図 60 の  $G_0$  曲線は

$$\omega_s = 10^0 = 1 \quad (95)$$

の付近で折れ曲がっている。 $\omega_s$  が 1 より小さくなると  $G_0$  は 1 に近づき、1 より大きいところでは、 $\omega_s$  に比例して小さくなる。この点をカットオフという。カットオフ点で、ゲインの大きさは 0.7 倍、また位相  $\theta$  は  $-45^\circ$  だけ遅れている。以上は、 $C, R$  の値によらないユニバーサルな関数と規準角周波数による考察である。

$C$  と  $R$  が具体的に与えられたときのカットオフ角周波数を  $\omega_c$  あるいはカットオフ周波数を  $f_c$  と書くことにすると、カットオフの点では  $\omega_s = \omega CR = 1$  より

$$\omega_c = \frac{1}{CR} \quad f_c = \frac{1}{2\pi CR} \quad (96)$$

である。

式 (8) に  $\omega_s = 1$  を代入、あるいは式 (7) に  $\omega = 1/RC$  を代入するとカットオフの点でのゲインの大きさは

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.707$$

である。つまり、ゲインはカットオフの点で、最大値の約 0.7 倍である。これをデシベル単位で表せば  $-3$  dB である。また、図 60 で  $\omega_s > 1$  の領域で  $G_0$  は  $\omega_s$  に対する勾配が  $-1$  で減少する。このカットオフ点付近の変化をカットオフ特性というが、今の場合カットオフの特性は勾配が  $-1$  で、これは  $-6$  dB/oct あるいは  $-20$  dB/dec (dec=decade, 桁) と表される。つまり、周波数が倍になるとゲインが  $1/2$  になる、あるいは周波数が 1 桁上がると、ゲインは  $1/10$  になる。

## 11.6 デシベル [ dB ]

倍率  $A$  倍を, 対数をとって

$$x \text{ [ dB ]} = 20 \log_{10} A \quad (97)$$

と表現する。上の例の 0.7 倍は,  $20 \log_{10}(0.7) = -3 \text{ [ dB ]}$  である。

$A$	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$x \text{ [ dB ]}$	-60	-40	-20	0	20	40	60

特に, 次の値はよく使われるので重要である。

$A$	0.5	0.7	1	$\sqrt{2}$	2
$x \text{ [ dB ]}$	-6	-3	0	3	6

---

デシベルは, 元々はエネルギーを比較する場合について定義されたものである。エネルギーの倍率  $E$  の対数をと

$$X \text{ [ B ]} = \log_{10} E$$

として単位 [ B ] ([ Bell ] ベル) で表す。[ dB ] は [ B ] の 1/10 の単位である。

$$x \text{ [ dB ]} = 10 \log_{10} \quad (98)$$

式 ??) と式 ??) の 2 倍の違いは, エネルギー = (振幅)<sup>2</sup> であることによる。  $E = A^2$  とすれば,  $10 \log_{10} E = 20 \log_{10} A$  である。電圧や電流の [ 次元 ] は振幅に相当し, 2 乗がエネルギーになる。

---

## 11.7 1次 CR ハイパスフィルタ

図 61 のように抵抗とコンデンサを接続すると、低域をカットし、高域を通す最も簡単な一次 RC ローパスフィルタとなる。回路をながめるとおよその動作はすぐに理解できる。コンデンサは、低い周波数に対しては抵抗（インピーダンス）が大きく、高い周波数に対しては抵抗（インピーダンス）が小さい。従って、低域では分圧比が小さくなって出力が下がり、高域では分圧比が大きくなり出力が大きい。

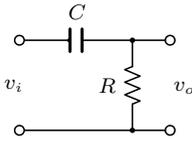


図 61. 一次 CR ハイパスフィルタ

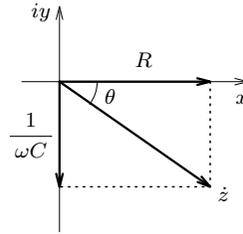


図 62.  $R + \frac{1}{i\omega C}$  の複素ベクトル図

回路のゲイン  $\dot{G}$  は、コンデンサ  $C$  と抵抗  $R$  それぞれのインピーダンス

$$\dot{z}_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$\dot{z}_R = R$$

により、分圧の計算を行なうと得られる。

$$\dot{G} = \frac{\dot{z}_R}{\dot{z}_C + \dot{z}_R} = \frac{R}{\frac{1}{i\omega C} + R}$$

ここで分母は図 62 の複素ベクトルを参照して、直ちに

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\omega C} + R &= \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \cdot e^{i\theta} \\ &= R \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}} \cdot e^{i\theta} \quad \text{ただし } \theta = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{\omega C R} \right) \end{aligned}$$

と表されることが分かる。これを代入し、 $\dot{G}$  は

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}} \cdot e^{-i\theta}$$

となるが、 $-\theta$  を改めて  $\theta$  と書いて

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}} \cdot e^{i\theta} \quad (99)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \quad (100)$$

と表される。 $\dot{G}$  の式は多少複雑に見えるが、大きさと位相（偏角）に分けて解析すればよい。  
式(??)の係数部分を  $G_0$  と置いて

$$\dot{G} \equiv G_0 \cdot e^{i\theta} \quad (101)$$

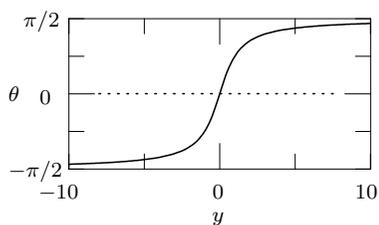
$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \end{cases} \quad (102)$$

$G_0$  と  $e^{i\theta}$  の  $\theta$  をそれぞれ解析する。

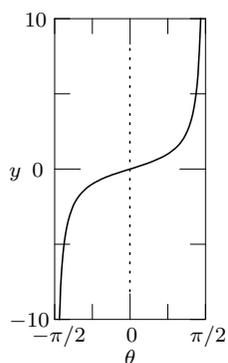
$y = \tan \theta$  のとき、 $\theta = \tan^{-1} y$  である。

$\tan^{-1}$  は  $\tan$  の逆関数である。なお、

$\tan^{-1}(-y) = -\tan^{-1} y$  が成り立つ。



$\theta = \tan^{-1} y$



$y = \tan \theta$

## 11.8 規準角周波数 $\omega_s$ の導入

ここで、関数を見易くするために  $\omega$  の代わりに  $\omega_s \equiv \omega CR$  を変数として上の式を書き直すと、次のように表現が簡単になる。

$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_s^2}}} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega_s} \right) \\ \omega_s = \omega CR \end{cases} \quad (103)$$

このように  $\omega_s \equiv \omega CR$  を変数とすると、表式が簡単になるだけではない。の回路の定数  $C$  や  $R$  は実際の回路ごとに異なるが、それらは変数  $\omega_s$  に押し込められて、関数  $G_0$  や  $\theta$  が回路の定数を含まないのので、どの回路にも共通な「ユニバーサル」な関数形になるという利点がある。新しい変数  $\omega_s$  を規準角周波数という。「規準」というのは  $CR$  で規格化された、という意味である。

$G_0$  はゲイン  $\dot{G}$  の大きさ（複素数の絶対値）で、出力信号電圧の入力信号電圧に対する比の周波数による変化を表す。また  $\theta$  は入力信号電圧に対する出力信号電圧の位相のずれの周波数依存を表す。そこで、これらの関数の  $\omega$  による変化を調べよう。

まず、 $\theta$  の振る舞いは次の表のようになる。

$\omega_s$	0		1		$\infty$
$\theta$	$0^\circ$		$45^\circ$		$90^\circ$

表9.  $\theta$  の規準角周波数  $\omega_s$  による変化

次に、 $G_0$  の振る舞いは、関数の対数をとって調べるとよく分かる。 $G_0$  の式で、両辺の（常用）対数をとる。

$$\begin{aligned} \log_{10} G_0 &= \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_s^2}}} \right) = \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{\omega_s^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{\omega_s^2 + 1}{\omega_s^2} \right) = -\frac{1}{2} \{ \log_{10}(\omega_s^2 + 1) - \log_{10} \omega_s^2 \} \end{aligned}$$

この関数を調べるのに次の点に注意する。

$\omega_s \ll 1$  のとき

$$- \{ \log_{10}(\omega_s^2 + 1) - \log_{10} \omega_s^2 \} \doteq - \{ \log_{10}(1) - \log_{10} \omega_s^2 \} = \log_{10} \omega_s^2$$

$\omega_s = 0$  のとき  $\log_{10} \omega_s^2 = -\infty$

$\omega_s = \infty$  のとき  $\log_{10} G_0 = 0$

特殊な点として  $\omega_s = 1$  のとき（後述，カットオフ点）

$$\log_{10} G_0 = \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log_{10} 2 = -\frac{1}{2} \times 0.3010\dots = 0.1505\dots$$

これらにより， $\omega_s = 0 \sim \infty$  に対する  $\log_{10} G_0$  の変化をまとめると

$\omega_s$	0		1		$\infty$
$G_0$	0	$\omega_s$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.7$		1
$\log_{10} G_0$	$-\infty$	$\log_{10} \omega_s$	-0.15		0
$20 \log_{10} G_0$ [dB]	$-\infty$	$20 \log_{10} \omega_s$	-3		0

表 10.  $\log_{10} G_0$  の変化

この  $\log_{10} G_0$  の変化に注意すると，次のボード線図が理解できる。

## ボード線図 (Bode Diagram)

$G_0$  と  $\theta$  を両対数グラフに表したものを、2 つあわせてボード線図 (Bode Diagram) という。横軸のスケールは共通にする。

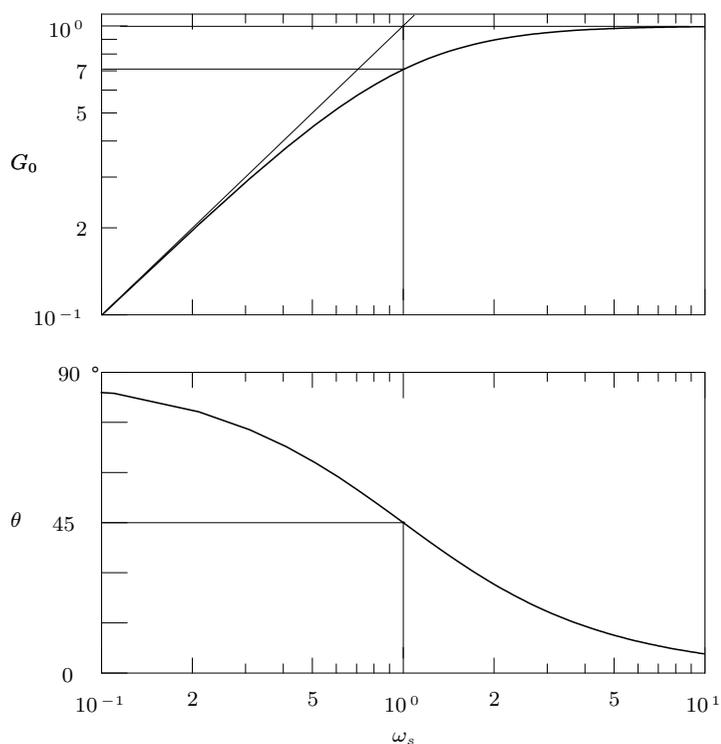


図 63. RC ハイパスフィルターのボード線図

## 11.9 カットオフ周波数

図 63 の  $G_0$  曲線は

$$\omega_s = 10^0 = 1$$

(104)

の付近で折れ曲がっている。 $\omega_s$  が 1 より小さくなると  $G_0$  は 1 に近づき、1 より大きいところでは、 $\omega_s$  に比例して小さくなる。この点をカットオフという。カットオフ点で、ゲインの大きさは 0.7 倍、また位相  $\theta$  は  $-45^\circ$  だけ遅れている。以上は、 $C, R$  の値によらないユニバーサルな関数と規準角周波数による考察である。

$C$  と  $R$  が具体的に与えられたときのカットオフ角周波数を  $\omega_c$  あるいはカットオフ周波数を  $f_c$  と書くことにすると、カットオフの点では  $\omega_s = \omega CR = 1$  より

$$\omega_c = \frac{1}{CR} \qquad f_c = \frac{1}{2\pi CR} \qquad (105)$$

である。

式(??)に  $\omega_s = 1$  を代入、あるいは式(??)に  $\omega = 1/RC$  を代入するとカットオフの点でのゲインの大きさは

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.707$$

である。つまり、ゲインはカットオフの点で、最大値の約 0.7 倍である。これをデシベル単位で表せば  $-3$  dB である。また、図 63 で  $\omega_s > 1$  の領域で  $G_0$  は  $\omega_s$  に対する勾配が  $-1$  で減少する。このカットオフ点付近の変化をカットオフ特性というが、今の場合カットオフの特性は勾配が  $-1$  で、これは  $-6$  dB/oct あるいは  $-20$  dB/dec (dec=decade, 桁) と表される。つまり、周波数が倍になるとゲインが  $1/2$  になる、あるいは周波数が 1 桁上がると、ゲインは  $1/10$  になる。

## 11.10 1次 LR ローパスフィルタ

コイルと抵抗で図 LRLO のような回路を作ると、低域はよく通すが高域を通さない最も簡単な一次 LR ローパスフィルタとなる。回路をながめるとおよその動作はすぐに理解できる。コイルは、低い周波数に対しては抵抗（インピーダンス）が小さく、高い周波数に対しては抵抗（インピーダンス）が大きい。従って、低域では分圧比が大きく出力が大きい、高域では分圧比が小さくなって出力が下がる。

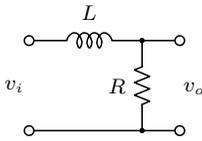


図 64. 一次 LR ローパスフィルタ

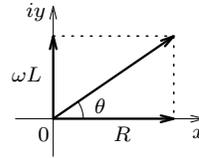


図 65.  $R + i\omega L$  の複素ベクトル図

回路のゲイン  $\dot{G}$  は、コイル  $L$  と抵抗  $R$  それぞれのインピーダンス

$$\dot{z}_L = i\omega L$$

$$\dot{z}_R = R$$

により、分圧の計算を行なうと得られる。

$$\dot{G} = \frac{\dot{z}_R}{\dot{z}_L + \dot{z}_R} = \frac{R}{i\omega L + R} \quad (106)$$

ここで分母は図 65 の複素ベクトル図を描けば、直ちに

$$i\omega L + R = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{i\theta} \quad \text{ただし} \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

と書き下すことができる。これを代入し、 $\dot{G}$  は

$$\dot{G} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{i\theta}} = \frac{R}{R\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} \cdot e^{-i\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} \cdot e^{-i\theta}$$

となり,  $-\theta$  を改めて  $\theta$  と書いて

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} \cdot e^{i\theta} \quad (107)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

と表される。 $\dot{G}$  の式は多少複雑に見えるが, 大きさと位相 (偏角) に分けて解析すればよい。

式(??)の係数部分を  $G_0$  と置いて

$$\dot{G} \equiv G_0 \cdot e^{i\theta} \quad (108)$$

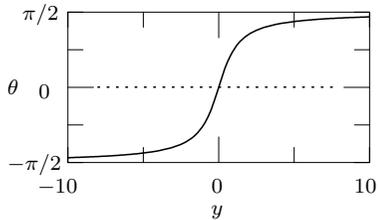
$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{R}{\omega L} \right) \end{cases} \quad (109)$$

この  $G_0$  と  $e^{i\theta}$  の  $\theta$  をそれぞれ解析する。

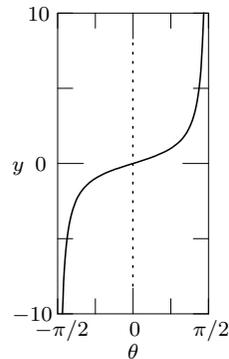
$y = \tan \theta$  のとき,  $\theta = \tan^{-1} y$  である。

$\tan^{-1}$  は  $\tan$  の逆関数である。なお,

$\tan^{-1}(-y) = -\tan^{-1} y$  が成り立つ。



$\theta = \tan^{-1} y$



$y = \tan \theta$

### 11.11 規準角周波数 $\omega_s$ の導入

ここで、関数を見易くするために  $\frac{R}{\omega L} \equiv \frac{1}{\omega_s}$  と置く、つまり変数を

$$\omega_s \equiv \frac{L}{R}\omega \tag{110}$$

に変えて上の式を書き直すと、式(??)は次のように表現が簡単になる。

$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1+\omega_s^2}} \\ \theta = \tan^{-1} \omega_s \end{cases} \tag{111}$$

このように  $\omega_s \equiv (L/R)\omega$  を変数とすると、表式が簡単になるだけではない。回路の定数  $L$  や  $R$  は実際の回路ごとに異なるが、それらは変数  $\omega_s$  に押し込められて、関数  $G_0$  や  $\theta$  が回路の定数を含まないの、どの回路にも共通な「ユニバーサル」な関数形になるという利点がある。新しい変数  $\omega_s$  を規準角周波数という。

$G_0$  はゲイン  $\dot{G}$  の大きさ（複素数の絶対値）で、出力信号電圧の入力信号電圧に対する比の周波数による変化を表す。また  $\theta$  は入力信号電圧に対する出力信号電圧の位相のずれの周波数依存を表す。そこで、これらの関数の  $\omega_s$  による変化を調べよう。

まず、 $\theta$  の振る舞いは次の表のようになる。

$\omega_s$	0		1		$\infty$
$\theta$	0°		45°		90°

表 11.  $\theta$  の規準角周波数  $\omega_s$  による変化

次に、 $G_0$  の振る舞いは、関数の対数をとって調べるとよく分かる。式(??)で  $G_0$  の両辺の（常用）対数をとる。

$$\begin{aligned}\log_{10} G_0 &= \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_s^2}} \right) = \log_{10} (1 + \omega_s^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \log_{10} (1 + \omega_s^2)\end{aligned}$$

この関数は 1 と  $\omega_s^2$  の大小を考え、また特殊な点として  $\omega_s = 1$  のとき  
(後述、カットオフ点) を考えて、 $\omega_s = 0 \sim \infty$  に対する変化をまとめると

$\omega_s$	0		1		$\infty$
$G_0$	0	$\omega_s$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.7$		1
$\log_{10} G_0$	$-\infty$	$\log_{10} \omega_s$	-0.15		0
$20 \log_{10} G_0$ [dB]	$-\infty$	$20 \log_{10} \omega_s$	-3		0

表 12.  $\log_{10} G_0$  の変化

この  $\log_{10} G_0$  の変化に注意すると、次のボード線図が理解できる。

## 11.12 ボード線図 (Bode Diagram)

式(??)の  $G_0$  と  $\theta$  を両対数グラフに表したものを, 2 つあわせてボード線図 (Bode Diagram) という。横軸のスケールは共通にする。

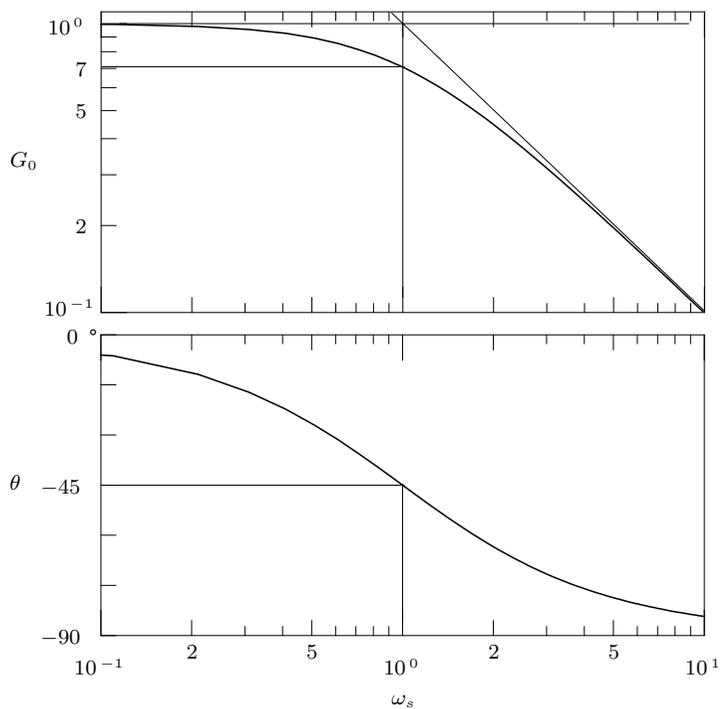


図 66. LR ローパスフィルターのボード線図

## 11.13 カットオフ周波数

図 66 の  $G_0$  曲線は

$$\omega_s = 10^0 = 1 \quad (112)$$

の付近で折れ曲がっている。  $\omega_s$  が 1 より小さくなると  $G_0$  は 1 に近づき、1 より大きいところでは、  $\omega_s$  に比例して小さくなる。この点をカットオフという。カットオフ点で、ゲインの大きさは 0.7 倍、また位相  $\theta$  は  $45^\circ$  だけ進んでいる。以上は、  $L, R$  の値によらないユニバーサルな関数と規準角周波数による考察である。

周波数特性が変化するカットオフ点では

$$\begin{aligned} \omega_s &= 1 \\ \omega &= \frac{R}{L} \end{aligned}$$

$L$  と  $R$  が具体的に与えられたときのカットオフ角周波数を  $\omega_c$  あるいはカットオフ周波数を  $f_c$  と書くことにすると、

カットオフの点では  $\omega_s = (L/R)\omega = 1$  より

$$\omega_c = \frac{R}{L} \quad f_c = \frac{R}{2\pi L} \quad (113)$$

である。

式(??)に  $\omega_s = 1$  を代入、あるいは式(??)に  $\omega = R/L$  を代入するとカットオフの点でのゲインの大きさは

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.707$$

である。つまり、ゲインはカットオフの点で、最大値の約 0.7 倍である。これをデシベル単位で表せば  $-3$  dB である。また、図 66 で  $\omega_s > 1$  の領域で  $G_0$  は  $\omega_s$  に対する勾配が  $-1$  で減少する。このカットオフ点付近の変化をカットオフ特性というが、今の場合カットオフの特性は

勾配が  $-1$  で、これは  $-6 \text{ dB/oct}$  あるいは  $-20 \text{ dB/dec}$  (dec=decade, 桁) と表される。つまり、周波数が倍になるとゲインが  $1/2$  になる、あるいは周波数が 1 桁上がると、ゲインは  $1/10$  になる。

## 11.14 1次 RL ハイパスフィルタ

図 67 のように抵抗とコイルを接続すると、低域をカットし、高域を通す最も簡単な一次 RL ハイパスフィルタとなる。回路をながめるとおよその動作はすぐに理解できる。コイルは、低い周波数に対しては抵抗（インピーダンス）が小さく、高い周波数に対しては抵抗（インピーダンス）が大きい。従って、低域では分圧比が小さくなって出力が下がり、高域では分圧比が大きく出力が大きい。

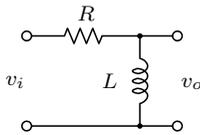


図 67. 一次 RL ハイパスフィルタ

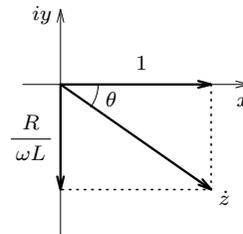


図 68.  $1 - i\frac{R}{\omega L}$  の複素ベクトル図

回路のゲイン  $\dot{G}$  は、抵抗  $R$  とコイル  $L$  それぞれのインピーダンス

$$\dot{z}_R = R$$

$$\dot{z}_L = i\omega L$$

により、分圧の計算を行なうと得られる。

$$\dot{G} = \frac{\dot{z}_L}{R + \dot{z}_L} = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{1}{\frac{R}{i\omega L} + 1} = \frac{1}{1 - i\frac{R}{\omega L}}$$

ここで分母は図 68 の複素ベクトルを参照して、直ちに

$$1 - i\frac{R}{\omega L} = \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}} \cdot e^{i\theta} \quad \text{ただし} \quad \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{R}{\omega L}\right)$$

と書き下すことができる。これを代入し、 $\dot{G}$  は

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}} \cdot e^{-i\theta}$$

となるが,  $-\theta$  を改めて  $\theta$  と書いて

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}} \cdot e^{i\theta} \quad (114)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{R}{\omega L} \right) \quad (115)$$

と表される。 $\dot{G}$  の式は多少複雑に見えるが, 大きさと位相 (偏角) に分けて解析すればよい。

式(??)の係数部分を  $G_0$  と置いて

$$\dot{G} \equiv G_0 \cdot e^{i\theta} \quad (116)$$

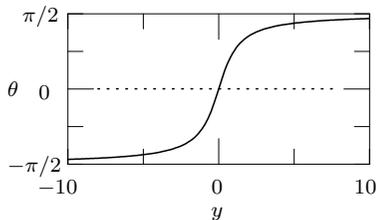
$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{R}{\omega L} \right) \end{cases} \quad (117)$$

$G_0$  と  $e^{i\theta}$  の  $\theta$  をそれぞれ解析する。

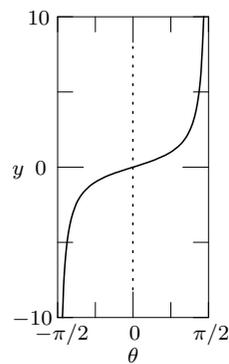
$y = \tan \theta$  のとき,  $\theta = \tan^{-1} y$  である。

$\tan^{-1}$  は  $\tan$  の逆関数である。なお,

$\tan^{-1}(-y) = -\tan^{-1} y$  が成り立つ。



$\theta = \tan^{-1} y$



$y = \tan \theta$

## 11.15 規準角周波数 $\omega_s$ の導入

ここで、関数を見易くするために

$$\frac{R}{\omega L} \equiv \frac{1}{\omega_s} \quad \text{と置く, つまり変数を } \omega_s \equiv \frac{L}{R}\omega$$

に変えて上の式を書き直すと、次のように表現が簡単になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_s^2}}} \\ \theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\omega_s} \right) \\ \omega_s = \frac{L}{R}\omega \end{array} \right. \quad (118)$$

このように  $\omega_s \equiv (L/R)\omega$  を変数とすると、表式が簡単になるだけではない。回路の定数  $L$  や  $R$  は実際の回路ごとに異なるが、それらは変数  $\omega_s$  に押し込められて、関数  $G_0$  や  $\theta$  が回路の定数を含まないの、どの回路にも共通な「ユニバーサル」な関数形になるという利点がある。新しい変数  $\omega_s$  を規準角周波数という。

$G_0$  はゲイン  $\dot{G}$  の大きさ（複素数の絶対値）で、出力信号電圧の入力信号電圧に対する比の周波数による変化を表す。また  $\theta$  は入力信号電圧に対する出力信号電圧の位相のずれの周波数依存を表す。そこで、これらの関数の  $\omega_s$  による変化を調べよう。

まず、 $\theta$  の振る舞いは次の表のようになる。

$\omega_s$	0		1		$\infty$
$\theta$	0°		45°		90°

表 13.  $\theta$  の規準角周波数  $\omega_s$  による変化

次に、 $G_0$  の振る舞いは、関数の対数をとって調べるとよく分かる。

$G_0$  の式で、両辺の(常用)対数をとる。

$$\begin{aligned} \log_{10} G_0 &= \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_s^2}}} \right) = \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{\omega_s^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{\omega_s^2 + 1}{\omega_s^2} \right) = -\frac{1}{2} \{ \log_{10}(\omega_s^2 + 1) - \log_{10} \omega_s^2 \} \end{aligned}$$

この関数を調べるのに次の点に注意する。

$\omega_s \ll 1$  のとき

$$- \{ \log_{10}(\omega_s^2 + 1) - \log_{10} \omega_s^2 \} \doteq - \{ \log_{10}(1) - \log_{10} \omega_s^2 \} = \log_{10} \omega_s^2$$

$\omega_s = 0$  のとき  $\log_{10} \omega_s^2 = -\infty$

$\omega_s = \infty$  のとき  $\log_{10} G_0 = 0$

特殊な点として  $\omega_s = 1$  のとき(後述, カットオフ点)

$$\log_{10} G_0 = \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \log_{10} 2 = -\frac{1}{2} \times 0.3010\dots = 0.1505\dots$$

これらにより,  $\omega_s = 0 \sim \infty$  に対する  $\log_{10} G_0$  の変化をまとめると

$\omega_s$	0		1		$\infty$
$G_0$	0	$\omega_s$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.7$		1
$\log_{10} G_0$	$-\infty$	$\log_{10} \omega_s$	-0.15		0
$20 \log_{10} G_0$ [dB]	$-\infty$	$20 \log_{10} \omega_s$	-3		0

表 14.  $\log_{10} G_0$  の変化

この  $\log_{10} G_0$  の変化に注意すると, 次のボード線図が理解できる。

## 11.16 ボード線図 (Bode Diagram)

$G_0$  と  $\theta$  を両対数グラフに表したものを、2 つあわせてボード線図 (Bode Diagram) という。横軸のスケールは共通にする。

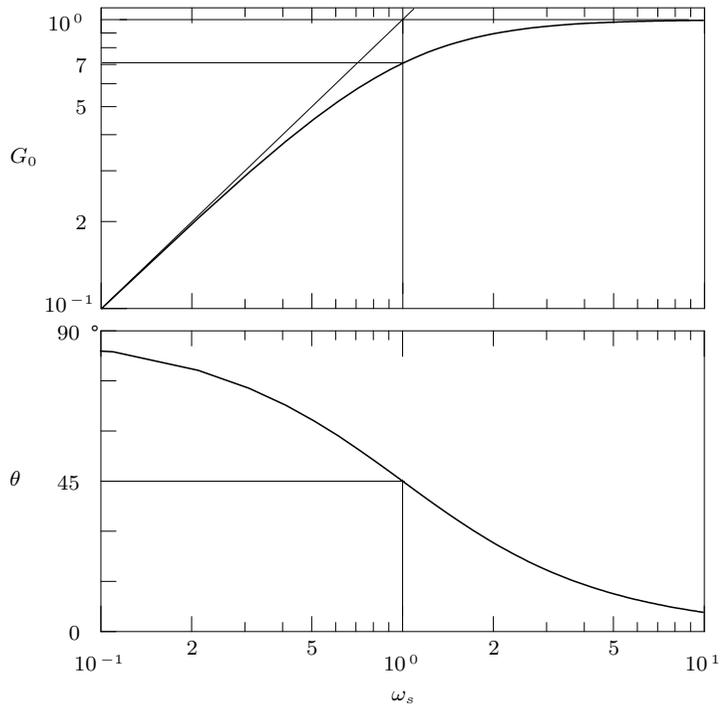


図 69. RL ハイパスフィルターのボード線図

## 11.17 カットオフ周波数

図 69 の  $G_0$  曲線は

$$\omega_s = 10^0 = 1 \quad (119)$$

の付近で折れ曲がっている。  $\omega_s$  が 1 より小さくなると  $G_0$  は 1 に近づき、1 より大きいところでは、 $\omega_s$  に比例して小さくなる。この点をカットオフという。カットオフ点で、ゲインの大きさは 0.7 倍、また位相  $\theta$  は  $45^\circ$  だけ進んでいる。以上は、 $L, R$  の値によらないユニバーサルな関数と規準角周波数による考察である。

$L$  と  $R$  が具体的に与えられたときのカットオフ角周波数を  $\omega_c$  あるいはカットオフ周波数を  $f_c$  と書くことにすると、 カットオフの点では  $\omega_s = (L/R)\omega = 1$  より

$$\omega_c = \frac{R}{L} \quad f_c = \frac{R}{2\pi L} \quad (120)$$

である。

式(??)に  $\omega_s = 1$  を代入、あるいは式(??)に  $\omega = R/L$  を代入するとカットオフの点でのゲインの大きさは

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.707$$

である。つまり、ゲインはカットオフの点で、最大値の約 0.7 倍である。これをデシベル単位で表せば  $-3$  dB である。

また、図 69 で  $\omega_s < 1$  の領域で  $G_0$  は  $\omega_s$  に対する勾配が 1 で減少する。このカットオフ点付近の変化をカットオフ特性というが、今の場合カットオフの特性は周波数が半分になるとゲインが  $1/2$  になる、これは  $-6$  dB/oct (oct=octave, オクターブ, 2 倍) と表される。周波数が 1 桁下がるとゲインは  $1/10$  になる。これは  $-20$  dB/dec (dec=decade, 桁) と表される。どちらで表しても同じことである。

## 11.18 フィルタのきれ

カットオフ特性の勾配が急であればあるほど、不要な周波数領域に対するフィルタのカットオフ特性がシャープであり、理想的なフィルタに近づく。一次フィルタはカットオフ特性が緩い。2次、3次...のフィルタでは、勾配が2倍、3倍...となる。2次以上のフィルタは、オペアンプによる増幅回路を利用して作成する。