

講義 エレクトロニクス H19 年版

目次

1	電気はなぜ流れる	1
1.1	原子の構造	1
1.2	原子の結合	8
1.3	エネルギー・バンド	10
1.4	金属	12
1.5	半導体	12
1.6	不純物半導体	13
1.7	絶縁体	15
2	電場・電位・エネルギー	16

1 電気はなぜ流れる

1.1 原子の構造

水素原子は最も簡単な原子で、中心に原子核があり、その回りの半径 r の円軌道を 1 個の電子が回っている。原子核は陽子（プロトン, proton）1 個でできているので電荷は $+e$ 、電子の電荷は $-e$ で原子核と電子の間には次のクーロン力が働いている。

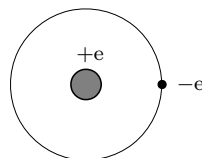


図 1. 水素原子

$$F = -k_e \frac{ee}{r^2} \quad (1)$$

k_e はクーロン力の定数である。運動方程式は 向心力 = クーロン力 より

$$\frac{mv^2}{r} = k_e \frac{e^2}{r^2} \quad (2)$$

となる。これにより原子の構造の概略は理解されたが、古典力学だけでは完全に説明することができなかった。新しい結論に達する過程を見てみよう。

人工衛星の運動

クーロン力を万有引力に替えると同じ形の式で表される。

$$F = -G \frac{mM}{r^2}$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

M : 地球の質量, m : 人工衛星の質量, r : 軌道半径, G : 万有引力定数

Rutherford の原子模型

ラザフォード, E.Rutherford (1871 ~ 1937) は上のモデルのように原子の中心には質量の重い部分 (原子核) があって、回りを電子が円運動していると考えた。これは正しかったが、これだけでは説明できない重大な欠点があった。荷電粒子の加速度運動は電磁波の放出を伴うことが当時既に分っていた。円運

動は加速度運動であるから，電子が円運動をすると電磁波を放出し，エネルギーは減少することになる。従って，軌道はらせんを描いて半径が小さくなり，電子は原子核に落ちて原子が壊れてしまうという矛盾が生じる。

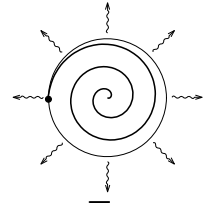
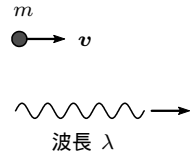


図 2.

De Broglie の物質波

ド・ブロイ，L.V.de Broglie (1892 ~ 1987) は粒子は波の性質をもち，粒子は波と同等である，という大胆な仮定を提案した。それによれば質量 m ，速度 v (運動量 p)，運動エネルギー $E = \frac{1}{2}mv^2$ で



動している粒子は次のような振動数 と波長 をもつ波と同等である。

$$= \frac{E}{h}, \quad = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \quad h : \text{Planck 定数} \quad (3)$$

この波をド・ブロイ波，または物質波と呼ぶ。この考えは後の量子力学につながる。

Bohr の原子模型

ボーア，N.H.D.Bohr (1885 ~ 1962) は原子核の回りを電子が回っていると考えるが，電子が波であるとすれば，定常状態 (時間的に変化しない状態) では，電子軌道の円周上で波が滑らかにつながっていなければならない。そのためには，円周の長さは波長の整数倍でなくてはならないと考えた。つまり

$$2\pi r = n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

でなくてはならない。この条件に式(3)の を用いると次のようになる。

$$2\pi r = \frac{nh}{mv} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

これを Bohr の量子条件 (quantum condition) と言う。この式と式(2)から

$$v = \frac{nh}{2\pi m}, \quad \frac{m}{r} \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r^2 m^2} = k_e \frac{e^2}{r^2}$$

となり、軌道半径が得られる。

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 k_e m e^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

またこの軌道半径に対する水素原子のエネルギー¹ は式(2)を用いて

$E = \text{運動エネルギー} + \text{位置エネルギー}$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k_e e^2}{r} = \frac{1}{2} \frac{k_e e^2}{r} - \frac{k_e e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{k_e e^2}{r}$$

$$E = -\frac{2\pi^2 k_e^2 m e^4}{n^2 h^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

となる。式(5)と式(6)で注目すべきことは、右辺に整数 n を含むため、電子の軌道半径およびエネルギーはとびとびの値しか許されない点である。これを量子化と呼び、整数 n を主量子数と言う。

特に $n = 1$ の軌道半径を r_B で表し Bohr 半径という。基本定数²を用いて数値計算を行うと、Bohr 半径は次のような値になる。

$$r_B = 5.292 \times 10^{-11} \text{m} = 0.53 \text{\AA}$$

これは最も小さい原子の半径である。従って、最も小さい原子の大きさ(直径)は約 1\text{\AA} (オングストロム) $= 1 \times 10^{-8} \text{cm}$ である。水素原子は通常、軌道半径が最も小さいこの Bohr 半径 $r = r_B$ の状態にあり、これを基底状態と呼ぶ。 $n = 2$ 以上の状態を励起状態と言う。原子が光を吸収するなどすると励起されて励起状態に遷移する。

¹水素原子の状態は、水素の原子核の周りを回る電子によって決まる。従って、「水素原子のエネルギー」は水素の原子核の周りを回る電子のエネルギーを意味する。

²基本定数：電荷素量 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ ，電子質量 $m = 9.109 \times 10^{-31} \text{kg}$ ，クーロンの定数 $k_e = 8.988 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ ，Planck 定数 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{Js}$ ，万有引力定数 $G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$

- 問 1. 原子核と電子の間に働く万有引力は、クーロン力に比べ極めて小さいので電子の運動を考えると無視できる。これを確かめるため、水素原子内で電子が Bohr 半径の軌道 ($n = 1$) を回っているとき、電子と原子核 (陽子 1 個) の間に働くクーロン力および万有引力の大きさを計算せよ。
(答 クーロン力 = 8.2×10^{-8} N, 万有引力 = 3.7×10^{-47} N)
- 問 2. 水素原子の電離エネルギーは何 eV か、数値計算せよ (eV は P.13 脚注参照)。(答 基底状態 $n = 1$ の電子を無限の遠方に取り去るのに必要なエネルギーに等しい。13.6eV)

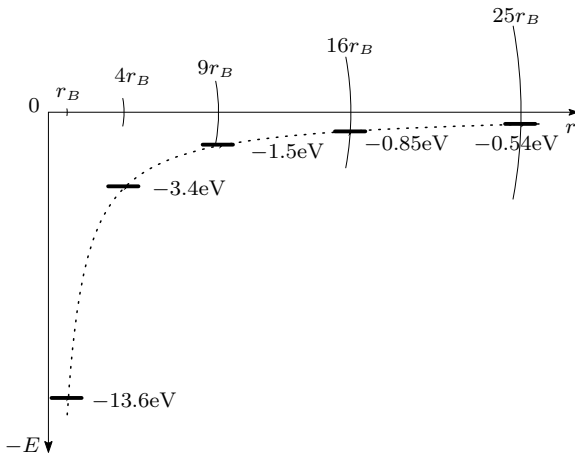


図 3. 軌道半径とエネルギー

Sommerfeld の理論 ゾンマーフェルト

Bohr の理論では電子軌道として円軌道しか考えていないが、Sommerfeld の理論はもっと厳密に水素原子の構造を計算したものである。それによれば同じエネルギーをもつ軌道として楕円軌道も存在する。

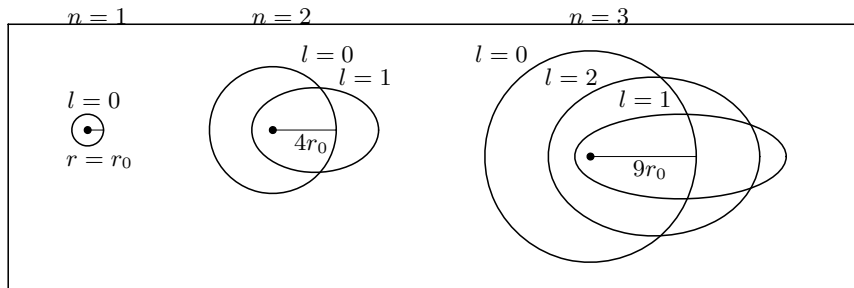


図 4. 楕円軌道

楕円軌道の長軸半径は円軌道の半径に等しい。図は平面的に示しているが、電子軌道は 3 次元であることに注意せよ。量子力学によれば軌道は、4 つの量子数 n , l , m および電子スピン量子数 s で指定され、これらの組み合わせの数だけ異なる軌道が存在する。

原子内電子の状態（量子状態 quantum state）

- 電子はエネルギーが低い軌道から順に 1 個ずつ入る。
- 1 つの軌道には、パウリの禁制則（パウリの排他原理）により 1 個の電子しか入ることができない。
- 内殻の電子は、原子外に放り出される以外は身動きがとれない（別の軌道へ移るには、その状態に席がなくてはならない）。
- 最外殻の軌道にいる電子（価電子）は光や熱エネルギーなどで励起され、より外側の軌道に飛び移ることができる。励起エネルギーが大きければ電子は原子を離れてどこかへ行ってしまう（電離する）こともある。

軌道の性質は量子数により次のように区別される。

- 主量子数 n で軌道の大きさとエネルギーが決る。
- 方位量子数 l で角運動量が決る。同じ n でも角運動量によって異なる軌道が存在する。

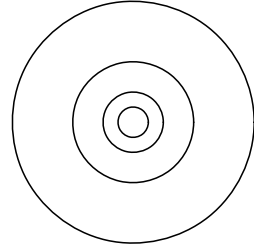
主量子数 n , 方位量子数 l が異なる軌道には次のような名前が付けられている。

n	1	2	3	4	5	6	7	...
軌道名称	K 殻	L 殻	M 殻	N 殻	O 殻	P 殻	Q 殻	...

l	0	1	2	3	...
軌道名称	s	p	d	f	...

表 1. 主量子数と方位量子数

$n = 1, l = 0$ の電子を $1s$ 電子, $n = 3, l = 1$ の電子を $3p$ 電子,...などと呼ぶ。あるいは, n の値を略して s 電子, p 電子, ...などと呼ぶ。



内側から K殻, L殻, M殻, N殻, ...
図 5. 軌道名称

- 磁気量子数 m で軌道面の向きが決る。同じ l でも軌道面の向きが異なる軌道が存在する。
- 電子スピン量子数 s は電子の自転に相当するが, 2 つの状態を取り得る。

量子数の組み合わせにより $2n^2$ 通りの軌道が存在する。電子の「軌道」は古典的なイメージであり, 量子力学 (quantum mechanics) では, 電子の状態は「波動関数」で表され, 1 つの波動関数は量子数 n, l, m, s で決る。軌道は電子の存在確率が高い場所に対応する。

量子数	軌道 (状態) を決める要素	
主量子数	n	軌道の大きさ, 原子核との距離
方位量子数	l	軌道角運動量
磁気量子数	m	電子の軌道運動がつくる磁気モーメント
スピン量子数	s	自転の角運動量

(これらは, 量子力学の波動方程式 - シュレーディンガー方程式 Schrödinger equation を解いて状態 = 波動関数とエネルギーを求める時に現れる)

表 2. 量子数

1 つの n の値に対して, $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ の n 通りの状態が存在する。さらに, 各 l に対して, m の値 $m = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(l-1), \pm l$ があり, $2l+1$ 通りの状態が存在する。さらに, 各 m に対して, $s = \pm\frac{1}{2}$ の 2 通り (電子の場合) の状態が存在する。

例題 1. 主量子数 n の 1 つの値について何通りの状態が存在するか。

答. ある n について, l は n 通りある。各 l に対して m は $2l+1$ 通りある。

$l = 0$ のとき $m = 0$ (1 通り),

$l = 1$ のとき $m = 0, \pm 1$ (3 通り),

$l = 2$ のとき $m = 0, \pm 1, \pm 2$ (5 通り),

……,

$l = l$ のとき $2l+1$ 通り。

$l = 0$ から $l = n-1$ までの, $2l+1$ の和は,

$1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1$ である。

これらの各々について, さらにスピン量子数が $\pm\frac{1}{2}$ の 2 通りあるので 2 倍になる。

$$x = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2 \text{ 通り。}$$

問 3. K 殻, L 殻, M 殻, N 殻, O 殻, … にはそれぞれいくつの状態が所属するか。 (答. 2, 8, 18, 32, 50, ……)

エネルギー 原子が孤立していて, 磁場や電場もかけられていないとき, 各軌道のエネルギーは, 主量子数 n だけで決り, 同じ n に属する l, m, s が異なる状態 (軌道) のエネルギーは全て等しい。

縮退 複数の異なる状態が同じエネルギーをもつとき、状態は「縮退」(degenerate) している、という。水素原子においては、主量子数 n の状態は全てエネルギーが等しく、状態の数は $2n^2$ 個あるので、「 $2n^2$ 重に縮退している」という。

縮退がとける 縮退していた状態が、別々のエネルギー値をもつようになることを、縮退がとける、という。2つの原子が接近すると原子間相互作用が働き、また磁場や電場をかけると電磁場との相互作用が働くので l, m, s が異なる軌道は、それぞれわずかに異なるエネルギーをもつようになり、縮退がとける(図7)。

1.2 原子の結合

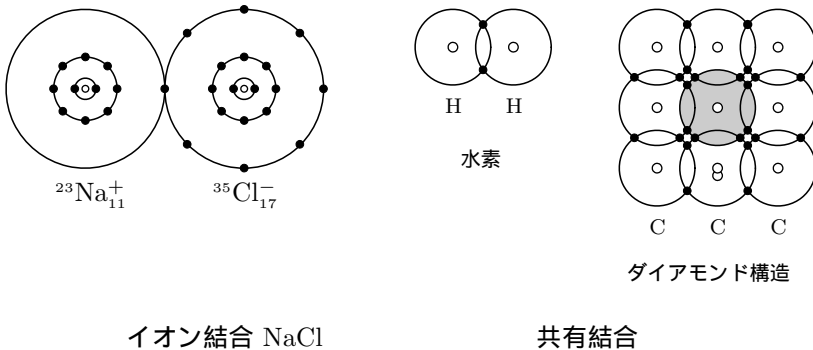


図6. 原子結合の代表例

- ・イオン結合 正負のイオン間に働くクーロン力で結合する。
- ・共有結合 隣合った原子が、互いに電子を共有して安定な閉殻を作って結合する。量子力学により電子の波動関数の重なりとして説明される。

例：水素，ダイヤモンド，シリコン，ゲルマニウム。

- ・分子結合 分子がファン・デル・ワールス力 Van der Waals force によって規則正しく整列してできる結晶を分子結晶という。CH₄、CO₂、C_nH_{2n+2} のような鎖状分子、ベンゼン誘導体、高分子など大部分の有機化合物がこれに相当する。

ファン・デル・ワールス力の起源は、分子が接近しお互いに分子内電荷の分布に影響をおよぼし合って分極を生ずることにある。分極とは、イオン（原子核）の正電荷と電子の負電荷の空間的な分布が平衡状態からずれることを言い、分極により電気双極子ができる。この電気双極子間に働く力がファン・デル・ワールス力であり、次式のように A を定数として距離 r の 6 乗で小さくなる力である。（磁気モーメント = 磁気双極子間に働く力と同じ形である。）

$$F = -\frac{A}{r^6}$$

ファン・デル・ワールス力は距離 r が原子や分子のサイズ程度のときに有効であり、距離が大きくなると急速に小さくなる。日常我々が経験する固体や液体が互いにくっつく現象の原因であり、いわゆる「分子間力」と呼ばれる力である。あらゆる物質間には特に電気や磁気を帯びていなくとも分子間力が働くと考えられる。

- ・金属結合 金属元素が集ると、最外殻電子は、個々の原子から解き放たれて自由電子となる。このとき、各原子は電子を失うので正イオンとなり、正イオン同士にはクーロンの斥力が働く。しかし、イオンの集団は適当な距離を保って規則正しく並び、結晶を作ると全体のエネルギーが下がり安定した状態になる。これは、量子力学によるエネルギーの計算を行って理解される。定性的には、自由電子の海の中に正イオンを置く場合、あちらこちらにばらばらに配置するよりも、正イオンは正イオン同士まとまった方が安定すると考えられる。

1.3 エネルギー・バンド

孤立した単独の原子では、電子の軌道は量子化されエネルギーレベルは離散的 (discrete) である。2 個の原子が結合すると、原子間相互作用により縮退が解けて 1 つのエネルギーレベルが元のレベルを中心にしてわずかにエネルギーが異なる上下 2 つのレベルに分裂する。

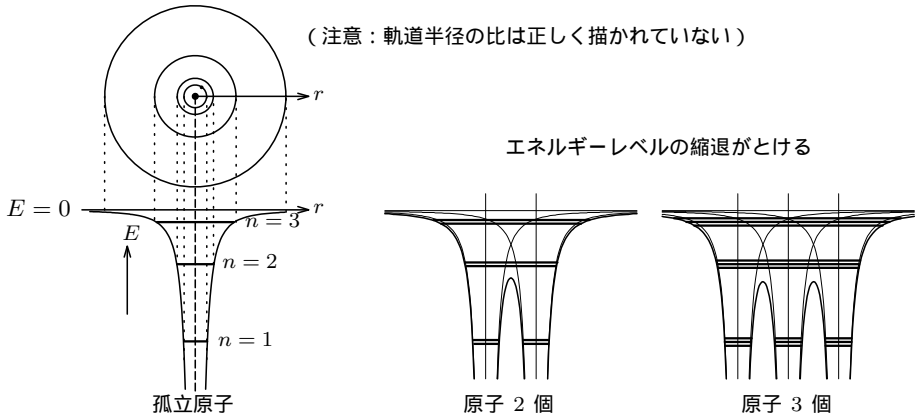


図 7. 結合原子のエネルギーレベル

一般に N 個の原子が結合すると原子間相互作用によりエネルギーレベルの縮退が解け N 個のレベルに分裂する。詳しい計算は量子力学の「摂動論³」と呼ばれる近似法で得られるが、 N 個の原子が結合するとエネルギーレベルは N レベルに分裂する。さらに原子の数が多くなるとポテンシャルは次図のような形になる。

³摂動論 元は天体の軌道が時間と共に少しずつずれて行く場合の計算で行われた近似法であるが、量子力学に取入れられた。「摂動論」は粒子の集団の振舞いを理論的に扱う重要な計算法である。結合した 2 個の原子のエネルギーレベルを求めるには、それぞれの原子が孤立している場合のエネルギーと、そのエネルギーより十分小さい相互作用のエネルギーを「摂動」として取入れ波動関数 (状態を表す) とエネルギーレベルを計算する。近似計算法であり、1 次の摂動、2 次の摂動、...、高次の摂動が計算される。

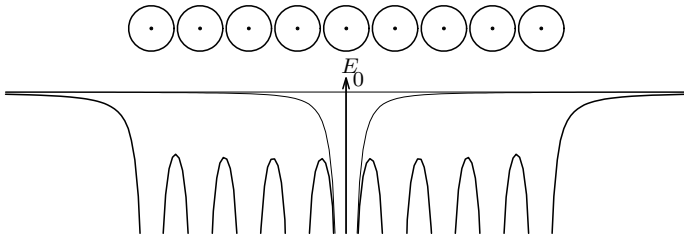


図8. 横一列に並んだ9つの原子によるポテンシャル

実際の物質では極めて多数の原子が集って相互作用の様子も複雑で、エネルギーレベルは細かく分裂する。その結果、孤立原子のエネルギーレベルを中心としてある範囲で、實際上連続と見なし得る極めて多数の密集したエネルギーレベルの幅ができる。これを「エネルギー・バンド」と呼ぶ。バンド理論と呼ばれる分野があり、いろいろな物質について大変複雑な計算と解析が行われエネルギーバンドが調べられている。

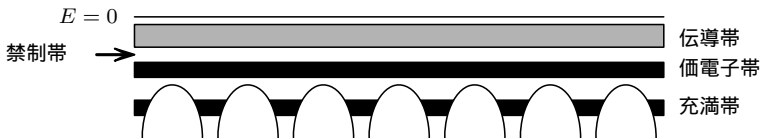


図9. エネルギー・バンド

エネルギー・バンドと物質の性質

エネルギーバンドのでき方はおよそ図のように分類することができる。バンド構造の違いにより、物質は金属、半導体、絶縁体に別れる。

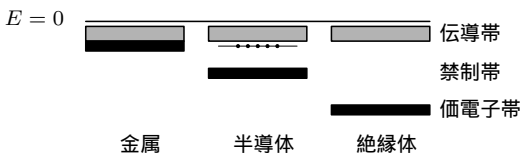


図10. 物質とバンド構造

物質	E_g
Diamond	7.0eV
Si	1.1eV
Ge	0.7eV

表3. 禁制帯のエネルギー幅

1.4 金属

金属元素は重い元素が多く、孤立原子の最外殻電子は軌道半径が大きく束縛が弱い。従って、価電子（最外殻電子）のエネルギーレベルは $E = 0$ （原子から離れた自由な状態）に近い。軌道半径が大きいところではエネルギーレベルは密集している。

このような原子が多数集ってできる金属の結晶構造は fcc（面心立方）、hcp（六方稠密構造）などが多く、原子間距離が近い。この結果、原子の最外殻にあった価電子は、元々の原子の束縛から解放され、結晶全体をほぼ自由に動くことができる。これらの電子がとるエネルギーの値の幅が「伝導帯」と呼ばれる領域である。この電子を自由電子と呼ぶ。金属では伝導帯と価電子帯は重なっていて切れ目なくつながり、間に禁制帯がない。

1.5 半導体

純度の高いシリコン Si やゲルマニウム Ge の結晶は真性半導体と呼ばれ、価電子帯と伝導帯の間に禁制帯ができる。エネルギー 1eV を熱エネルギー kT に換算すると $T \sim 11000\text{K}$ に相当⁴し、禁制帯の幅は通常の熱エネルギーで飛越

⁴熱エネルギーと温度 1eV は電子を 1V の電圧で加速して得られるエネルギーであり、物理量 $eV = 1.602 \times 10^{-19}$ [J] をそのまま [eV] という単位として、エネルギーを表すのに用いる。電子は等加速度運動をして運動エネルギー

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = eV$$

を得る。このエネルギーに等しい電子の熱エネルギーは kT である。

$$1eV = kT$$

電荷素量を $e = 1.602 \times 10^{-19}$ [C]、ボルツマン定数を $k = 1.38 \times 10^{-23}$ [J/K] として

$$T = \frac{1eV}{k} = \frac{1.602 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23}} = 11608\text{K}$$

もう少し厳密にするなら、電子は x, y, z 3 の自由度をもち、1 自由度当り $\frac{1}{2}kT$ の熱エネルギーをもつから上式の右辺は $\frac{3}{2}kT$ であり、 $T = 7739\text{K}$ となる。およその値として、

$$1eV \sim 1 \text{ 万度}$$

と覚えておくとよい。

えられるものではなく、真性半導体は絶縁物に等しい。

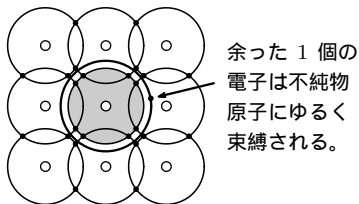
1.6 不純物半導体

真性半導体に微量の不純物を添加したものを不純物半導体という。通常「半導体」と呼んでいるのはこの不純物半導体である。半導体素子を作るには不純物半導体が利用され、不純物のコントロールは素子の性能・特性を決める最も重要な要素である。不純物半導体は N 型半導体と P 型半導体に分けられる。

N 型半導体

純度の高いシリコン Si やゲルマニウム Ge に微量の、燐 P、砒素 As、アンチモン A などの 5 価の元素を入れると N 型半導体になる。N 型の N は Negative carrier つまり、電子が電流を担うタイプの半導体であることを意味する。Si や Ge は 4 価の元素であり、その結晶は共有結合によりダイヤモンド構造をとる。

結晶の中に 5 価の不純物があると、最外殻の電子 5 個のうち、4 個の電子は周囲の Si や Ge との共有結合にあずかるが、余った電子 1 個はその不純物原子にゆるく束縛された状態となる。このエネルギーレベルは伝導帯よりわずかだけ下の位置で禁制帯の中にできる。これを不純物レベルと呼ぶが、この電子は熱的に励起されてたやすく伝導帯に上がることができ、これが電気伝導を担うことになる。真性半導体では禁制帯で、電子が存在できなかったところに、



5 価の不純物原子と余った電子

図 11. N 型半導体

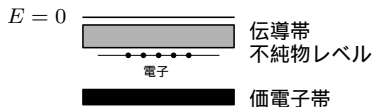


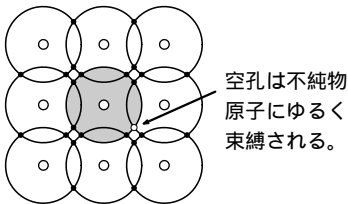
図 12. N 型半導体の不純物レベル

不純物元素 1 個当り 1 個の電子が存在できるようになる。不純物レベルは伝導帯よりわずかだけエネルギーの低い位置にあるので、熱的な励起により容易に伝導帯に上がることができる。熱だけでなく光によっても励起される（フォトトランジスタ）。従って、不純物の量を適当に制御することで常温（ $T = 300 \text{ K}$ ）で電子が十分な数だけ伝導帯に上がるようにすることができる。

半導体素子の特性は温度変化が大きく、この影響をなるべく受けたくないような回路設計が重要なこととなる。温度が上がれば電荷を運ぶキャリアが増加し、温度が下がればキャリアが減少することが半導体の特徴である。このため半導体の電気抵抗は金属とは逆に温度と共に減少する。この変化はほぼ指数関数 $\exp(-\Delta E_g/kT)$ に比例し、 T による電気抵抗の変化は激しい。 ΔE_g は不純物レベルと伝導帯の底のエネルギー・ギャップである。⁵

P 型半導体

真性半導体に微量の、硼素 B、アルミニウム Al、ガリウム Ga などの 3 価の元素を入れると P 型半導体になる。P 型の P は Positive carrier つまり、正電荷をもつ粒子、すなわち「空孔」が電流を担うタイプの半導体であることを意味する。空孔は電子の空席である。



3 価の不純物原子と空孔
図 13. P 型半導体

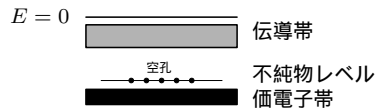


図 14. P 型半導体の不純物レベル

⁵一般に熱エネルギーによって、エネルギー・ギャップ（エネルギー差） ΔE_g を飛び越える確率は $\exp(-\Delta E_g/kT)$ に比例する。

Si や Ge は 4 価の元素であり，その結晶は共有結合によりダイヤモンド構造をとる。結晶の中に 3 価の不純物があると，周囲の Si や Ge と共有結合をする電子は 3 個しかなく，電子 1 個が不足する。この電子の空席はその不純物原子の周辺にゆるく束縛された状態となる。つまり，その空席には近くの電子がたやすく飛込むことができる。隣の原子の電子がこの空席に飛込むと，空席は隣の原子に移動する。空席が移動し，伝わって行くと，結果として正電荷が移動することになる。

この空席を「空孔」(hole) と呼んで，正電荷をもつ粒子のように扱うことができる。空孔のエネルギーレベルは，P 型半導体の不純物レベルと呼ばれる。このエネルギーレベルは価電子帯の上端よりわずかだけ上の禁制帯の中にできる。価電子帯の空孔がこの不純物レベルに上がることは，励起されてキャリアが 1 個できることに相当する。空孔の移動は熱的にたやすく励起され，これが電気伝導を担うことになる。不純物元素 1 個当り 1 個の空孔が存在できるようになる。

1.7 絶縁体

最外殻の価電子も各原子に強く結びついて束縛されているため，通常の状態では伝導帯には電子がない。伝導帯と価電子帯の間には数 eV 以上の禁制帯があり，価電子帯の電子は伝導帯にジャンプすることができない。従って，結晶内には電荷を運ぶべき「キャリア carrier」が存在せず，物質は絶縁体となる。

2 電場・電位・エネルギー

電場 E

原点 $r = 0$ に電荷 $+Q$ が置かれているとする。原点から r のところに別の電荷 $-q$ を置くと、この $-q$ にはクーロン力

$$F = -k_e \frac{qQ}{r^2} \quad (7)$$

が働く。負号 $-$ は引力であることを表す。

場の考え方はこの式を

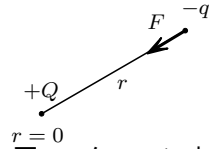


図 15. クーロン力

$$F = -q \cdot k_e \frac{Q}{r^2} \quad (8)$$

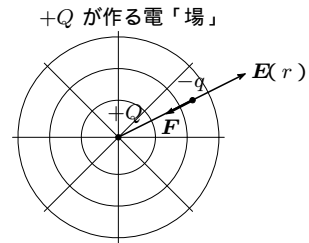
のように考えて、 $-q$ より後ろの部分

$$E \equiv k_e \frac{Q}{r^2} \quad (9)$$

とおく。すると

$$F = -qE \quad (10)$$

と表される。この E を電場または電界と言う。「場」の考え方は、電荷 $+Q$ がその周囲に電場 E を作っていて、そこに置かれた別の電荷 $-q$ には、この電場が作用して力が働くと考えられる。



仕事は道筋によらない

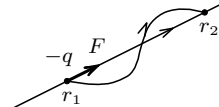


図 16. 電場と仕事

位置エネルギー 電荷 $-q$ を電場 $E(r_1)$ の場所から $E(r_2)$ の場所まで、電場の力に逆らって移動させるのに必要な仕事は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{r_1}^{r_2} qE(r)dr = qk_eQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \\ &= -qk_eQ \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -qk_eQ \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

仕事 ΔW は r_1 と r_2 の値のみによって決り、 r_1 から r_2 へ至る道筋にはよらない。従って、電場の力は重力と同じように保存力であり、電場は保存力場である。この式の最後で、第 1 項は位置 r_2 における位置エネルギー、第 2 項は位置 r_1 における位置エネルギーであるから、仕事は位置エネルギーの差に等しい。式(11)の定積分を不定積分に置換えれば位置エネルギー（ポテンシャル・エネルギー）の式が得られる。

$$W = q \int E(r)dr = -q \frac{k_e Q}{r} \quad (12)$$

不定積分の積分定数 C の値は位置エネルギーの基準点⁶を定めることにより決められる。通常は無有限遠点 ($r \rightarrow \infty$) で $W = 0$ と定めるので $C = 0$ である。

一般に保存力場では、力はポテンシャル・エネルギーの負の勾配（注目する座標で微分する）として次式によって導かれる。

$$F = -\frac{dW}{dr} \quad (13)$$

（3次元では $F = -\nabla W = -\text{grad } W$ ）⁷

今の場合、式(12)を r で微分すれば r 方向の力が得られる。

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dW}{dr} \\ &= -\frac{d}{dr} \left(-q \frac{k_e Q}{r} \right) = q k_e Q \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = -k_e \frac{qQ}{r^2} \end{aligned} \quad (14)$$

これは式(7)の力である。

⁶位置エネルギーの基準点は、実用的に地球表面にとる場合も多い（アース電位 $V = 0$ とする）。

⁷ $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ ∇ は *nabla* (ナブラ) と読む。

∇W は $\text{grad } W$ とも書かれる。

電位 V , 電位差 V , 電圧 V

式 (12) を

$$W = -q \cdot \frac{k_e Q}{r} \equiv -qV \quad V \equiv \frac{k_e Q}{r} \quad (15)$$

と表し, V を電位と呼ぶ。

電位 = +1 クーロンの電荷がもつ位置エネルギー

= +1 クーロンの電荷を位置エネルギーの基準点 $r = \infty$ から r まで運ぶのに必要な仕事である。電位の差を 電位差 または 電圧 と言う⁸。

単位

- 電位 $V = [N][m] / [C] = [V]$ 電場 $E = [N] / [C] = [V/m]$
- 電位差が 1V の 2 点間で $q = 1C$ の電荷を電場に逆らって移動させるのに必要な仕事は
 $W = qV = 1C \times 1V = 1J$ である。
- 電場が $E = 1V/m$ (一定) の場で, $1C$ の電荷を $1m$ 移動させるのに必要な仕事は
 $W = qE \times r = 1C \times 1V/m \times 1m = 1J$ である。
($E =$ 一定でなければ座標 r で積分しなければならない。)
- 電荷・電圧 = エネルギー の関係があり, $Coul \cdot Volt = Joule$ である

「電場」は場所によって異なる量であり、「電位」は電場を積分した量であることに注意する必要がある。電場は電位の微分係数 $\times(-1)$ である。

⁸電位 ϕ , 電位差 V のように異なる文字を用いる方が厳密である。