

目次

6	交流の表し方	36
6.1	直流と交流	36
6.2	交流電圧を表す式	37
6.3	周波数と角周波数	38
6.3.1	周期	38
6.4	位相	38
6.5	交流電圧の値	39
7	複素数による交流電圧を表す式	40
8	インピーダンス	40
8.1	R, C, L 各素子のインピーダンス	41
8.2	各素子のインピーダンスの特徴	41
8.3	インピーダンスとアドミタンス	43
9	交流の増幅	44
9.1	Op Amp を用いた非反転増幅回路 (直流増幅回路)	44
9.2	RC 直列回路}	47
9.3	交流増幅回路 (非反転増幅回路)	48
9.4	周波数特性	49
9.5	規準角周波数	50
9.6	ボード線図の作り方	51
9.7	カットオフ周波数	52
9.8	オーディオ アンプの設計	53
10	フィルター	55
10.1	一次フィルタ	55
10.2	一次 RC ローパスフィルタ	56
10.3	規準角周波数 ω_s の導入	57
10.4	カットオフ周波数	58

交流回路

6 交流の表し方

6.1 直流と交流

電池に豆電球をつないぐと、直流の電流が流れて点灯する。また家庭には電力会社から交流が配電供給されている。例えば、

直流の電圧は D.C. 1.5V (D.C. = Direct Current)

交流の電圧は A.C. 100V 60Hz (A.C. = Alternative Current)

のように表される。電流が流れるためには電流が往復するための 2 本の配線（電線）が必要である。

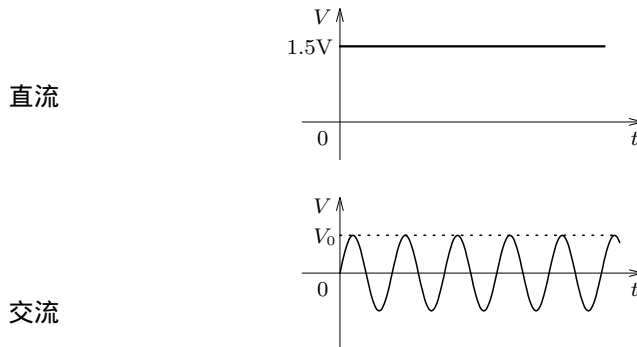


図 42. 直流と交流の電圧波形

電池から流れるのは直流電流で、プラス極から電流が流れ出て豆電球を通り、マイナス極へ戻る。このとき、電流が流れる向きも、電圧のプラス・マイナスも常に一定で変化することはない。従って、電池を使う器具にはプラス極とマイナス極を正しく接続しなければならない。

一方、交流ではコンセントの 2 つの極の間の電圧は、毎秒あたりに 120 回プラスとマイナスが入れ替わっている（周波数 60Hz の場合）。それに対応して、電流が流れる向きも毎秒あたりに 120 回プラスとマイナスが入れ替わっている。この電圧や電流の時間的な変化を図にしたも

のが波形である。図 42 に電池の電圧波形と交流の電圧波形を示す。

6.2 交流電圧を表す式

交流の波形は正弦波が基本である。正弦波は三角関数で表される。図 43 の交流電圧波形は、振幅を V_0 、角周波数を ω 、時刻を t として次で表される。

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \quad (49)$$

もちろん \sin の代わりに \cos で表してもよい。その場合には位相の部分が ωt の代わりに $\omega t + \pi/2$ のように初期位相が $\pi/2$ ($=90^\circ$) だけ異なる。

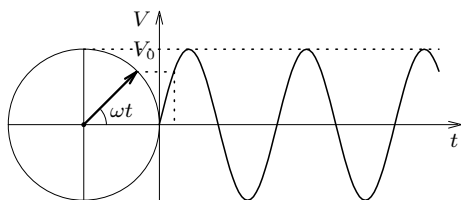


図 43. 交流電圧の波形

式 (1) の電圧 $V(t)$ は、図 43 で、回転する棒に左から光を当てたときの V 軸 (y 軸) への正射影の長さの時間変化を表す。時刻 t での棒の回転角度は

$$\theta = \omega t \quad (50)$$

で、 θ は時間と共に増加する。 ω は棒の回転角速度である。 ω の単位は [ラジアン/s] ([rad/s]) である。

6.3 周波数と角周波数

・周波数 f [Hz]

波の 1 秒間の振動数を電気の分野では、周波数 } f [Hz] で表す。 [Hz] (ヘルツ) は 1 秒間の振動数を表す単位である。

・角周波数 ω [rad/s]

波の 1 振動は棒の 1 回転に相当するから、周波数が f のとき、棒は 1 秒間に f 回転する。この 1 秒間に進む角度は角速度であり、

$$\omega = 2\pi f \quad (51)$$

である。これは重要な関係である。角速度 ω [rad/s] のことを電気の分野では角周波数 } という。

6.3.1 周期

棒が 1 回転し、波が 1 振動するのに必要な時間を周期 T [s] という。周波数が f であれば、波は 1 秒間に f 回振動するから

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (52)$$

である。この関係もよく使う。

6.4 位相

三角関数 $\sin \theta$ の、角度 θ を位相という。これは、図 43 の棒の角度であり、あるいは極座標で使うベクトルや動径の偏角である (位相 = 偏角)。周波数が f 、あるいは角周波数が ω の波の位相は

$$\theta = \omega t = 2\pi f t$$

である。電圧波形や電流波形の位相は、上式の波を表す三角関数の位相と同じものである。

6.5 交流電圧の値

交流電圧の表し方には次の 3 通りのものがある。

・ピーク値

三角関数の振幅に相当する値、式(49)の V_0 に相当する値をピーク値という。交流の電圧は、特に示されていないならばこのピーク値である。

・実効値

V_0 [V] の直流電圧を抵抗 R に与えると、電力 $P = V_0^2/R$ の発熱が起こる。ところが同じ V_0 [V] の交流電圧では、電圧は時々刻々変化し、 V_0 [V] はその一瞬の最大値であるから、発熱のエネルギーは $P = V_0^2/R$ より小さい。

そこで、直流と同じエネルギーを発生する値に換算した電圧値を実効値という。実効値は、単位 V に e あるいは eff の文字を添えて

$$100V_e \text{ あるいは } 100V_{eff}$$

のように表示される。正弦波の場合には、ピーク値電圧と実効値電圧は次の関係にある。

$$V(\text{ピーク値}) = \sqrt{2} V_e$$

家庭に配電されている交流電圧は「交流 100V」と言われるが、実効値が 100V である。従って、瞬間最大値(ピーク値)としては $\sqrt{2} \times 100 = 141$ V が出ている。

・ピーク to ピーク値

電圧の極大値と極小値の差、つまり山と谷の差をピークツーピーク値といい、例えば

$$30V_{p-p}$$

のように表す。正弦波のように、正負の波形が対象的である場合には、ピーク to ピーク値は、ピーク値の 2 倍の値である。

7 複素数による交流電圧を表す式

交流電圧や電流は波として扱えばよいので、式(49)のように三角関数で表すことができる。しかし、三角関数の計算は見通しが悪く、加減乗除がいくつか重なると解析が大変やっかいになってしまう。

そこで、次のようにして複素数を用いると計算や解析の見通しが大変よくなる。このとき、数学的な手段として複素数を用いているのであり、電気の現象が本質的に実数とは異なる特別な性質をもっているわけではない、ということを確認する必要がある。一般に、波や振動の現象の解析では、同じ理由で複素数を用いられる。

電圧を三角関数 $V_0 \cos \omega t$ で表したとする。この式を用いて計算を行う場合、これに余分なものとして虚数 $iV_0 \sin \omega t$ を加えた $V_0 \cos \omega t + iV_0 \sin \omega t$ で計算を行っても差し障りがない。つまり、式(1)の代わりに

$$\dot{V}(t) = V_0 \cos \omega t + iV_0 \sin \omega t \quad (i = \sqrt{-1})$$

とする。これは次のド・モアブルの定理

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (53)$$

を用いて、交流電圧は

$$\dot{V}(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad (54)$$

と表すことができる。同様に交流電流は

$$\dot{I}(t) = I_0 e^{i\omega t} \quad (55)$$

と表すことができる。 \dot{V} や \dot{I} の文字の頭の点は複素数であることを示す(点をつけない場合もある)。

8 インピーダンス

よく知られているように、直流回路では抵抗 R に電圧 V をかけたとき流れる電流 I は、次のようにオームの法則で与えられる。

$$I = \frac{V}{R}$$

抵抗に関するオームの法則はもちろん交流回路においても成り立つ。コンデンサ C やコイル L の場合には抵抗 R の替りに、インピーダンス \dot{Z} という量を用いると、次式のように、オームの法則を拡張することができる。交流理論においてもやはり基本はオームの法則である。

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}}$$

ここで \dot{I} , \dot{V} , \dot{Z} はいずれも複素数 (複素ベクトル) である。インピーダンスには文字 \dot{Z} や \dot{z} がよく用いられる。文字の上のドット (点) は複素数であることを示す。省略される場合も多い。インピーダンス \dot{Z} は素子の種類によって異なる。

電気の分野では振動数を周波数と呼ぶが、理論的な計算には角周波数 ω が便利である。周波数 f を用いると、“ 2π ” があちこちに現れてわずらわしい。しかし一方、 ω は普通は実験で直接測定される量ではなく、実際の計算では周波数 f で表す方が都合がよい。

8.1 R, C, L 各素子のインピーダンス

抵抗 R $\dot{Z} = R$

\dot{Z} は周波数 f を含まないので直流抵抗 R に等しい。もちろん R は実数である。

コンデンサ C : $\dot{Z} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i2\pi fC}$

\dot{Z} は純虚数である。分母に f があるので、 \dot{Z} の大きさは、 f が大きくなると小さくなる。つまり、高い周波数では電流を流し易く、低い周波数では電流を流しにくい。

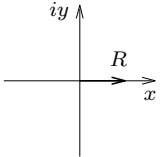
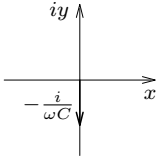
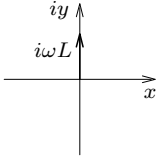
コイル L : $\dot{Z} = i\omega L = i2\pi fL$

\dot{Z} は純虚数である。 \dot{Z} は f に比例しているので、コンデンサとは逆に f が大きくなればインピーダンスは増加する。従って、高い周波数では電流を流しにくく、低い周波数では電流を流し易い。

なお、 $\omega = f = 0$ の場合、電圧・電流は振動せず一定であるから、直流と同等であり、コンデンサでは常に $\dot{I} = 0$, コイルでは $\dot{I} \rightarrow \infty$ となる。

8.2 各素子のインピーダンスの特徴

交流の角周波数を ω とする R, C, L のインピーダンス

	直交座標表示	複素ベクトル	複素極座標形式	特徴
抵抗 R	$\dot{Z} = R$		$= Re^{i \cdot 0}$	実数の定数 ω によらない
コンデンサ C	$\dot{Z} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$		$= \frac{1}{\omega C} e^{-i \frac{\pi}{2}}$	純虚数 ω に依存 ω 大で小
コイル L	$\dot{Z} = i\omega L$		$= \omega L e^{i \frac{\pi}{2}}$	純虚数 ω に依存 ω 大で大

8.3 インピーダンスとアドミタンス

抵抗 R の逆数を定義しておくとも便利であるため、

$$\text{伝導度 } \sigma = \frac{1}{R} \text{ と定義する。}$$

同じように、インピーダンス Z の逆数を

$$\text{アドミタンス } Y = \frac{1}{Z} \text{ と定義する。}$$

インピーダンスとアドミタンスについて、それぞれ実部と虚部に名前がつけられている。

Z	=	実部	+	虚部
インピーダンス		抵抗		リアクタンス
impedance		resistance		reactance
Y	=	実部	+	虚部
アドミタンス		コンダクタンス		サセプタンス
admittance		conductance		susceptance

リアクタンス（インピーダンスの虚部）はその符号によって次のように呼ばれる。

正の場合　　誘導性リアクタンス

負の場合　　容量性リアクタンス

正の場合は、コイル L の成分がある場合であり、負の場合はコンデンサ C の成分がある場合に相当するのでそれぞれ誘導性リアクタンス、容量性リアクタンスと呼ばれる。

9 交流の増幅

9.1 Op Amp を用いた非反転増幅回路（直流増幅回路）

非反転増幅回路に信号電圧 v_i を入力すると，出力信号電圧 v_o は，

$$v_o = G v_i \quad (56)$$

となり，増幅率は次で与えられることは既に述べた。

$$G = 1 + \frac{R}{r} \quad (57)$$

（ただし，Op Amp の裸の増幅度 G_0 が非常に大きく $G_0 \gg R/r$ のときの近似）
 $R \gg r$ で増幅率が 1 倍より十分大きい場合，1 を無視して次のように近似することができる。

$$G = \frac{R}{r} \quad (58)$$

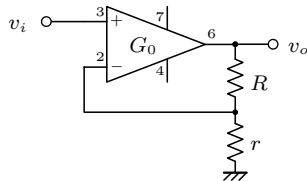


図 44. 非反転増幅回路

G は Gain（ゲイン＝利得＝増幅率＝増幅度）を表す。この回路は直流増幅回路と呼ぶが，直流増幅回路は直流信号だけでなく，交流信号も増幅する。つまり，増幅できる信号の周波数は $f = 0 \sim f_c$ である。周波数の上限 f_c は，Op Amp の裸の増幅度 G_0 によって決まる。

交流結合

音声信号などは交流信号の代表例である。交流信号の電圧は、本来 $0V$ を中心として正負に電圧が振れるものであるが、一般に扱われる交流信号は、一定の直流電圧 E の上に乗っていて、 $v_i' = E + v_i$ となっていることが多い。

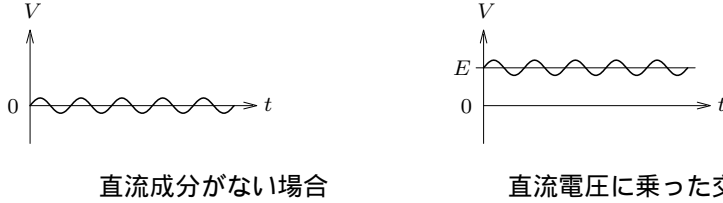


図 45. 交流信号

信号が直流電圧に乗っている場合は、コンデンサ C を用いて不要な直流成分 E をカットして $0V$ を中心として正負に振れる電圧とすることができる。次の図のように、コンデンサを通して信号回路を接続することを交流結合という。交流だけを通すという意味である。コンデンサを用いない場合は直流結合である。

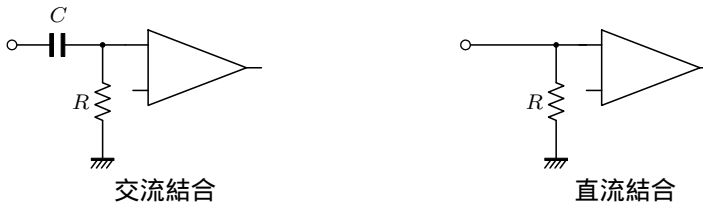


図 46. 入力結合

コンデンサ C の後の R は、グランド（コモン、共通）との間にある等価的な全抵抗である（増幅回路の入力抵抗も含む）。この C と R から成る CR 回路はハイパスフィルター（high pass filter, 高域通過フィルター）を構成する。ハイパスフィルターは、直流（周波数 $f = 0 \text{ Hz}$ ）は通さず、 f_c 以上の周波数の信号を通すものである。 f_c はカットオフ周波数と呼ばれ、次式で与えられる。

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (59)$$

カットオフ周波数 f_c で、信号は -3dB （ $\div 0.7$ 倍）に減衰し、これ以下の周波数で直線的に小さくなり、 $f = 0$ （直流）の信号は全く通さない。

交流結合の使用例： オシロスコープの入力端子

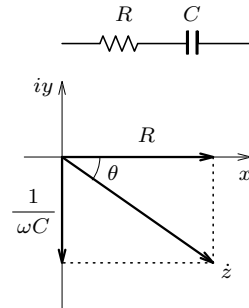
オシロスコープの入力端子に信号を入れて電圧波形を観測する場合、入力端子付近に DC GND AC の選択スイッチがある。オシロスコープに与えられた入力信号はまずプリアンプで増幅されて処理されるが、このスイッチはプリアンプへの結合方法を選択するもので、波形を正しく観測するために重要なスイッチである。 DC を選択すると直流結合になり、信号の直流成分もカットされず入力される。大きな直流電圧の上に乗っている小さな交流信号を感度を上げて観測する場合は、輝線が画面からはみ出してしまうので、 AC を選択して交流結合にし、直流成分をカットする。なお、 GND を選択すると、信号ケーブルは接続されていても内部で切り離され、オシロスコープのプリアンプの入力がグラウンドに接続されて 0V になるので、輝線の 0V の位置を調節する場合に使う。

9.2 RC 直列回路}

抵抗 R とコンデンサ C を直列に接続した回路のインピーダンスは、抵抗のインピーダンス R と、コンデンサのインピーダンス $1/i\omega C$ の和である。

$$\dot{z} = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i\frac{1}{\omega C}$$

この和は、ベクトル和である。上の式は一見、スカラーの和のように見えるが、複素数の実部と虚部は独立で、それぞれ複素ベクトルの成分である。これは、 \dot{z} を複素ベクトルとして図示すれば明らかである。 R を表すベクトルと $-i/\omega C$ を表すベクトルを合成して \dot{z} が得られる。また、図を見て、直ちに \dot{z} を表す複素極形式を書き下すことができる。



$$\dot{z} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \cdot e^{i\theta} \quad (60)$$

$$= R\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{i\theta} \quad (61)$$

$$\text{ただし } \theta = -\tan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

\dot{z} の大きさを

$$z_0 \equiv R\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}} \quad (62)$$

とおくと、 z_0 は (角) 周波数 ω の電流の流れに対する抵抗の大きさに相当する。

z_0 は ω が変化すると次のように変化する。

$$\omega \quad 0 \quad \text{のとき} \quad z_0 \quad \frac{1}{\omega C} \quad \infty \quad \theta \quad -90^\circ$$

$$\omega \quad \infty \quad \text{のとき} \quad z_0 \quad R \quad \theta \quad 0^\circ$$

つまり、周波数が高いときは抵抗が小さく (最小値 R)、周波数が低くなると抵抗が大きくなる (最大値 ∞)。抵抗 R のインピーダンスは R であり、 ω によらないので、この変化はコンデンサの性質によるものである。この結果は次節で用いる。

9.3 交流増幅回路（非反転増幅回路）

図44の非反転増幅回路は、抵抗 r と R をインピーダンス \dot{z}_1, \dot{z}_2 に置き替えると、より一般的な非反転増幅回路となる。 \dot{z}_1, \dot{z}_2 には、それぞれ抵抗だけでなくコンデンサやコイルを組み合わせたものを用いることができる。ゲインは抵抗をインピーダンスに替えて式(57)と同様に

$$\dot{G} = 1 + \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1} \quad (63)$$

あるいは、式(58)と同様に $\left| \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1} \right| \gg 1$ のとき

$$\dot{G} = \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1} \quad (64)$$

で与えられる。

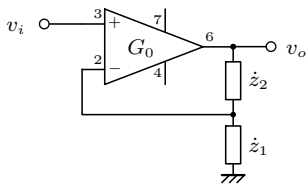


図47. 非反転増幅回路

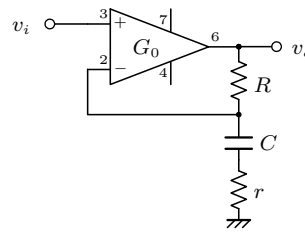


図48. 交流の非反転増幅回路

そこで、図47の \dot{z}_1 を具体的に r に直列に C を接続した合成インピーダンス、 \dot{z}_2 を抵抗 R とした図48の \dot{G} を式(64)で計算する。インピーダンスは

$$\dot{z}_1 = r - \frac{i}{\omega C}, \quad \dot{z}_2 = R$$

であり、これを代入すると

$$\dot{G} = \frac{R}{r - \frac{i}{\omega C}}$$

となる。分母は前節の結果を用いて、式(61)で表される。

$$r - \frac{i}{\omega C} = r \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 r^2 C^2}} \cdot e^{i\theta} \quad \tan \theta = -\frac{1}{\omega r C} \quad (65)$$

$1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ に注意してこれを代入すると、図48の回路のゲインは

$$\dot{G} = \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 r^2 C^2}}} \cdot e^{i\theta} \quad \tan \theta = \frac{1}{\omega r C}$$

となる。指数関数の前の係数を \dot{G}_0 と置くと、

$$\dot{G} \equiv \dot{G}_0 e^{i\theta}$$

$$G_0 = \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 r^2 C^2}}} \quad (66)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega r C} \right) \quad (67)$$

G_0 はゲイン \dot{G} の大きさ（増幅率）であり、周波数によって変化する。また、位相 θ は $\tan \theta$ の逆関数を用いて表され、やはり周波数によって変化する。

以上により図 48 の回路では、出力信号電圧の大きさは入力信号電圧 v_i の G_0 倍に増幅され、位相は入力信号電圧 v_i に比べて θ だけずれる。

9.4 周波数特性

回路にコンデンサがあると、コンデンサのインピーダンスが（角）周波数の関数であるために、 G_0 も θ も（角）周波数により変化する。以下で G_0 と θ の周波数

による変化，周波数特性を調べよう。行うべきことは式(66)と式(67)の角周波数 ω に対する振る舞いを調べることである。

9.5 規準角周波数

変数 ω の代わりに

$$\omega_s = \omega r C \tag{68}$$

と置き， ω_s を用いて式(66)を

$$G_0 = \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_s^2}}} \tag{69}$$

と書き直す。 ω_s は規準角周波数あるいは規格化角周波数と呼ばれ，これを用いると解析が簡潔になる（後述）。式(71)の R/r を除いた部分を両対数グラフにプロットすると図49のようになる。この図をボード線図（Bode Diagram）という。

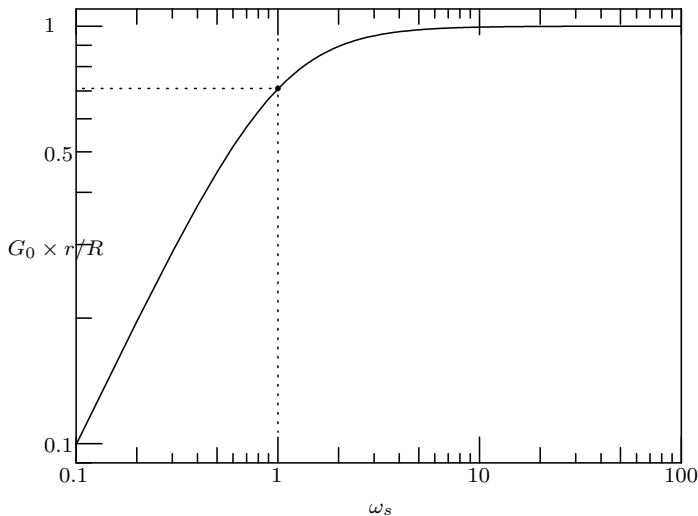


図49. ゲインの大きさ G_0 の周波数特性

9.6 ボード線図の作り方

増幅器や RC 回路，あるいはフィルター回路の周波数特性を解析する場合，ボード線図が必要である。パソコンを用いて描くのが効率的であるが，次のように紙と鉛筆で描いてみると理解が深まるだけでなく，手軽に利用することができる。

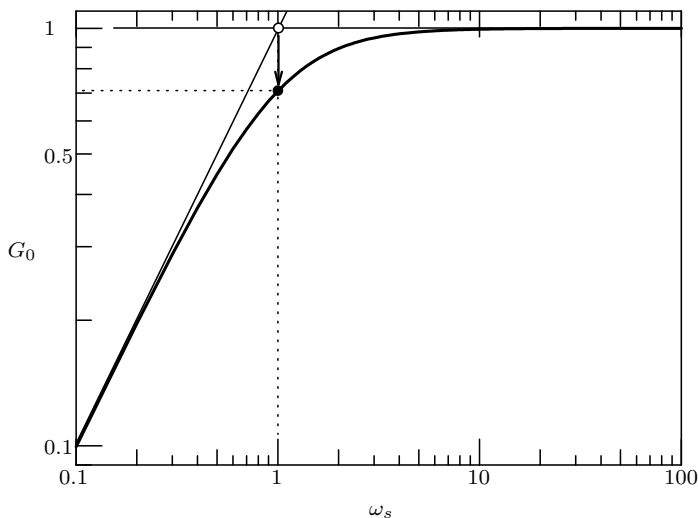


図 50. ボード線図の作り方

手順

- ・両対数グラフ用紙を用意する。
- ・横軸のほどよいところに $\omega_s = 1$ (カットオフ点) をとり，縦の直線を引く。
- ・縦軸は上部に $G_0 = 1$ をとり，横の直線を引く。
- ・ $(1, 1)$ を通り，勾配 = 1 (横 1 桁の変化に対し縦も 1 桁の変化) の直線を引く。
- ・ $(1, 0.71)$ に点を入れ，この点を通り，直線に漸近する曲線を引く。

以上でボード線図が完成する。

9.7 カットオフ周波数

図 49 の曲線は

$$\omega_s = 1 \quad (70)$$

の付近で折れ曲がっている。 ω_s が 1 より小さくなると G_0 は ω_s に比例して小さくなり、1 より大きいところでは、 $G_0 = R/r$ に近づいてゆく。この点を周波数特性が変化するところを示す指標として、カットオフという。

(G_0 は滑らかに変化しているので、他の点、例えば $\omega_s = 1.2$ のところをカットオフと定めてもよいのだが、最も簡潔な $\omega_s = 1$ のところがカットオフと定義されている。)

カットオフの点の(角)周波数を ω_c および f_c と表すと

$$\omega_s = \omega r C = 1 \quad (71)$$

$$\omega_c = \frac{1}{rC} \quad \text{あるいは} \quad f_c = \frac{1}{2\pi rC} \quad (72)$$

である。これは式(59)と同じものである。

式(71)に $\omega_s = 1$ を代入、あるいは式(66)に $\omega = 1/rC$ を代入するとカットオフの点でのゲインの大きさは

$$G_0 = \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.707 \frac{R}{r} \quad (73)$$

となる。増幅率はカットオフの点で、最大値の約 0.7 倍 = -3 dB になる。

・デシベル [dB]

デシベルは、倍率を対数で表し単位 [dB] で表す。

A 倍は $20 \log_{10} A$ [dB] である。上の例では、 $20 \log_{10}(0.7) = -3$ である。

9.8 オーディオ アンプの設計

オーディオ装置で再生される音声の周波数は、いわゆる重低音といわれる音で $f = 10 \text{ Hz}$ 以上である。そこで、増幅率 100 倍で低域のカットオフ周波数が 10Hz のアンプを設計する。例えば $r = 1k$, $R = 100k$ とすれば、増幅率はカットオフ周波数以上で

$$G_0 = \frac{R}{r} = \frac{100}{1} = 100 \text{ 倍}$$

が得られる。カットオフ周波数は、 r と C で決まる。 r は上で決めたので、 C の値は式(72)に $f_c = 10\text{Hz}$, $r = 1k\Omega$ を代入して得られる。

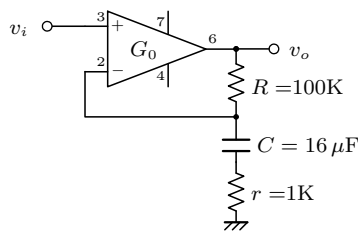
$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi f_c R} \doteq \frac{0.16}{f_c R} \\ &= \frac{0.16}{10 \times 1 \times 10^3} = 1.6 \times 10^{-5} \text{ F} = 16 \mu\text{F} \end{aligned}$$

回路設計の計算によく現れる $1/2\pi$ の値は $0.15915\dots$ であるが、

$$\frac{1}{2\pi} \doteq 0.16$$

と記憶しておくくと便利で、通常この精度で十分である。

以上により設計された増幅回路は次のようになる。



この増幅回路では、入力信号が直流に乗っていて $E + v_i$ となっている場合、出力信号は

$$v_o = E + \dot{G}$$

となり、 E は 1 倍で増幅されず、カットオフ周波数 $= 10\text{Hz}$ 以上で v_i は 100 倍に増幅される。

実用的な交流増幅器としては、さらに入力回路にも交流結合を採用して図 51 のように構成する。

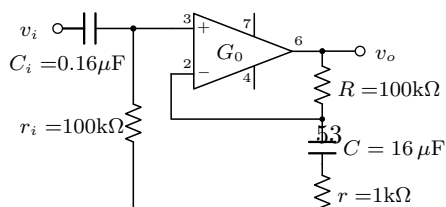


図 51. 実用的な交流増幅回路

r_i は Op Amp の非反転入力端子をグランドに接続して v_i の直流電位を安定して 0 に保つ役割をもつ。また r_i はこの増幅器の入力インピーダンスを決めるものとなるので、あまり小さい値は不適當である。ここでは $r_i = 100\text{k}\Omega$ とする。 C_i の値はカットオフ周波数が 10Hz になるように決める。

C_i の値は式(59)または式(17)に $f_c = 10\text{Hz}$, $r_i = 100\text{k}\Omega$ を代入して得られる。

$$\begin{aligned} C_i &\doteq \frac{0.16}{f_c r_i} \\ &= \frac{0.16}{10 \times 1 \times 10^5} = 1.6 \times 10^{-7} \text{ F} = 0.16 \mu\text{F} \end{aligned}$$

10 フィルター

10.1 一次フィルタ

抵抗，コンデンサ，コイルなどの 2 つの素子（インピーダンス \dot{z}_1 \dot{z}_2 ）を図 52 のように接続すると 1 次フィルタが構成される。フィルタは，さまざまな周波数成分をもつ信号から特定の周波数領域だけを取り出したり除去したりするものである。例えば，フィルタによって，雑音が入っている信号から雑音を取り除いてクリアな信号を得ることができる。

図 (a) の回路で，入力 \dot{v}_i は \dot{z}_1 \dot{z}_2 で分圧されて出力 \dot{v}_o になる。これは回路を図 (b) のように変形してみれば明らかであろう。図 (a) と図 (b) は全く同じ回路である。

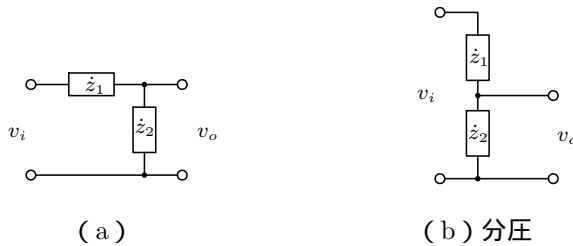


図 52. 1 次フィルタの回路

\dot{v}_i をインピーダンス \dot{z}_1 \dot{z}_2 で分圧すると出力 \dot{v}_o は

$$\dot{v}_o = \dot{G} \dot{v}_i \tag{74}$$

$$= \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} \dot{v}_i \tag{75}$$

で与えられる。 \dot{v}_o に対する \dot{v}_i の比はゲインである。

$$\dot{G} = \frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_1 + \dot{z}_2} \tag{76}$$

ゲインを求めておけば，任意の入力信号電圧 \dot{v}_i を与えたときの，出力信号電圧 \dot{v}_o は， $\dot{v}_o = \dot{G} \dot{v}_i$ で計算することができる。

以下で，抵抗，コンデンサ，コイルのいろいろな組み合わせについて，具体的に \dot{G} を求めてみよう。

10.2 一次 RC ローパスフィルタ

図 53 のように抵抗とコンデンサを接続すると、高域をカットし、低域を通す最も簡単な一次 RC ローパスフィルタとなる。

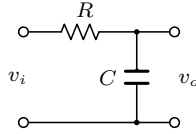


図 53. 一次 RC ローパスフィルタ

この回路のゲイン \dot{G} は、インピーダンス

$$\dot{z}_1 = R$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{i\omega C}$$

を式(76)に代入して、次のように計算される。

$$\dot{G} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{i\omega CR + 1}$$

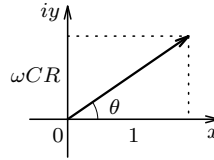


図 54. $\omega CR + 1$ の複素ベクトル図

この式の分母は複素ベクトル図を参照して、

$$i\omega CR + 1 = \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} \cdot e^{i\theta} \quad \text{ただし} \quad \theta = \tan^{-1}(\omega CR)$$

と表される。これを代入し、 \dot{G} は

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \cdot e^{-i\theta}$$

となるが、 $-\theta$ を改めて θ と書いて

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \cdot e^{i\theta} \quad (77)$$

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega CR) \quad (78)$$

と表される。 \dot{G} の式は多少複雑に見えるが、 \dot{G} を大きさ（偏角）に分けて解析するのが普通である。

式(77)の係数部分を G_0 と置いて

$$\dot{G} \equiv G_0 \cdot e^{i\theta} \quad (79)$$

$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \\ \theta = -\tan^{-1}(\omega CR) \end{cases} \quad (80)$$

G_0 と $e^{i\theta}$ の θ をそれぞれ解析する。

10.3 規準角周波数 ω_s } の導入

ここで、関数を見易くするために ω の代わりに $\omega_s \equiv \omega CR$ を変数とすると、式(32)は次のように表現が簡単になる。

$$\begin{cases} G_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_s^2}} \\ \theta = -\tan^{-1}(\omega_s) \\ \omega_s = \omega CR \end{cases} \quad (81)$$

ただ表現が簡単になるだけでなく、 C や R の回路定数は実際の回路ごとに異なるが、それらは変数 ω_s に押し込められて、関数 G_0 や θ が回路の定数を含まない形になるという利点がある。新しい変数 ω_s を規準角周波数という。規準と称するのは CR で規格化された、という意味である。

\dot{G}_0 はゲイン \dot{G} の大きさ(複素数の絶対値)である。 G_0 は、比(出力信号電圧/入力信号電圧)の大きさの周波数による変化を表す。また θ は入力信号電圧に対する出力信号電圧の位相のずれの周波数依存を表す。変化の要点を表にしてみると次のようになる。

ω_s	0		1		∞
G_0	1		$\frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.7$	$\frac{1}{\omega_s}$	0
$\log_{10} G_0$	0		-0.15	$-\log_{10} \omega_s$	$-\infty$
$20 \log_{10} G_0$ [dB]	0		-3	$-20 \log_{10} \omega_s$	$-\infty$
θ	0°		-45°		-90°

表7. G_0 と θ の規準角周波数 ω_s による変化

G_0 と θ を両対数グラフに表したものを、2 つあわせてボード線図 (Bode Diagram) という。横軸のスケールは共通にする。

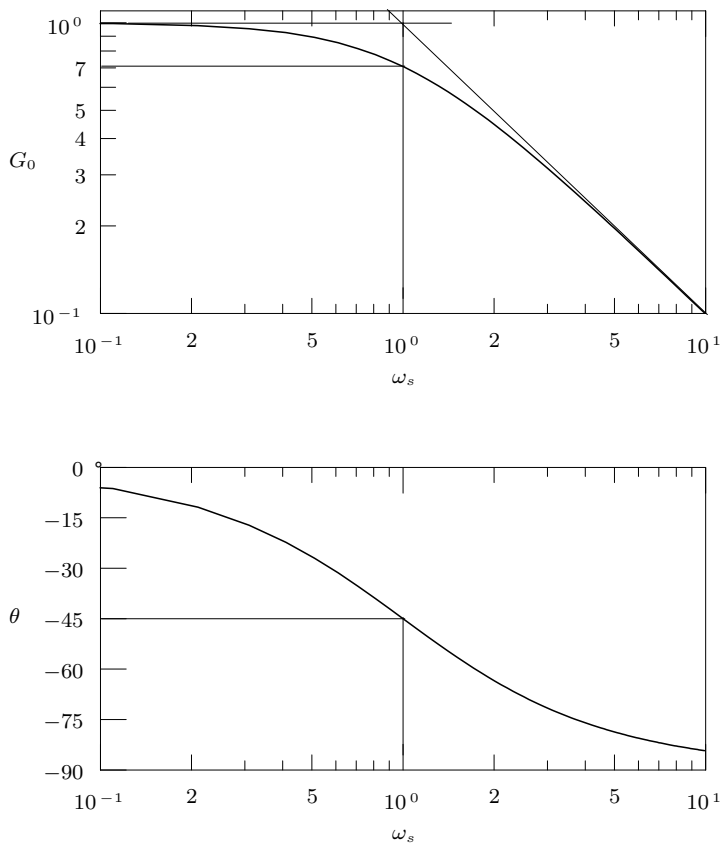


図 55. CR ローパスフィルターのボード線図

《大きさ G_0 》

10.4 カットオフ周波数

図 55 の G_0 曲線は

$$\omega_s = 10^0 = 1 \tag{82}$$

の付近で折れ曲がっている。 ω_s が 1 より小さくなると G_0 は 1 に近づいてゆき、1 より大き

いところでは、 ω_s に比例して小さくなる。この点をカットオフという。式(82)はカットオフ点の規準角周波数を表す。このとき、位相は θ は -45° だけ遅れている。以上は、 C, R の値によらないユニバーサルな関数と規準角周波数による考察である。

C と R が具体的に与えられたときのカットオフ角周波数を ω_c あるいはカットオフ周波数を f_c と書くことにすると、カットオフの点では $\omega_s = \omega CR = 1$ より

$$\omega_c = \frac{1}{CR} \quad f_c = \frac{1}{2\pi CR} \quad (83)$$

である。

式(33)に $\omega_s = 1$ を代入、あるいは式(32)に $\omega = 1/RC$ を代入するとカットオフの点でのゲインの大きさは

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.707$$

である。つまり、ゲインはカットオフの点で、最大値の約 0.7 倍である。これをデシベル単位で表せば -3 dB である。

・デシベル [dB]

倍率 A 倍を、対数をとって

$$x [\text{dB}] = 20 \log_{10} A \quad (84)$$

と表現する。上の例の 0.7 倍は、 $20 \log_{10}(0.7) = -3$ [dB] である。

A	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
x [dB]	-60	-40	-20	0	20	40	60

特に、次の値はよく使われるので重要である。

A	0.5	0.7	1	$\sqrt{2}$	2
x [dB]	-6	-3	0	3	6

デシベルは、元々はエネルギーを比較する場合について定義されたものである。エネルギーの倍率 E の対数ととり

$$X [\text{B}] = \log_{10} E$$

として単位 [B] ([Bell] ベル) で表す。[dB] は [B] の 1/10 の単位である。

$$x [\text{dB}] = 10 \log_{10} \quad (85)$$

式(84)と式(85)の2倍の違いは、エネルギー = (振幅)² であることによる。 $E = A^2$ とすれば、 $10 \log_{10} E = 20 \log_{10} A$ である。電圧や電流の[次元]は振幅に相当し、2乗がエネルギーになる。

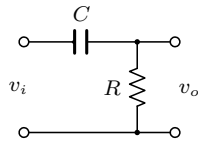


図 56. CR ハイパスフィルタ

カットオフの特性は、 -6 dB/oct あるいは -20 dB/dec と表される。つまり、周波数が倍になるとゲインが $1/2$ になる、あるいは周波数が 1 桁上がると、ゲインは $1/10$ になる。