目 次

5　回路計算の法則

直流回路・交流回路

電子回路を設計したり回路の働きを解析する場合，回路中の任意の箇所において，電流や電圧を知ることが必要になる。解析が複雑な場合に計算を助けるいくつかの法則や定理があり，これらを用いると解析が容易になる。法則や定理の説明では，直流回路が用いられる。しかし，

全ての法則や定理は交流回路についても全く同じように成り立つ

ことを銘記しておこう。

非線型回路

非線型回路に対しては法則や定理は存在しない。回路の法則や定理は全て線型回路を対象とするものであり，

全ての法則や定理は非線型回路については，成り立たない

ことを忘れてはならない。

5.1　線型・非線型

解析的に解くことができるのは，回路が「線型素子」だけで構成されている線型回路の場合に限られる。回路に非線型な要素がある場合には，計算によって答を見つけることは不可能であり，グラフを用いたり，数値計算で解を求めることになる。ただし，非線型な回路でも線型近似が可能な場合には回路法則や定理を適用することができる。

線型な系の特徴　—　重ね合わせの原理

「線型」$linear$ とは，直線的な，比例的な，というような意味であるが，単に比例関係があるということだけではなく，重ね合わせの原理が成り立つ点が重要である。 以下でもう少し具体的に考える。

例えば物理的な系として,「熱」を与えると「光を発生する」ような物質を考える。この物質に熱量 x_1 を与えたところ，強度 y_1 の光を発生した。 異なる熱量 x_2 を与えたら，強度 y_2 の光を発生した。 そこで，熱量（$x_1 + x_2$）を与えたら，強度（$y_1 + y_2$）の光を発生した。 この場合，熱（**刺激**）の合算値に対する光（**応答**）は，個々の刺激に対する応答 y_1, y_2 の合算値（$y_1 + y_2$）になっている。 つまり，刺激と応答について**重ね合わせの原理**が成り立っている。このような系は線型な系である。刺激と応答の組み合わせは，力 → 伸び，熱 → 温度，光 → 電流，…，誕生日のプレゼント → 喜び[10]のようにあらゆる組み合わせが考えられる。

線型な関数

関数 $y = f(x)$ において

$$y_1 = f\,(x_1)\,, \qquad y_2 = f\,(x_2)$$

のとき

$$y_1 + y_2 = f\,(x_1 + x_2)$$

が成立つなら $f(x)$ は線型な関数である。

電池と抵抗を接続した電子回路で電池の電圧（**刺激**）を倍にすれば，流れる電流（**応答**）も倍になる。 この回路は線型な系である。 また，複数の電池と抵抗を接続した電子回路で，流れる電流は個々の電池の電圧（**刺激**）に対する電流（**応答**）を合算したもので与えられる。 この場合も系は，線型である。 こ

[10]**誕生日のプレゼント**：　1 人からもらうと 1 の喜び，2 人からもらうと 2 の喜び，…，10 人からもらうと 10 ではなくてもっと大きな 100 の喜び !，… 人間の気持ちは非線型である。

れは後出「重畳の定理」の原理である。

以下で述べる回路の法則や定理の全ては線型回路についてのみ成り立つものである。素子として電池，抵抗，コイル，コンデンサだけを含む電気回路は，いかに素子の数が多く，複雑であっても理想的な線型回路である。

非線型素子の取り扱い　しかし一般の電子回路にはダイオードやトランジスタなど非線型な素子が含まれるのが普通であり，電子回路のほとんどは線型回路ではない。 すると，回路の法則や定理の全ては役に立たないと思われる。 しかしそうではない。

線型近似　電子回路の動作は，回路に含まれる素子の動作点を定め，その動作点を中心にして信号の電圧や電流が変化するようにはたらく。 このとき，変化は**線型**であると考えてよい。変化する信号成分について，線型回路についての法則や定理を適用することができる。

5.2　キルヒホッフの第 1 法則

キルヒホッフの第 1 法則と次節のキルヒホッフの第 2 法則を合わせてキルヒホッフの法則という。 キルヒホッフの法則は**直流・交流**どちらの回路についても成立つ。

回路網の任意の接続点（分岐点）で，電流の総和は 0 である。

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{35}$$

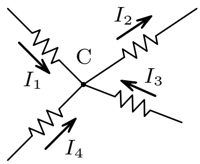


図30. 電流の分岐点

右図のように接続点（分岐点）C で電流が漏れ出たり湧き出たりしない限り，入ってきた量と同じ量が出て行かなければ矛盾するから，流入する電流と流出する電流は等しく，電流は保存されなければならない。 流入する電流の符号を $+$ とすれば，流出する電流の符号は $-$ で，それらの総和は 0 である。図30 では接続点 C について　$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0$　である。

例題 12. 次の回路で接続点 a と c についてそれぞれキルヒホッフの第 1 法則を適用せよ。

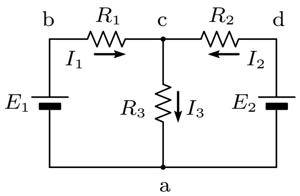


図31.

解

a：　$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$

b：　$I_1 + I_2 - I_3 = 0$

(I_1, I_2, I_3 を求めるには，もう一つ関係式が必要である。)

5.3　キルヒホッフの第 2 法則

回路網の中の任意の閉回路を一めぐりするとき，電位の変化の総和は 0 である。

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = 0 \tag{36}$$

電位の変化は接続点の間の**電圧**である。閉回路を一めぐりすれば終点＝出発点で，電位ははじめの値に戻るから，電位の変化の総和は 0 でなければならない。 閉会路は閉ループ，closed loop とも言う。

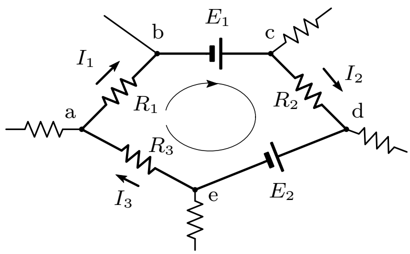


図 32. 回路中の閉回路

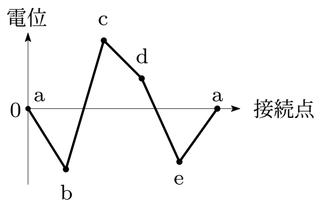


図 33. 電位の上がり下がり

例：　上図で閉回路 a → b → c → d → e → a を回るとき次のようになる。

$$-R_1I_1 + E_1 - R_2I_1 - E_2 - R_1I_3 = 0$$

・ 回る向きは右・左どちらでもよい。

・ 起電力（電池）の－極から＋極へ進むときは電位の変化は＋，逆の場合は－である。

・ 抵抗では，電流の向きに進むとき電位の変化は－，逆向きに進むときは＋である。 水の流れのように，流れに乗って進めば高度は下がり，遡（さかのぼ）れば高度は上がる。

・ 電流の向きは，I に対してあらかじめ向きを自由に定義すればよい。 定義の向きが実際の電流の向きと逆の場合は I の値が結果的に負になるだけで不都合はない。

例題 13. 図の複数の電源をもつ回路で

R_2 を流れる電流 I_2 を求めよ。

（未知数 I_1, I_2, I_3 に対して，

３つの関係式を立てればよい。）

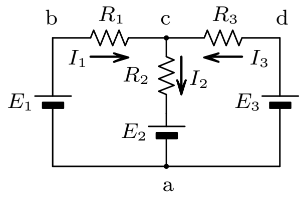


図 34. 複数の電源をもつ回路

解

電流の向きを図中の矢印の向きに定義し，キルヒホッフの法則を用いて解く。接続点 c についてキルヒホッフの第 1 法則から

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0$$

の関係がある。 左側の閉回路 abca についてキルヒホッフの第 2 法則から

$$E_1 + R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I_3) - E_2 = 0$$

が得られ，同様に右側の閉回路 adca について次式を得る。

$$E_3 + R_3 I_2 + R_2 (I_1 + I_3) - E_2 = 0$$

整理して

$$(R_1 + R_2)\ I_1 + R_2 I_3 = E_2 - E_1$$

$$R_2 I_1 + (R_2 + R_3)\ I_3 = E_2 - E_3$$

この連立方程式の解は行列式を用いて

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

で与えられる。　ただし

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} E_2 - E_1 & R_2 \\ E_2 - E_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = (R_2 + R_3)(E_2 - E_1) + R_2(E_3 - E_2)$$

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E_2 - E_1 \\ R_2 & E_2 - E_3 \end{vmatrix} = (R_1 + R_2)(E_2 - E_3) + R_2(E_1 - E_2)$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = (R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2$$

$$= R_1R_2 + R_3R_2 + R_3R_1$$

である。従って，R_2 を流れる電流 I_2 は次のようになる。

$$I_2 = I_1 + I_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{\Delta}$$

$$= \frac{R_3E_1 - (R_1 + R_3)E_2 + R_1E_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{37}$$

ちょうじょう

5.4 重畳の定理 （重ね合せの定理）

複数の電源を含む回路を流れる電流は，個々の電源による電流を重ね合せた（加算した）ものに等しい。

別の表現をすると

複数の電源を含む回路のある箇所を流れる電流 I は，i 番目の電源はそのまま残し，他の全ての電源について，電圧電源は導線で置き換え，電流電源は切り離した場合の電流を I_i として

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{38}$$

で与えられる。電源には，**電圧**電源，**電流**電源のどちらも含まれる。

重畳の定理は回路が「線型」であることを言い換えたものに過ぎないが，回路の解析に大変役立つ定理である。

例題 14. 図の回路を流れる電流 I を重畳の定理により求めよ。

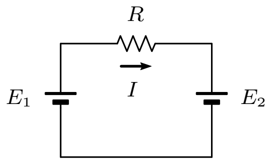


図 35 (a)

解

電池 E_1 だけによる電流は，図 (b) のように電池 E_2 を導線に置き替えた場合の電流 I_1 である。

$$I_1 = \frac{E_1}{R}$$

同様に，電池 E_2 だけによる電流は，図 (c) のように電池 E_1 を導線に置き替えた場合の電流 I_2 である。

$$I_2 = \frac{E_2}{R}$$

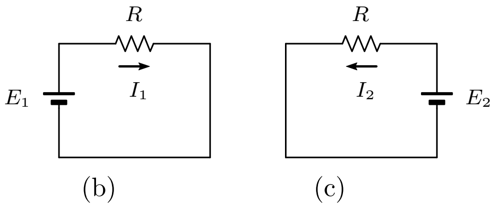


図 35. 重畳の定理による解析

従って，重畳の定理により

$$I = I_1 + (-I_2) = \frac{E_1}{R} - \frac{E_2}{R} = \frac{E_1 - E_2}{R}$$

I_2 は I に対して逆向きなので $-I_2$ として加算する。

この例では重畳の定理を使わず，R による電圧降下を考えれば次のように簡単に答は見つかる。R による電圧降下は両端の電位の差 $E_1 - E_2$ である。従っ

て，電流は次式で与えられる。

$$I=\frac{E_1-E_2}{R}$$

しかし，回路が複雑になればなるほど重畳の定理が有効になる。

例題 15. 図の複数の電源をもつ回路で

R_2 を流れる電流 I_2 を求めよ。

（前出キルヒホッフの法則で解いた例を

重畳の定理を用いて解く。）

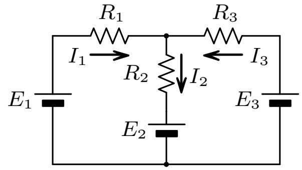
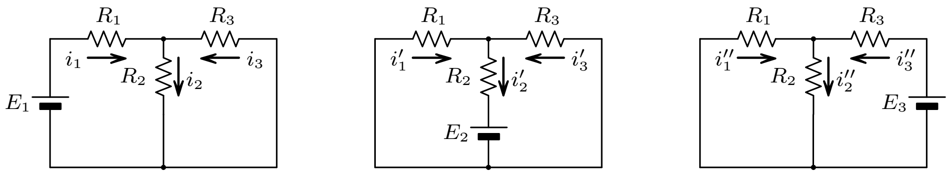


図 36. 複数の電源をもつ回路

解

重畳の定理によれば図 36 の回路を流れる電流 I_2 は 3 つの電池 E_1, E_2, E_3 がそれぞれ 1 つだけ存在する場合の回路 (a)，(b)，(c) で，それぞれ R_2 を流れる電流の総和 $i_2+i_2'+i_3''$ で与えられる。



E_1 だけのとき i_2 (a)　　E_2 だけのとき i_2' (b)　　E_3 だけのとき i_2'' (c)

図 37. 重畳の定理による解析

以下で i_2, i_2', i_2'' を求める。

回路（a）について

i_1 は R_1 と（R_2, R_3の並列）の直列抵抗に流れる電流であるから

$$i_1=\frac{E_1}{R_1+R_2/\!/R_3}=\frac{E_1}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}=\frac{(R_2+R_3)\,E_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

である。 i_2は i_1が i_2と i_3 に分流しているから次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{R_3}{R_2+R_3} i_1 \\
&= \frac{R_3 E_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}
\end{aligned}
$$

回路（b）について

R_1と R_3 は並列接続であるから，R_2 を流れる電流は i_1 と同様にして（ただし，符号に注意）

$$
i_2' = -\frac{E_2}{R_2+R_1 /\!/ R_3} = -\frac{E_2}{R_2+\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}} = -\frac{(R_1+R_3)E_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}
$$

回路（c）について

上の（a）の回路の E_1と E_3, R_1と R_3 を入替えたものであるから（a）と全く同様にして

$$
i_2'' = \frac{R_1E_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}
$$

従って,

$$
I_2 = i_2 + i_2' + i_2'' = \frac{R_3E_1-(R_1+R_3)E_2+R_1E_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}
$$

例題 16. 図の複数の電源をもつ回路で 20 Ωの抵抗を流れる電流 I_3 を求めよ。

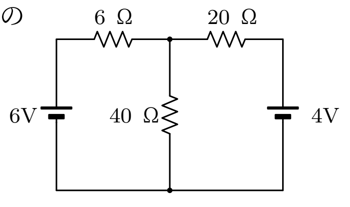


図 38. 複数の電源をもつ回路

解

回路中右側の 4V の電池を導線に置き替えた図39 で 20 Ωの抵抗を流れる電

流を i_1，左側の 6V の電池を導線に置き替えた図 40 で 20 Ωの抵抗を流れる電流を i_2，とすると，求める電流 I は重畳の定理から $i_1 - i_2$ である。

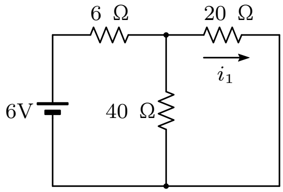


図 39.

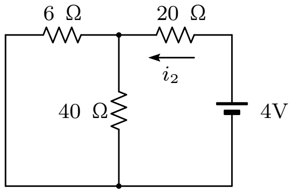


図 40.

$$i_1 = \frac{6}{6 + 40/\!/20} \times \frac{40}{60} = \frac{6}{6 + \dfrac{40 \cdot 20}{40 + 20}} \times \frac{2}{3} = \frac{360}{360 + 800} = \frac{36}{116} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{29}$$

$$i_2 = \frac{4}{20 + 40/\!/6} = \frac{4}{20 + \dfrac{40 \cdot 6}{40 + 6}} = \frac{4 \cdot 46}{20 \cdot 46 + 240}$$

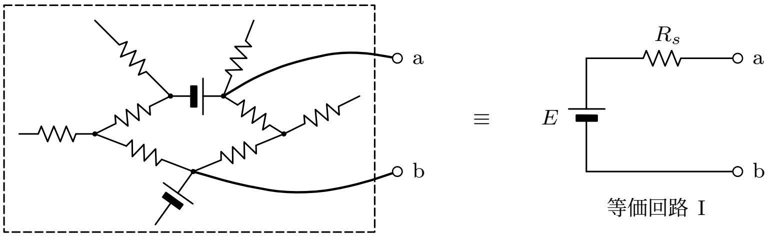
従って，求める電流は次の値である。

$$I = i_1 - i_2 =$$

5.5　鳳–テブナン（Thevenin）の定理

鳳–テブナンの定理は一まとまりの複雑な回路を，その内容を知らないままブラック・ボックス[11]として取扱うことを可能にする。 鳳–テブナンの定理には次の **I**, **II** のように 2 通りの表現がある。

I.　線型回路網中に選んだ 2 つの接続点から見た回路全体のはたらきは,
1 つの定電圧電源に 1 つの抵抗が直列に接続された回路に等価である。



ブラック・ボックス（線型回路網）

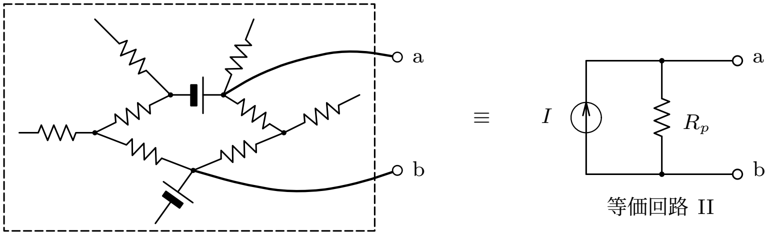
図 41. 定電圧電源等価回路（等価回路　）

この定理は，図左のように解析が非常に複雑な線型回路網であっても，箱の内部の複雑な回路を解析する必要はない，と言う。 この複雑な回路は外部から見ると，図右のようにただ 1 個の電池と 1 個の抵抗が直列に接続された回路と同じはたらきをするのである。 そこで，この複雑な回路のはたらきを知るには，図右の回路の電池の起電力 E と抵抗値 R_s さえ分かれよい。

[11]**Black box　ブラック・ボックス**
箱の内容は不明であるが，**箱全体の外部に対するはたらきが分っている**とき，その箱はブラック・ボックスとして扱うことができる。 例えばＴＶ受像器は，その内部構造を知らなくても，どう操作すればどんな画像が現れるかが分っているのでブラック・ボックスとみることができる。中身も不明，働きも不明な場合，ブラック・ボックスとは呼ばない。

II.　線型回路網中に選んだ 2 つの接続点から見た回路全体のはたらきは,

1 つの定電流電源に 1 つの抵抗が並列に接続された回路に等価である。



ブラック・ボックス（線型回路網）　　　　等価回路 II

図 42. 定電流電源等価回路（等価回路　）

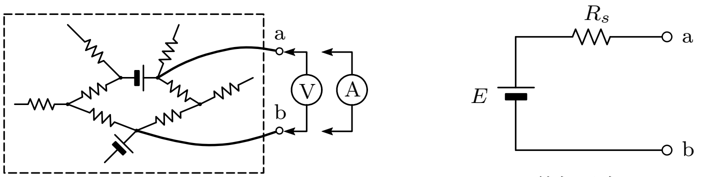
上と同様に複雑な線型回路網は，図右のようにただ 1 個の定電流電源とそれに 1 個の抵抗が並列に接続された回路と考えてよく，実際に必要となるのはこの等価な定電流電源の電流値 I と抵抗値 R_p である。

この 2 つを合わせて鳳–テブナンの定理という。

5.6　鳳–テブナンの定理の利用

5.6.1　等価回路 I を用いる場合

鳳–テブナンの定理によって，複雑な回路を等価回路 I に置き替える。



線型回路網　　　　等価回路 I

次にこの等価回路の電池や抵抗の値が決まれば，その複雑な回路のはたらきが

解析されたことになる。 つまり，等価回路 I の定電圧電源（電池）の電圧 $\boldsymbol{E}$ と直列抵抗値 $\boldsymbol{R_s}$ が求められれば，以後複雑な回路は忘れて単純な等価回路 I を扱えばよい。

電圧 E の決定

E は元の線型回路網の端子 a–b から電流を取り出さないとき，つまり何も接続しないときの端子 a–b 間の電圧（開放端電圧）に等しい。この電圧を知るには，元の回路の a–b 間に電圧計を接続し，電圧を測定すればよい。ただし，電圧計に電流が流れると回路中の抵抗による電圧降下が生じて誤差を与えるので，用いる電圧計[12]は内部抵抗が ∞ で，電流が流れないものでなければならない。

抵抗 R_s の決定

R_s は回路網に含まれる全ての電池を導線（抵抗 $0\,\Omega$ ）に置き替え[13]，また全ての定電流源を切り離したとき[14]，端子 a–b から見た抵抗値に等しい。

そこで，この抵抗値を知るには，上で電圧 E が測定されているので，元の回路の a–b 間に内部抵抗が 0 の電流計を接続して流れる電流（短絡電流） I 値を測定する。 この測定から直列抵抗の値はオームの法則により

$$R_s = \frac{E}{I} \tag{39}$$

で決められる。 電流計の内部抵抗 z が無視できない場合は

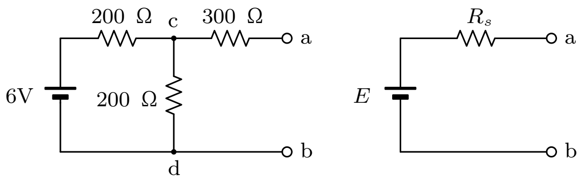
$$R_s = \frac{E}{I} - z \qquad \left(\because \quad I = \frac{E}{R_s + z}\right) \tag{40}$$

[12]理想的な電圧計は内部抵抗が ∞ で，電流が流れない。 デジタル電子電圧計はほぼ理想的な電圧計に近く入力インピーダンス（内部抵抗）が 1000 GΩ（$= 10^{12}\Omega$）以上のものが普及している。

[14]**電池を導線に置き替える**のは，電圧源（電池）の内部抵抗は $0\,\Omega$ であり，電池の抵抗値は $0\,\Omega$ であるからである。

[14]**定電流源を切り離す**のは，定電流源の内部抵抗は ∞ であるからである。

例題 17. 図 43(a) の回路は鳳–テブナンの定理により，図 (b) の等価回路で表される。電圧 E と抵抗値 R_s を求めよ。



(a) (b)

図 43.

解.

図（b）の電圧 E は図 (a) の端子 a–b の開放端電圧（何も接続しないときの電圧）V_{ab} である。 そこで V_{ab} を求める。 まず，6V の電圧が 200 Ωと 200 Ωで分圧されているから，cd 間の電圧は 3V である。 c 点と a 点の間には 300 Ωの抵抗があるが，電流は流さないので，a 点の電位と c 点の電位は等しい。従って，V_{ab} ，つまり図 (b) の電圧 E は

$$E = 3\text{V}$$

である。次に，図 43(a) の端子 a–b から見た回路の抵抗は，電池を導線で置き替えた図 44 で計算すればよい。 従って，R_s は 2 つの 200 Ωの抵抗を並列接続したものに 300 Ωを直列に接続したものであるから

$$R_s = 200/\!/200 + 300 = 400\ \Omega$$

である。 これらの値を記入すれば解答は図 45 となる。

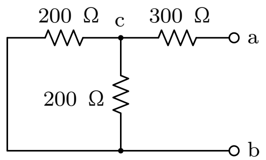


図 44.

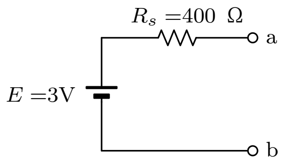
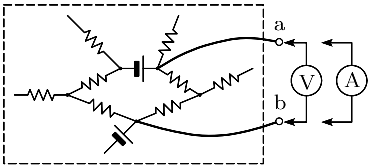


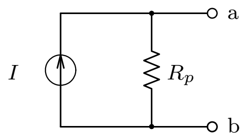
図 45.

5.6.2　等価回路 II を用いる場合

鳳–テブナンの定理によって，複雑な回路を等価回路 II に置き替える。次にこの等価回路の定数が決まれば，その複雑な回路のはたらきが解析されたことになる。回路の定数とは定電流電源の電流値や抵抗値のことである。



線型回路網



等価回路 II

つまり，等価回路 II の定電流電源の電流値 $\boldsymbol{I}$ と並列抵抗値 $\boldsymbol{R_p}$ を決めれば，図左の複雑な回路は忘れて，図右の簡単な等価回路 II を考えればよい。

電流値 I の決定

元の回路の a–b 間に内部抵抗が 0 の電流計を接続して a–b 間に流れる電流（短絡電流）を測定すると，この電流が I となる。 なぜなら，等価回路 II で考えると抵抗 R_p に内部抵抗が 0 の電流計が並列に接続されるので，R_p には電流が流れず，全ての電流が電流計に流れるからである。

抵抗 R_p の決定

R_p は回路網に含まれる全ての電圧源を導線（抵抗 $0\,\Omega$ ）に置き替え[15]，また全ての定電流源を切り離した[16]とき，端子 a–b から見た抵抗値に等しい。
そこで，上で電流 I が測定されているので電圧 E を測定すればオームの法則により R_p を知ることができる。このとき用いる電圧計は前と同様に，内部抵抗が ∞ で，電流が流れないものでなければならない。 電流が流れると回路中の抵抗による電圧降下が生じて誤差を与える。

[15]**電池を導線に置き替える**のは，電圧源（電池）の内部抵抗は $0\,\Omega$ であり，電池の抵抗値は $0\,\Omega$ であるからである。

[16]**定電流源を切り離す**のは，定電流源の内部抵抗は ∞ であるからである。

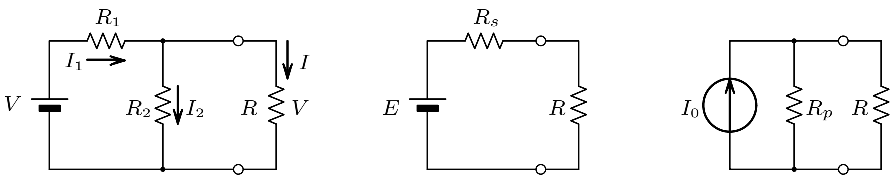
この測定から並列抵抗の値は

$$R_p = \frac{E}{I} \tag{41}$$

で決められる。 電流計の内部抵抗 z が無視できない場合は

$$R_p = \frac{E}{I} - z \qquad \left(\because \qquad I = \frac{R_p}{R_p + z}\right) \tag{42}$$

例題 18. 図（a）の回路は図（b）,（c）の回路と等価であることを証明せよ。



（a）　　（b）　　（c）

図 46.

解

図（a）で I_1 は直列抵抗 $R_1 +$（$R_2/\!/R$）に流れる電流であるから

$$I_1 = \frac{V}{R_1 + R_2/\!/R}$$

I_1 は分流して I_2 と R に流れる電流 I に分れるので

$$\begin{aligned} I &= \frac{R_2}{R_2 + R} I_1 \\ &= \frac{R_2}{R_2 + R} \cdot \frac{V}{R_1 + R_2/\!/R} = \frac{R_2}{R_2 + R} \cdot \frac{V}{R_1 + \dfrac{R_2 R}{R_2 + R}} \\ &= \frac{R_2 V}{(R_2 + R)\, R_1 + R_2 R} = \frac{R_2 V}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)\, R} \end{aligned}$$

$$I = \frac{\dfrac{R_2}{R_1+R_2}V}{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R} \tag{43}$$

ここで，次の量を定義する。

$$E \equiv \frac{R_2}{R_1+R_2}V \qquad R_s \equiv \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = R_1/\!\!/R_2$$

すると

$$I = \frac{E}{R_s+R}$$

と表される。 これは図（b）で R を流れる電流に等しく図（a）と（b）の回路は等価である。

次に図（b）と（c）が等価であることを示そう。前式(43)を変形する。

$$I = \frac{\dfrac{R_2}{R_1+R_2}V}{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R} = \frac{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\dfrac{V}{R_1}}{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R} = \frac{(R_1/\!\!/R_2)\dfrac{V}{R_1}}{R_1/\!\!/R_2+R}$$

ここで，次の量を定義する。

$$I_0 \equiv \frac{V}{R_1} \qquad R_p \equiv R_1/\!\!/R_2$$

すると

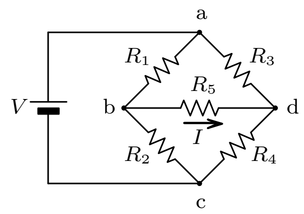
$$I = \frac{R_p}{R_p+R}I_0$$

と表される。 これは図（c）で R を流れる電流に等しく図（a）（c）の回路は等価である。

5.7　ブリッジ回路（ホィートストン・ブリッジ）

ブリッジ回路にはいろいろな種類があり，研究者の名前を冠して〇〇・ブリッジのように名前が付けられている。 単にブリッジ回路と呼べばホィートストン・ブリッジを指すことが多い。

例題 19. 図（a）のブリッジ回路で R_5 に流れる電流 I を求めよ。



（a）ホィートストン・ブリッジ

解

図（a）の回路を見やすくするために図（b）のように書き変える。 さらに接続点 b，c から端子を引出し，b–d 間に接続されている抵抗 R_5 も外へ引出して図（d）のように変形する。 図（b）（d）の変形は回路図の見方を変えただけで，回路は図（a）と全く同じものである。

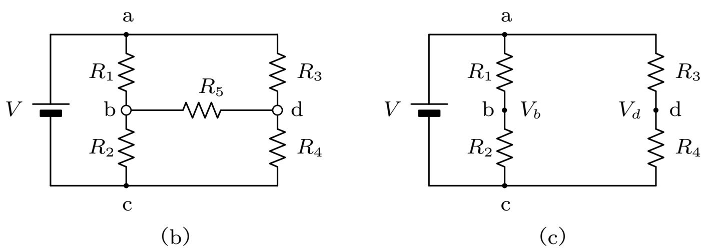


図 47. ブリッジ回路の R_5 に流れる電流 I の解析

図（d）の R_5 を除く他の全ての部分は図（c）であり，これは鳳–テブナンの定理によって 1 個の電圧源とそれに直列な 1 個の抵抗に置き替えることができる。 従って，回路全体は図（e）と等価であり，この簡単な回路で解析を行

えばよい。

そこで，図（e）で等価電圧源 E と抵抗 r が求められれば，R_5 に流れる電流 I は

$$I = \frac{E}{r + R_5} \tag{44}$$

のように簡単に計算することができる。

E は R_5 を取り去って端子 b–d 間を開放したときに現れる電圧であるから，図（c）で簡単に求めることができる。

$$\begin{aligned} E &= V_b - V_d \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2}V - \frac{R_4}{R_3 + R_4}V = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}V \end{aligned}$$

また r は同様に R_5 を取り去り，V を導線に置き替えたときの端子 b–d 間の抵抗であるから

$$\begin{aligned} r &= R_1 /\!/ R_2 + R_3 /\!/ R_4 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} \\ &= \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

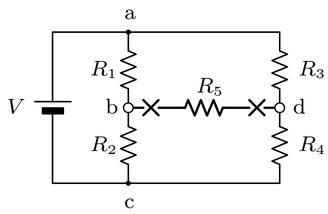
である。 従って，R_5 に流れる電流は[17]

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{r + R_5} \\ &= \frac{\dfrac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \cdot V}{\left(\dfrac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} + R_5)\right)} \end{aligned}$$

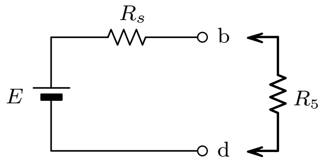
[17]鳳–テブナンの定理を利用した上の計算では，先ず注目する R_5 を切り離し，残りの回路網を鳳–テブナンの定理によって 1 つの定電圧源 E とそれに直列な抵抗 r による単純な等価回路に置き替えてから再び R_5 を接続するという考え方が要点である。

$$I = \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)\ V}{R_1R_2(R_3+R_4) + R_3R_4(R_1+R_2) + (R_1+R_2)\ (R_3+R_4)\ R_5} \tag{45}$$

のように求められる。



回路網



等価回路 I

ブリッジによる抵抗の測定

式(45) で $I = 0$ とおくと**ブリッジの平衡条件**が得られる。

$$R_2R_3 - R_1R_4 = 0 \tag{46}$$

図（a）で例えば R_5 の代りに検流計を接続し，R_1 を未知抵抗として，R_2, R_3 , R_4 を調節して電流が 0 となるようにすれば式(51) により R_1 を求めることができる。

5.8　式の立て方

一般に回路を解析する場合，電流や電圧 I, V を未知変数として定義し，キルヒホッフの法則を用いて未知数の数だけ，独立な式を立てればよい。

例題 20. 図の回路で R_3 に流れる電流 I_3 を
キルヒホッフの法則を用いて求めよ。

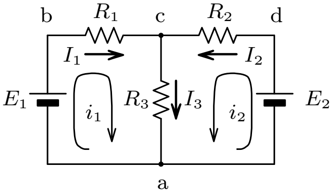


図 48. 電池 2 個の回路

解 1

1. 枝電流法　電流が流れる路（枝）ごとに電流を定義する。

図のように I_1, I_2, I_3 を定義する。

c 点についてキルヒホッフの第 1 法則（$\sum_i I_i = 0$）より次式を得る。

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{47}$$

閉ループ abca および adca についてキルヒホッフの第 2 法則（$\sum_i V_i = 0$）より，それぞれ

$$V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$
$$V_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

の関係が得られ，この 3 式より I_1, I_2, I_3 を求めることができる。

解 2

2. 還電流法　閉ループを回る電流を定義する。

図のように i_1, i_2 を定義する。

閉ループ abca および adca についてキルヒホッフの第 2 法則（$\sum_i V_i = 0$）より，それぞれ

$$V_1 - R_1 i_1 - R_3(i_1 + i_2) = 0 \tag{48}$$

$$V_2 - R_2 i_2 - R_3(i_1 + i_2) = 0 \tag{49}$$

の関係が得られ，この 2 式より i_1, i_2 が求められ，$I_3 = i_1 + i_2$ を求めることができる。

以上のように，閉ループを回る電流を定義する還電流法の方が，未知数と方程式の数が 1 つ少なくて済む。

5.8.1 独立な式の数

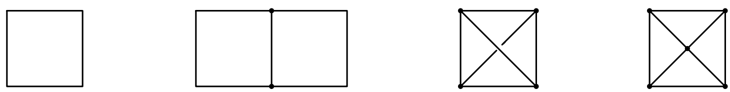
一般に接続点と閉ループをもつ回路全体で，電圧と電流について
キルヒホッフの第 1 法則による独立な式は（接続点の数 $-$ 1）個
キルヒホッフの第 2 法則による独立な式は（閉ループの数 $-$ 1）個
だけ立てることができる。 合わせてキルヒホッフの法則により $C + N - 2$ 個の式を立てることができる。[18]

いま，幾何学的な多面体の「辺」を電流の路,「頂点」を接続点,「面を囲む辺」を閉ループに対応させた回路を考えることができる。

この回路について，独立な式は

$$\text{頂点の数} + \text{面の数} - 2$$

である。 ところで，これは多面体に関するオイラーの定理[19]により，**辺の数に等しい。**



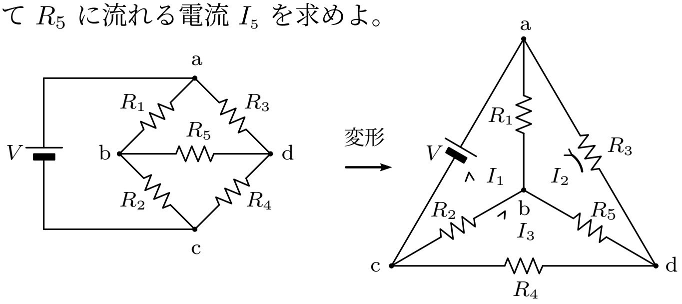
第 1 法則より	0	1	3	4
第 2 法則より	1	2	3	4

[18]「接続点」は 3 本以上の路（枝）が接続される点を言う。

[19]多面体に関するオイラーの定理
頂点の数が C，辺の数が B の N 面体 において，次の関係が成立つ。

$$N + C - B = 2 \tag{50}$$

例題 21. 図のホィートストン・ブリッジ回路について，キルヒホッフの第 2 法則を用いて R_5 に流れる電流 I_5 を求めよ。



(a)　(b)

図 49. ホィートストン・ブリッジ回路

解

図 49（a）は（b）のように変形して書直すことができる。図（a）と（b）で，a,b,c,d の各点それぞれに同じものが接続されていることを見れば確認できる。電流は配線を伝って流れるので，配線図は引き伸ばしたり縮めたりあるいは曲げたり自由に変形することができる。このような変形をトポロジカルに同等な変形という。

図（b）で，閉ループを回る未知電流を I_1, I_2, I_3 と定義し，キルヒホッフの第 2 法則を適用する。未知数が 3 つであるから，独立な 3 つの式を立てれば解くことができる。ループを回るとき，**電圧降下を** $+$ にとる（電圧上昇を $-$ にとる）ことにすると

ループ abca：　$R_1(I_2 - I_1) + R_2(I_3 - I_1) + V = 0$

ループ adba：　$-R_3 I_2 + R_5(I_3 - I_2) + R_1(I_1 - I_2) = 0$

ループ cbdc：　$R_2(I_1 - I_3) + R_5(I_2 - I_3) - R_4 I_3 = 0$

のように連立方程式を得る。これを電流 I_1, I_2, I_3 について整理すると

$$\begin{cases} (R_1+R_2)\,I_1 & -\,R_1 I_2 & -\,R_2 I_3 = V \\ R_1 I_1 & -\,(R_1+R_3+R_5)\,I_2 & +\,R_5 I_3 = 0 \\ R_2 I_1 & +\,R_5 I_2 & -\,(R_2+R_4+R_5)\,I_3 = 0 \end{cases}$$

となり，この連立方程式を解けばよい。次ページの解より求める電流 I_5 は

$$I_5 = I_3 + I_2$$

$$I_5 = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_1R_2(R_3+R_4) + R_3R_4(R_1+R_2) + R_5(R_1+R_2)(R_3+R_4)}V$$

と求められる。

この式から，$I = 0$ のときは

$$R_1R_4 - R_2R_3 = 0$$

$$R_1R_4 = R_2R_3 \tag{51}$$

であることが分かる。図 49（a）でブリッジの相対する辺の抵抗の積が等しいとき，$I_5 = 0$ となる。この状態をブリッジが平衡したという。R_5 を検流計に置き換えて，式(51) により未知の抵抗値を測定したり，抵抗の較正などを行うことができる。

行列式によりこの連立方程式を解く（次節参照)。
係数行列式を作って，I_1，I_2，I_3 の解は次の行列式により求めることができる。

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_1 & -R_2 \\ R_1 & -(R_1+R_3+R_5) & R_5 \\ R_2 & +R_5 & -(R_2+R_4+R_5) \end{vmatrix}$$

$$= (R_1+R_2)(R_1+R_3+R_5)(R_2+R_4+R_5) + \cdots (\text{略})$$

$$= R_1R_2(R_3+R_4) + R_3R_4(R_1+R_2) + R_5(R_1+R_2)(R_3+R_4)$$

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} V & R_1 & -R_2 \\ 0 & R_1+R_3+R_5 & R_5 \\ 0 & -R_5 & -(R_2+R_4+R_5) \end{vmatrix}$$

$$= -(R_1+R_3+R_5)(R_2+R_4+R_5)\ V + R_5^2 V$$

$$\Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} R_1+R_2 & V & -R_2 \\ R_1 & 0 & R_5 \\ R_2 & 0 & -(R_2+R_4+R_5) \end{vmatrix}$$

$$= R_2R_5V + R_1(R_2+R_4+R_5)\ V$$

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} R_1+R_2 & R_1 & V \\ R_1 & R_1+R_3+R_5 & 0 \\ R_2 & -R_5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -R_1R_5V - R_2(R_1+R_3+R_5)\ V$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-(R_1+R_3+R_5)(R_2+R_4+R_5)+R_5^2}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)+R_5(R_1+R_2)(R_3+R_4)}V$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{R_2R_5+R_1(R_2+R_4+R_5)}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)+R_5(R_1+R_2)(R_3+R_4)}V$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-R_1R_5-R_2(R_1+R_3+R_5)}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)+R_5(R_1+R_2)(R_3+R_4)}V$$

5.9 行列式による連立方程式の解

$$\begin{cases} ax + \ \ by + \ \ cz = A \\ dx + \ \ ey + \ \ fz = B \\ gx + \ \ hy + \ \ iz = C \end{cases}$$

上の連立方程式は行列を用いて次のように表される。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

この連立方程式の解は次のようにして得られる。 まず，左辺の係数行列と同じ要素をもつ行列式 Δ をつくる。

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$$

次にこの係数行列式 Δ において，x の係数の部分（a, d, g）を右辺の定数行列の要素（A, B, C）に置き替えた行列式 Δ_x ，y の係数の部分を右辺の定数行列の要素に置き替えた行列式 Δ_y ，そして z の係数の部分を右辺の定数行列の要素に置き替えた行列式 Δ_z をつくる。

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & i \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & A & c \\ d & B & f \\ g & C & i \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & B \\ g & h & C \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = Aei + bfC + cBh - Afh - bBi - ceC$$

$$\Delta_y = aBi + Afg + cdC - afC - Adi - cBg$$

$$\Delta_z = aeC + bBg + Adh - aBh - bdC - Aeg$$

そうすると，解は次式で与えられる。

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} , \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} , \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

（参考）　高次の行列式はより低次の行列式に展開して計算することができる。

行の要素 $a,\ b,\ c$ について展開

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

あるいは列の要素 $a,\ d,\ g$ について展開

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

同様に，任意の行または列について展開することができる。