

目次

3	オームの法則	19
3.1	自由電子の流れ	19
3.2	オームの法則 (Ohm's law)	21
3.3	電圧・電流・抵抗	24
4	電子回路計算の基礎	26
4.1	分圧	26
4.2	分流	27
4.3	直列合成抵抗値	27
4.4	並列合成抵抗値	28
4.5	実用的な並列合成抵抗値の計算	29
4.6	任意抵抗値の合成	30
4.7	並列接続記号の導入	33

3 オームの法則

3.1 自由電子の流れ

金属中の電流 金属の結晶中では結晶を作る各原子の最外殻の電子（Cu では 1 個）は原子を離れて結晶中をほぼ自由に動くことができる「自由電子」になる。金属の両端に電位差を与えるとこの電子が移動し電荷が流れて、電流となる。電荷を運ぶものをキャリア（carrier）と呼ぶ。金属ではキャリアが存在し、電流が流れることができる。半導体ではキャリアが少ないため金属よりは電気伝導が悪い。絶縁体ではキャリアが全く存在しないので電流が流れない。

そこで、金属内部を自由電子が平均として速さ \bar{v} で流れているとし、電流 I を計算する。これによりオームの法則が導かれる。

電流の定義 電流は電荷の流れであり、電流 1A は 1 秒間に流れる電荷の量（クーロン）である。

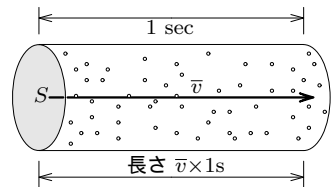


図 17. 電子の流れ

そこで、自由電子の流れに垂直な断面積 S を

え、1 秒間に S を通過する電子の数 N を求める。電子が速さ \bar{v} で 1 秒間に進む距離は \bar{v} であるから、 N は図のような長さ $\bar{v} \times 1\text{sec}$ の円筒内部に含まれる電子の数に等しい。単位体積 1m^3 中に含まれる電子数を n とすれば

$$N = n \times S \times \bar{v} \text{ [個/s]}$$

と表される。 n は一般に 数密度⁹と呼ばれる。 こうして求められた N (1 秒間に S を通過する電子の数) に電子 1 個の電荷 e をかけたものが電流である。

$$I = e \times N = Sne\bar{v} \quad [A] \quad (16)$$

電流を試料のサイズによらない量として扱うために電流密度を定義する。

$$\text{電流密度 } j = \text{単位面積当りの電流} = \frac{\text{電流}}{\text{面積}} \quad (17)$$

$$j = \frac{I}{S} = ne\bar{v} \quad (18)$$

例題 2. 断面が 1 mm^2 の銅線に 1 A の電流が流れている。 電子の流れの平均速度 \bar{v} を求めよ。

解 .

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{I}{Sne} \\ &= \frac{1 [C/sec]}{1 \times 10^{-6} [m^2] \times 8.5 \times 10^{28} [\text{個}/m^3] \times 1.6 \times 10^{-19} [C]} \\ &= 7.3 \times 10^{-5} [m/sec] \approx 0.07 [mm/sec] \end{aligned}$$

例題 3. 毎秒 1 個の電子の流れは、何 A の電流に相当するか？

解 . 電子の電荷は $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ であるから

$$I = \frac{Q [C]}{t [sec]} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ A}$$

⁹数密度 n 単位体積 (1 m^3) に含まれる粒子の数 $= n \text{ 個}/\text{m}^3$ を数密度という。銅 $^{63}\text{Cu}_{29}$ の場合について自由電子の数密度は次のように計算される。

銅 $1 \text{ mol} = 63 \text{ g}$ (= 質量数) 中には、原子の数 6×10^{23} 個 (Avogadro 数) がある。銅原子 1 個に自由電子 1 個があるので、銅の密度 $= 8.9 \text{ g}/\text{cm}^3$, 1 mol の体積 $\div 63/8.9 \div 7 \text{ cm}^3$, $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$ より

$$n = 1 \text{ m}^3 \text{ 中の電子数} \div \frac{10^6}{7} \times 6 \times 10^{23} \div 8.5 \times 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$$

問 4. Bohr の原子モデルによれば，水素原子の構造は原子核の回りを 1 個の電子が回っている。電荷を持つ電子の円運動は円電流に相当すると考えられる。基底状態（最低エネルギーの状態 ... 主量子数 $n = 1$ ）では，この電流は何 A か。

ヒント：

$$\frac{1}{2}mv^2 = k_e \frac{e^2}{r} \quad (\text{運動方程式})$$

$$\text{電子の軌道半径} \quad r = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2 k_e} \cdot n^2$$

$$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{sec}, \quad m = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg},$$

$$k_e = 9 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$$

問 5. 金属中を電気信号が伝わる速さは光の速さに等しい。ところが，金属の自由電子の平均速度 \bar{v} は大変遅く，毎秒 0.07 mm 程度である。これは矛盾しないか？

3.2 オームの法則 (Ohm's law)

抵抗の原因

銅の例では，Cu 原子はそれぞれ電子を 1 個ずつ出して，銅イオン Cu^+ になっている。自由電子はこれらの銅イオンが規則正しく並んだ結晶中を走って行く。銅イオンはその温度にふさわしい熱振動をしているため電子を散乱させ，電子の流れに対する抵抗となる。以下で電子の流れを計算してみよう。

運動方程式 質量 m ，電荷 $-e$ の電子は電場 E により力 $F = -eE$ を受け，加速度 α をもつ。運動方程式は力の向きに座標の $+$ 方向をとって，次のように表される。

$$m\alpha = eE$$

電子は電場と逆向きに加速され、等加速度運動をする。ここでイオンとの衝突の効果を次のようにして取り入れる。「電子は平均として、加速され始めてから τ 時間後に銅イオンに衝突して $v = 0$ となり、再び加速され τ 時間の後衝突する」このように考えることは、大変に荒い近似をしていることになるが、電子の流れに関して重要なポイントを捉えており、よい結果を与える。電子は $v = 0$ から出発して加速され、 τ 時間後（衝突直前）の速度 $v = v_{max}$ は

$$\begin{aligned} v_{max} &= \text{加速度} \times \text{時間} \\ &= \alpha \times \tau = \frac{eE}{m} \times \tau \end{aligned}$$

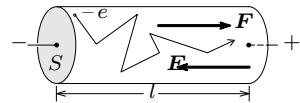


図 18. 電子の散乱

である。この間の平均速度は等加速度運動であるから \bar{v} は $0 \sim v_{max}$ の平均で、

$$\bar{v} = \frac{0 + v_{max}}{2} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \tau$$

と計算される（図 19 参照）。ここで定数部分を

$$\mu \equiv \frac{e\tau}{2m}$$

と定義すると電子流れの平均の速さは

$$\bar{v} = \mu E$$

と表される。 μ は移動度（移易度）mobility と呼ぶ量である。これを用いて電流は式(16)から次のようになる。

$$I = ne\mu SE$$

今、試料の長さを l とし、両端の電極間にかけられた電圧を V とすると、試料金属の内部での電場 E は一定であるから

$$\text{電場 } E = \frac{V}{l} = \frac{\text{電圧}}{\text{長さ}}$$

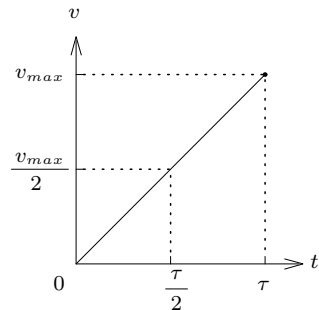


図 19. 平均速度

と表される。この V を用いると電流は

$$I = e\mu n \cdot \frac{S}{l} \cdot V$$

となる。 $e\mu n$ は物質によって決る定数であり、 l/S は試料のサイズで決る定数であるから、 I は V に比例する。この比例定数の逆数を

$$R \equiv \frac{l}{e\mu n S} \quad (19)$$

と置けば R は抵抗である。すなわち、

$$I = \frac{V}{R} \quad (20)$$

が得られ、式(20)をオームの法則 (Ohm's law) という。

元々、オームの法則は経験則として得られたものであるが、いまここでは簡単な物性論によって導出した。抵抗は試料の長さ l に比例し、断面積 S に反比例する。

比抵抗 ρ

式(19)において試料のサイズによらず、物質で決る定数を

$$\rho \equiv \frac{1}{e\mu n} \quad (21)$$

と置いて、比抵抗と呼ぶ。 ρ を用いると

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (22)$$

と表される。式(22)は経験則であって、 ρ はいろいろな物質の電気抵抗を比較する場合に用いられる。電気抵抗 R は試料の長さ l に比例し、断面積 S に反比例し、その比例定数が比抵抗 ρ である。

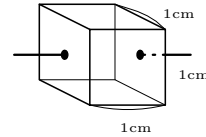
ρ は単位長さ、単位断面積の試料の抵抗である。M.K.S. 単位系では単位長さは 1m、単位面積は 1m^2 であるが、比抵抗は長さ 1cm、断面積 1cm^2 の値

がよく用いられる。比抵抗の逆数である伝導度 σ もよく用いられる。次表にいくつかの物質の比抵抗を掲げる。

物質	比抵抗 ρ
銀	$1.6 \times 10^{-6} \Omega \text{cm}$
銅	1.7×10^{-6}
アルミニウム	2.6×10^{-6}
鉄	2.1×10^{-5}
ニクロム	1.0×10^{-4}
NaCl	10^{17}
ガラス	$10^{12} \sim 10^{15}$

表 4. 比抵抗の値

銀・銅・アルミニウム・金などは $\rho \sim 10^{-6} \Omega \text{cm}$ 程度の値をもち、金属の中でも最も抵抗が小さい。ニクロムはニッケル Ni とクロム Cr の合金で抵抗は大きい。一般に合金の電気抵抗は純金属に比べて 2 桁近く抵抗が大きい。



比抵抗は 1cm^3 のサイコロの抵抗

図 20.

例題 4. 直径 0.5mm、長さ 1m の銅線の電気抵抗はいくらか。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad R &= \rho \frac{l}{S} = 1.7 \times 10^{-6} \Omega \text{cm} \times \frac{1 \times 10^2 \text{cm}}{3.14 \times (0.025^2 \text{cm}^2)} \\ &\doteq 0.087 \Omega \doteq 0.1 \Omega \end{aligned}$$

$$S = \pi r^2 \quad \text{○} \text{—————}$$

3.3 電圧・電流・抵抗

オームの法則 (Ohm's law) は次の 3 通りの形で使われる。

$$V = RI \quad I = \frac{V}{R} \quad R = \frac{V}{I} \quad (23)$$

[単位]: $1 [V] = 1 [\quad] \times 1 [A]$ (Volt, Ohm, Ampere)

抵抗・電圧・電流のよく使う単位と桁を表す記号を表 5 に掲げる。

抵抗 R	M (メガ), k, m, μ
電圧 V	kV, mV, μ V, nV, pV
電流 I	mA, μ A, nA, pA

$10^9 = G$ ギガ	$10^6 = M$ メガ, メグ	$10^3 = k$ キロ
$10^{-3} = m$ ミリ	$10^{-6} = \mu$ マイクロ	$10^{-9} = n$ ナノ
$10^{-12} = p$ ピコ	$10^{-15} = a$ アトー	$10^{-18} = f$ フェムト

表 5. よく使う単位と桁を表す記号

4 電子回路計算の基礎

4.1 分圧

前節で見たように、金属を流れる電流は電圧に比例し、オームの法則が成立つ。しかしオームの法則は全ての導体について必ずしも成立つわけではないことに注意が必要である。半導体素子などでは全くと言ってよいほど、電流と電圧の比例関係は成立たない。ここでは、オームの法則が成立つ抵抗で作られる回路の電圧・電流について考える。図のように抵抗 R_1, R_2 を直列に接続したものに、起電力 V の電池を接続し、回路に流れた電流を I とすると、 R_1, R_2 にはそれぞれ、オームの法則により次式で与えられる電圧 V_1, V_2 が生ずる。

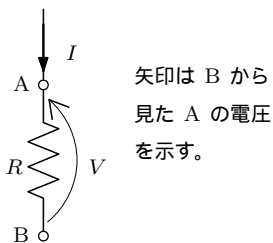


図 21. 抵抗・電圧・電流

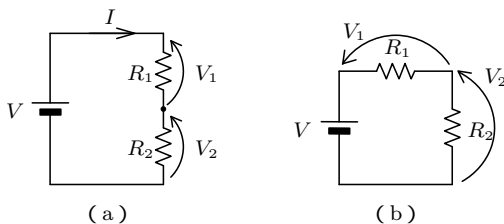


図 22. 分圧 (a)(b) は全く同じ回路

$$V_1 = R_1 I \quad V_2 = R_2 I$$

電流 I は

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad (24)$$

で与えられるから

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \quad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (25)$$

となる。従って、電圧 V は、2つの抵抗によってそれぞれ抵抗値に比例した電圧 V_1 と V_2 に分けられる。これを電圧が「分圧」されると言い、この回路を分圧回路と呼ぶ。

4.2 分流

図 23 のように抵抗 R_1, R_2 を並列に接続したものに、起電力 V の電池を接続する。回路全体に流れた電流を I とすると、 I は 2 つに分れ、 R_1, R_2 それぞれに I_1, I_2 が流れる。一方電圧は R_1, R_2 の両端で等しく V である。そこで、 R_1, R_2 それぞれについてオームの法則を適用すれば

$$V = R_1 I_1 \quad V = R_2 I_2$$

が成立つ。この 2 式より

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

の関係が得られる。つまり、電流は R_1 と R_2 の逆比で分れて流れる。これを電流が「分流」すると言い、この回路を分流回路と呼ぶ。

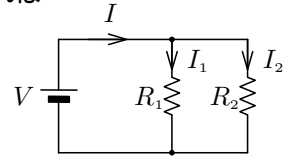


図 23. 分流回路

4.3 直列合成抵抗値

抵抗 R_1, R_2 を図 24 のように続けて接続する方法を直列接続という。直列接続された R_1, R_2 には前出の式(24)で与えられる共通の電流 I が流れる。

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{V}{R} \quad (26)$$

この式は抵抗値が $R = R_1 + R_2$ であるような 1 つの抵抗に流れる電流を表すオームの法則と見ることができる。従って、2 つの抵抗 R_1, R_2 の直列合成抵抗値は

$$R = R_1 + R_2$$

で与えられる。一般に抵抗 R_1, R_2, \dots, R_n を全て直列に接続すると、これらを通る電流は式(24)と同様にして

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

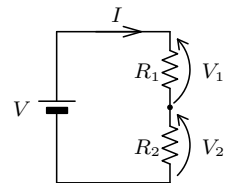


図 24. 直列接続

で与えられる。この式は、分母を1つの抵抗の抵抗値と見れば、オームの法則である。従って、抵抗 R_1, R_2, \dots, R_n を直列に接続した場合の直列合成抵抗値は

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

である。

4.4 並列合成抵抗値

抵抗 R_1, R_2 を図 25 のように両端子を並べて同じところに接続する方法を並列接続という。並列接続された R_1, R_2 の両端の電圧は等しく、同じ値 V であるが、各抵抗を流れる電流は異なる値 I_1, I_2 である。ただし、これらの電流の総和は、電池から流れ出る電流 I に等しくなければならない。

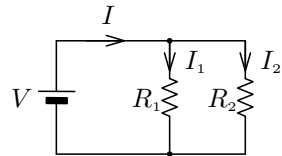


図 25. 並列接続

従って、

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

この式で R_1, R_2 を含む () 内を1つのものとして考え $\frac{1}{R}$ と置けば、

$$I = V \cdot \frac{1}{R}$$

のようにオームの法則の形である。従って、 R_1, R_2 を並列に接続したものは抵抗値が R の抵抗と同じであり、よく知っている次の関係が得られる。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{27}$$

あるいは、この式から次式が得られる。

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{28}$$

抵抗の並列合成値を求める場合、式(27)から出発し、式(28)のように計算するのが普通であるが、常に抵抗値の逆数を用いるために大変不便である。次節で、実用上大変便利で効率の良い計算方法を紹介する。

4.5 実用的な並列合成抵抗値の計算

ちょっとだけ発想の転換をしよう。2つの抵抗 R_1, R_2 の並列合成抵抗値を計算する場合、式(27)は忘れよう。その代わりに式(28)を見直すと次のようになっている。

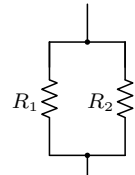


図 26. 並列接続

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \text{ つの抵抗値の積}}{2 \text{ つの抵抗値の和}} \quad (29)$$

そこで、並列合成抵抗値は式(28)のように $\frac{\text{積}}{\text{和}}$ と記憶し直すことにしよう。

例題 5. 2つの抵抗を並列に接続したときの合成抵抗値を求めよ。

1 と 2 3 と 4 1 と 10

解. $\frac{\text{積}}{\text{和}}$ より $\frac{1 \times 2}{1 + 2} = 2/3$, $\frac{3 \times 4}{3 + 4} = 12/7$, $\frac{1 \times 10}{1 + 10} = 10/11$

これを2つ以上の抵抗の並列合成抵抗値に拡張することは簡単である。3つの抵抗の並列合成抵抗値 R は、まず R_1 と R_2 を並列に接続し、次に R_3 を並列に接続すると考えれば、式(28)を用いて

$$R = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times R_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (30)$$

で与えられる。この結果を見ると分子は全抵抗値の積，分母は 2 つの抵抗値の積を，重複せずに全ての組合わせについて加え合わせたものである。抵抗の個数が増えた場合も，全体の次元は [抵抗] にならなければならないことに注意すれば式の形は簡単に推測できる。

一般に n 個の抵抗の並列合成抵抗値は，分子に n 個の抵抗値の積を置き，分母を $(n - 1)$ 個の異なる抵抗の積の全ての組合わせ (n 項) の和としたものになる。

$$R = \frac{R_1 R_2 \cdots R_n}{\sum_{i=1}^n (R_1 R_2 \cdots R_n / R_i)} \quad (31)$$

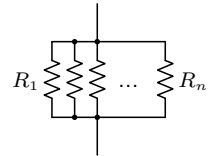


図 27. n 個並列

例題 6. 抵抗 1 , 2 , 3 , 4 を全て並列に接続したときの合成抵抗値を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{解. } R &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{24}{24 + 12 + 8 + 6} = \frac{24}{50} = 0.48 \end{aligned}$$

4.6 任意抵抗値の合成

電子回路を作製するとき，望む抵抗値の抵抗器がないことはよくある。その場合にはいくつかの抵抗器を直列や並列に接続して合成する。まず，目的の抵抗値に近い抵抗器を選び，その抵抗値を第 2 の抵抗器で補正するかたちで，目的の抵抗値を作る。抵抗値を大きくするには第 2 の抵抗器を直列に接続すれば良く，抵抗値を小さくするには並列に接続すればよい。

目的の抵抗値より大きい抵抗値 r と第 2 の抵抗値 x を並列に接続して，望

む値 R を得たとすると

$$R = \frac{rx}{r+x}$$

である。この式から x を求めると、第 2 の抵抗器の抵抗値として

$$x = \frac{rR}{r-R} \quad (32)$$

が得られる。第 2 の抵抗値 x は次式で計算される。

$$x = \frac{rR}{r-R} = \frac{2 \text{ つの抵抗値の積}}{2 \text{ つの抵抗値の差}} \quad (33)$$

つまり、 $x = \frac{\text{積}}{\text{差}}$ と記憶しておくくと便利である。

例題 7. $1.000\text{k}\Omega$ の抵抗器がある。これにもう一つ別の抵抗器を用いて $R = 990\Omega$ を合成して得るにはどのようにすればよいか。

解. $1\text{k}\Omega$ より小さい値を作るには第 2 の抵抗を並列に接続する。

$$x = \frac{1000 \times 990}{1000 - 990} = 9.9 \times 10^4 = 99.0 \text{ k}\Omega$$

$99.0 \text{ k}\Omega$ という抵抗値の抵抗器は普通にはないので、 $100 \text{ k}\Omega$ で代用したとすると

$$R = \frac{1 \text{ k} \times 100 \text{ k}}{1 \text{ k} + 100 \text{ k}} = 990.0099 \dots \Omega \quad (\text{k} = 10^3)$$

ゆえに $1 \text{ k}\Omega$ に $100 \text{ k}\Omega$ を接続すればよい。

例題 8. 抵抗 r に、 r の A ($\gg 1$) 倍の抵抗を並列に接続した合成抵抗は、 r より r の $1/A$ 倍だけ小さくなることを示せ。

解. r と Ar の並列合成抵抗を r_p とすると

$$r_p = \frac{r \cdot Ar}{r + Ar} = \frac{r}{1 + \frac{1}{A}} = r \left(1 + \frac{1}{A}\right)^{-1} \doteq r \left(1 - \frac{1}{A}\right)$$

例題 9. 100Ω とその 10 倍の 1000Ω の合成抵抗を 厳密な式(29)および

例題 8 の近似式で計算し, 比較せよ。

解 .
$$r_p = \frac{100 \cdot 1000}{100 + 1000} = \frac{10^5}{1100} = 90.90 \Omega$$

$$r_p \doteq 100(1 - 0.1) = 90 \Omega$$

となり, の近似の誤差はわずか 1%である。 10Ω と 1000Ω の並列についても計算してみよ。

ある抵抗器の抵抗値 r をわずかだけ小さい値にしたい場合, 次が便利である。

10%小さくしたい	r の	10 倍の抵抗値を並列	(誤差=1%)
5%小さくしたい	r の	20 倍の抵抗値を並列	(誤差=0.025%)
1%小さくしたい	r の	100 倍の抵抗値を並列	(誤差=0.01%)

4.7 並列接続記号の導入

2 つの抵抗 R_1, R_2 を並列に接続した合成抵抗値 R を形式的に

$$R = R_1 // R_2$$

と表すことにしよう。// は次の計算を行う演算記号である。

$$R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (34)$$

“//” 演算の性質

$$R = R_1 // R_2 // R_3 // \cdots // R_n$$

において、 R を求める計算は

- $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ の各要素の順序は自由に入替えてよい。
- 任意の部分を 1 まとめて計算してよい。

すなわち、演算のルールは積 $R_1 \times R_2 \times R_3 \times \cdots \times R_n$ を計算する場合と同じである。これらの性質は n 個の抵抗を並列に接続するとき、あらかじめ部分的に並列接続し、またそれらを任意の順序で並列接続しても合成される最終結果は同じであることに対応している。

この演算記号を用いると、直列接続と並列接続が複雑に入り混じった回路の合成抵抗値を一気に書き下すことができる。

例題 10. 図の回路の AB 間の合成抵抗値 R を記号 // を用いて形式的に表した後、具体的な演算を行え。

解 .

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 // R_3 \\ &= R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \end{aligned}$$

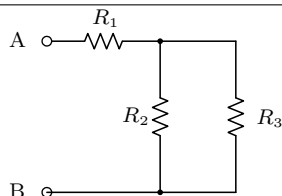


図 28. 抵抗 3 個の回路

例題 11. 図の回路の AB 間の合成抵抗値 R を記号 // を用いて形式的に表した後, 具体的な演算を行え。

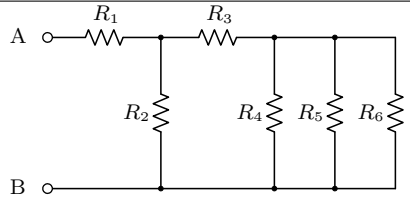


図 29. 抵抗 6 個の回路

解 .

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 + R_2 // (R_3 + R_4 // R_5 // R_6) \\
 &= R_1 + R_2 // \left(R_3 + \frac{R_4 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4} \right) \\
 &= R_1 + \frac{R_2 \left(R_3 + \frac{R_4 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4} \right)}{R_2 + \left(R_3 + \frac{R_4 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4} \right)} \\
 &= R_1 + \frac{R_2 R_3 + R_2 \frac{R_4 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4}}{R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4}} \\
 &= R_1 + \frac{R_2 R_3 (R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4) + R_2 R_4 R_5 R_6}{(R_2 + R_3)(R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4) + R_4 R_5 R_6}
 \end{aligned}$$