

電磁気学：理学科物理コース

Y. Kondo

2013 年 7 月 6 日

電磁気学 I では真空中の静電場と静磁場について学び、電磁気学 II では時間変動する電磁場や物質中の電磁場について学ぶ。関連して、電気回路やエレクトロニクスの初歩にも言及している。

電磁気学 I、II をより良く理解するために、解法 I、II を同時に履修することが必要である。電磁気学の問題を解くことを通じて、物理で必要な数学を身に付けることもできる。また、「エレクトロニクス」の講義も併せて受講することが望ましい。

この講義ノートは岩波書店の物理入門コース 3,4「電磁気学 I,II」[1] をベースにしている。参考書を購入する場合は、これらの本を推薦する。ただし、単位系が異なっているので注意を要する [3]。

この講義では単なる知識ではなく、様々な局面に応用できる計算能力 [4] を養うことが大きな目標である。従って、自ら手を動かして計算する必要があり、受け身に講義を聴くだけでは意味がない。TV を見るように講義を「見る」つमりの学生には意味がないので履修登録を行わないことを勧める。

以下この講義に関して注意を挙げる。

- 遅刻、早退は欠席 1/2 回分として扱う。
- 講義を実施する上で必要な教員の指示に従わない場合は退室を命ずる場合がある。その場合は欠席扱いとする。
- 定期試験の成績のみで評価を行う。
- 教科書は近藤のホームページにアップしてあるので、必要に応じて印刷すること。

目次

第 1 章	物理数学	5
1.1	微分積分	5
1.2	ベクトルの基礎	16
1.3	複素数	23
1.4	ベクトルに対する微積分	28
1.5	直交座標系とその応用	35
1.6	近似計算	45
第 2 章	電磁気学 I	49
2.1	電荷に働く力	49
2.2	電場の性質	51
2.3	静電場の微分法則	74
2.4	導体	81
2.5	定常電流の性質	98
2.6	電流と静磁場	103
2.7	ベクトル・ポテンシャル	120
第 3 章	電磁気学 II	127
3.1	電磁誘導	127
3.2	回路	145
3.3	マクスウェルの方程式と電磁波	157

3.4	物質中の電界と磁場	177
3.5	変動する電磁場と物質	199
参考文献		215

第 1 章

物理数学

1.1 微分積分

1.1.1 極限

数列など、ある種の数学的対象をひとまとまりに並べて考えたものについての極限がしばしば考察される。数の列がある値に限りなく近づくとき、その値のことを数列の極限あるいは極限值といい、この数列は収束するという。

限りなく近づくという曖昧な表現を避けて、 $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて収束を定義する。

数列 a_n がある一定の値 α に収束するとは

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ s. t. } [n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]$$

とできることである。ただし、 $\mathbf{N}$ は自然数の集合である^{*1}。

数学の記号を使わずに表現すると「どんなに小さな正の数 ε であっても、その ε に対して番号 n_0 を十分大きく定めれば、 n_0 より大きい

^{*1} s. t. は such that を省略したものであり、A s. t. B とは、B を満たす A という意味である。

番号 n に対する a_n は α から ε ほど離れない範囲に全部入るようにすることができる」となる。数学的な表現の簡潔さに注意。

物理学では数列ではなく関数を考える場合が多い。その場合に使えるように極限の概念を拡張しよう。

$f(x)$ を実関数、 x_0 を実数とした場合、

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0$$

であるとは、

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon \exists \delta \in \mathbf{R} \\ & \text{s. t. } [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon] \end{aligned}$$

とできることである。ただし、 $\mathbf{R}$ は実数の集合である。

物理学ではほとんどの場合、いろいろな物理量を表す関数は収束する。別の言い方をすれば、そのような場合しか大学の初年度では考えない。

1.1.2 微分

微分は拡張された傾きの概念と考えることができる。すなわち、

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である。以下は高校で学習しているはずであるが良く復習しておくこと。

- 物理でよく使われる関数の微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= nx^{n-1} \\ \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x \\ \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = 1/x$$

● 重要な公式

—

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x))$$

$$= \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$$

—

$$\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)}$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) - f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{(g(x))^2}$$

— $y = f(x)$, $x = g(t) \Rightarrow y = f(g(t))$ である時、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

1.1.3 積分

定積分を以下のように定義する。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a < x_i < b} f(x_i) \Delta x$$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ である。}$$

一方、不定積分は

$$F_a(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx$$

と定義される。

$$\begin{aligned}
 F_a(\xi + \Delta\xi) &= F_a(\xi) + f(\xi)\Delta\xi \\
 \Downarrow \\
 \frac{F_a(\xi + \Delta\xi) - F_a(\xi)}{\Delta\xi} &= f(\xi) \\
 \Downarrow \Delta\xi \rightarrow 0 \\
 \frac{d}{d\xi}F_a(\xi) &= f(\xi)
 \end{aligned}$$

すなわち、 $\frac{d}{dx}F_a(x) = f(x)$ であり、積分が微分の逆演算であることが分かる。

注意： $\frac{d}{dx}(F_a(x) + c) = f(x)$ 、ただし c は任意定数。

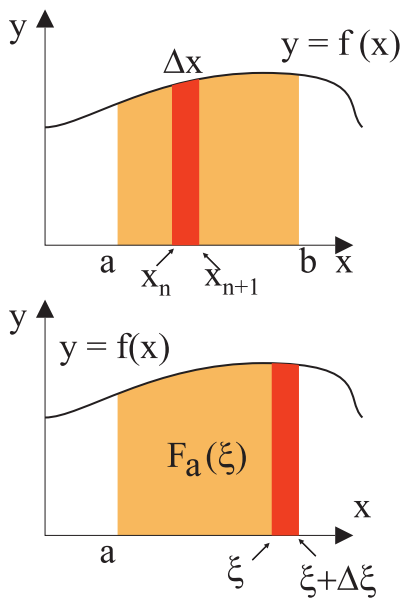


図 1.1

1.1.4 偏微分（偏導関数）：多変数の関数への微分の拡張

簡単のために 2 変数の関数 $u = f(x, y)$ を考え、 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\end{aligned}$$

$(x, y) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y)$ の時の u の変化を考える。

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) \\ &\quad + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) \\ &\approx \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\end{aligned}$$

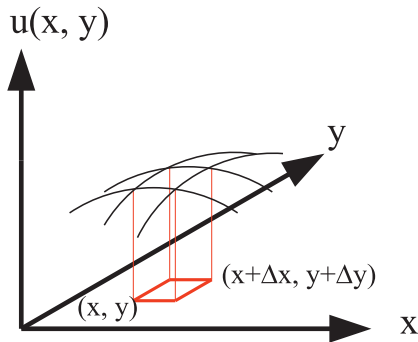


図 1.2

ここで $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ の極限を考え、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

とする。変数が 3 以上の場合も同様に定義する。

1.1.5 多重積分

空間に分布している電荷 $\rho(\vec{r})$ の総和を計算する場合がある。そのような場合に対応するために、一つ以上の変数であるスカラー関数 f （値がスカラー量の関数）を積分する場合について考えよう。ここでは、3 次元空間を

考え、変数を $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の組とする。

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r} \in V} f(\vec{r}) dv &= \int_V f(\vec{r}) dx dy dz \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum f(\vec{r}) \Delta V \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum f(\vec{r}) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

実際に計算する場合は、考えている問題の対称性（ある種の規則性）を考慮してできるだけ計算を簡単する。詳しくは座標軸に関するセクション 1.5 で議論する。

- 点対称の場合

関数 $f(\vec{r}) = f(r)$ のように原点からの距離 r のみに依存する場合に、全空間の積分は

$$\int f(\vec{r}) dv = \int_0^\infty f(r) 4\pi r^2 dr$$

となる。 $4\pi r^2 dr$ は半径 r で厚さが dr の球殻の体積である。

- 軸対称の場合

関数 $f(\vec{r}) = f(r, z)$ のように z 軸からの距離 r と z 座標のみに依存す

る場合に、平面 $z = z_0$ での全積分は

$$\int_{z=z_0} f(\vec{r}) dS = \int_0^\infty f(r, z_0) 2\pi r dr$$

となる。 $2\pi r dr$ は半径 r で幅が dr のリングの面積である。

は電磁気で良く出てくる。

問題 1.1.1

以下の計算を行え。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 + x^3 &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} x/x &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3}{x} &= \end{aligned}$$

===== 解答 =====

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 + x^3 &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x/x &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3}{x} &= 1 \end{aligned}$$

問題 1.1.2

微分の定義に従って関数 $x^2, x^n, \sin x, a^x$ の微分を行え。定義に従って計算を行うとは、以下のような計算を行なうことである。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= 1\end{aligned}$$

===== 解答 =====

•

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^2 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^2 - x^2}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\Delta x + \Delta^2 - x^2}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + \Delta^2}{\Delta} \\ &= 2x\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}x^n \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x^n + n\Delta x^{n-1} + c\Delta^2 x^{n-2} + \dots + \Delta^n) - x^n}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \Delta(cx^{n-2} + \dots + \Delta^{n-1})) \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

ここで c はある定数。

•

$$\frac{d}{dx} \sin x$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta) - \sin x}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{1}{2}\Delta) \sin \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}\Delta) \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta}{\frac{1}{2}\Delta} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

ここで $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x) = \cos x$ は明らかであろう。

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$ は以下のようにして証明する。 $|\delta| \ll 1$ の場合図を描けば明らかなように $|\sin \delta| < |\delta| < |\tan \delta|$ である。従って

$$\cos \delta < |\sin \delta / \delta| < 1$$

を示すことができる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} 1 &= 1 \\
\lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta &= 1
\end{aligned}$$

であるから、二つの間にある $|\sin \delta / \delta|$ も 1 に収束する。

•

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} a^x &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta} - a^x}{\Delta} \\
&= a^x \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{a^\Delta - 1}{\Delta} \\
&= a^x \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{\ln a \Delta} - 1}{\Delta} \\
&= a^x \ln a \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{\ln a \Delta} - 1}{\ln a \Delta} \\
&= a^x \ln a
\end{aligned}$$

特に $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (a^\Delta - 1) / (\Delta) = 1$ となる a を自然対数の底 e と呼ぶ。
 $e = 2.71828 \dots$ である。

問題 1.1.3

$\ln x$ の微分を求めよ。

===== 解答 =====

$y = e^x$ と $y = \ln x$ はお互いに逆関数の関係にある。よって、 $x = \ln y$ ($y = e^x$) を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

ここで $x \rightarrow y, y \rightarrow x$ と置き換えることによって

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

が得られる。

問題 1.1.4

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ である。 $1/r, r, r^2$ を x, y, z で偏微分せよ。

===== 解答 =====

一般の r^n について計算する。ただし、 $n \neq 0$ を先に考察する。

$$\begin{aligned} \partial_x r^n &= \partial_r r^n \partial_x r \\ &= nr^{n-1} \partial_x (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= nr^{n-1} \partial_{x^2+y^2+z^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \partial_x (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= nr^{n-1} \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} 2x \\ &= nr^{n-2} x \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \partial_y r^n &= nr^{n-2} y \\ \partial_z r^n &= nr^{n-2} z \end{aligned}$$

である。 $n = 0$ の場合は被微分関数は定数なのでその偏微分はゼロである。

問題 1.1.5

1. 半径 1 の円の面積を計算せよ
2. 半径 1 の球の体積を求めよ。

ヒント：

それぞれ、

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2<1} dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \\ \int_{x^2+y^2+z^2<1} dx dy dz &= \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\end{aligned}$$

を計算すれば良い。

===== 解答 =====

解答は省略。

ただし、以下のように対称性を考慮すれば計算が簡単になる典型的な例である。円の場合は、

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2<1} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r dr \\ &= \int_0^1 2\pi r dr \\ &= \pi\end{aligned}$$

となり、球の場合は

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2+z^2<1} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= \int_0^1 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

となる。

1.2 ベクトルの基礎

1.2.1 3次元ベクトル

3次元空間中の位置、力、速度、加速度などを表すために必要な3次元ベクトルについて復習しよう。

図1.3のような直交した3つの軸に平行な3つの単位ベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ によって、任意の3次元ベクトルが

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (1.1)$$

と表されることは良く理解していることであろう*2。

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ をそれぞれ右手の人差指、中指、親指に対応させるとき右手系の座標系を選んだと言う。 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を数の組で

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

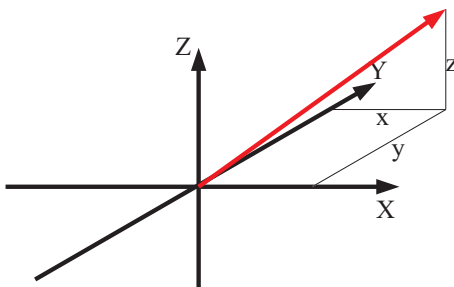


図1.3 3次元ベクトル

*2 ここでは、数学的な整合性はあまり考えずに、3つの数の組みで表現されるものをベクトルとする。本当はベクトルの持つべき性質を考えて、これらの数の組がその条件を満たすと捉えるべきである

と表すならば、ベクトル $\vec{a}$ は

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = {}^T(a_x, a_y, a_z)$$

と表すことができ、ベクトルの成分表示と言う。ベクトルをこのように表現すると線形代数を用いて様々なベクトルの計算を行うことができて便利である。なお、 ${}^T(a_x, a_y, a_z)$ の T は行列の転置（行と列を入れ替えること）することを意味する。明らかな場合は転置の記号を省略することもあるので注意すること。

ベクトル $\vec{a}$ が位置ベクトルならば a_x, a_y, a_z は長さの次元を持つ量であるし、力を表すベクトルならば各成分は力の次元を持つ量である。ベクトルの大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.2)$$

によって表される。

物理ではある物理量に対してよく使われる記号がある。例えば、位置ベクトルに対しては $\vec{r}$ 、力に対しては $\vec{F}$ 、速度に対しては $\vec{v}$ などである。また、ベクトル量とスカラー量を明確に区別するためにベクトルには必ず矢印 $\vec{}$ を用いる。

1.2.2 基本演算

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があり、その成分表示が

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

としよう。

ベクトルの和

ベクトルの和は

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

である。

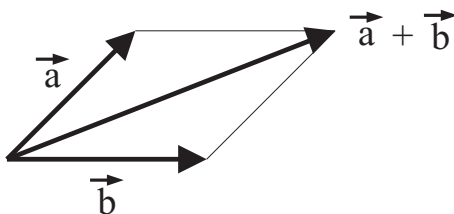


図 1.4 ベクトルの和。

ベクトルのスカラー倍

スカラー量 c によるベクトルのスカラー倍は

$$c \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c a_x \\ c a_y \\ c a_z \end{pmatrix}$$

である。

ベクトルのスカラー積

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のスカラー積（内積）は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

である。ここで θ は二つのベクトルの間の角度である。

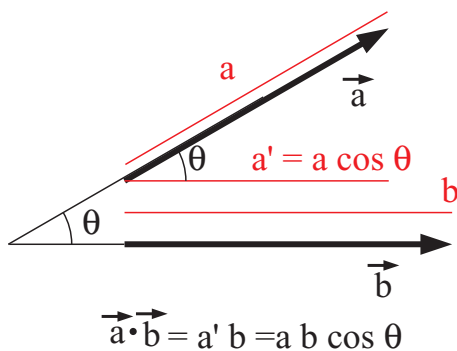


図 1.5 ベクトルのスカラー積（内積）。

特に、

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

であることに注意。また、以下の性質がある。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \left(\frac{d}{dt}\vec{a}\right) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \left(\frac{d}{dt}\vec{b}\right) \end{aligned}$$

座標軸に平行な単位ベクトルについては

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

ベクトルのベクトル積

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のベクトル積（外積）は

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

である。ここで $|A|$ は行列 A の行列式である。ベクトル積の大きさは二つのベクトルによって作られる平行四辺形の面積になり、その方向は二つのベクトルと直交している。向きは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で右手の人差し指、中指、親指に対応するように取る。

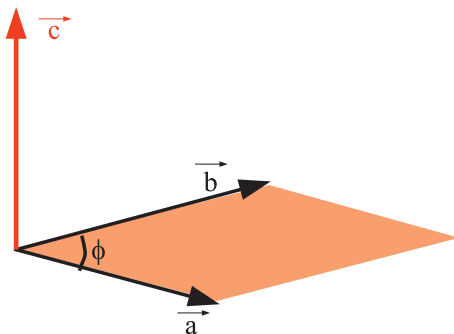


図 1.6 ベクトルのベクトル積（外積）。

特に、

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

であることに注意。また、以下の性質がある。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \left(\frac{d}{dt} \vec{a} \right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left(\frac{d}{dt} \vec{b} \right) \end{aligned}$$

座標軸に平行な単位ベクトルについては

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}\end{aligned}$$

が成り立つ。

1.2.3 直線と平面を表すベクトル式

直線の式

ある点 $\vec{r}_0$ を通り、ベクトル $\vec{v}$ に平行な直線上の点 $\vec{r}(s)$ は

$$\vec{r}(s) - \vec{r}_0 = \vec{v}s$$

と表すことが出来る。ここで s はあるパラメータである。物理の場合、 s として時間 t を取ることが多い。線上（曲線、直線を問わず）の点を指定するためには、パラメータを一つ指定すれば良いことに注意。

平面の式

ある点 $\vec{r}_0$ を通り、ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面上の点 $\vec{r}$ は

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

と表すことが出来る。この式はベクトル $\vec{r} - \vec{r}_0$ がベクトル $\vec{n}$ に直交していることを表しているに過ぎない。

問題 1.2.1

内積とベクトル積の性質を自ら計算して確認せよ。

===== 解答 =====

省略。

問題 1.2.2

ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が与えられている。

1. 次の計算を $i = 1 \sim 3$ について行え。

$$\vec{e}_i' = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \vec{e}_i$$

2. $\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j'$ (ただし、 $i, j = 1, 2, 3$) を 9 通りすべて計算し、できるだけ簡単な形にせよ。

3. $\vec{e}_i' \times \vec{e}_j'$ (ただし、 $i, j = 1, 2, 3$) を 9 通りすべて計算し、できるだけ簡単な形にせよ。

===== 解答 =====

省略。

問題 1.2.3

真空中の位置 $\vec{r}_i$ に電荷 Q_i がある。ただし、 $i = 1, 2$ を取る。電荷 Q_i に働いている静電気力 $\vec{F}_i$ をベクトルを用いて表せ。

===== 解答 =====

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3},$$

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

問題 1.2.4

位置 $\vec{r}_0$ に電荷 Q_0 がある。位置 $\vec{r}$ における電界 $\vec{E}(\vec{r})$ をベクトルによって表せ。

===== 解答 =====

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

問題 1.2.5

位置 $\vec{r}_i$ に電荷 Q_i がある。位置 $\vec{r}$ における電界 $\vec{E}(\vec{r})$ をベクトルによって表せ。

===== 解答 =====

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

このように電界に関して線形の性質（足し算ができる）があることに注意。電荷の分布 $\rho(\vec{r})$ の場合には上の和は積分に置き換えて

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

とすれば良い。

1.3 複素数

ここでは複素数の復習を行う。留数定理などは扱わない。

1.3.1 複素数

複素数は 2 乗すると -1 になる虚数単位 i を導入して、

- $z = x + iy$ と定義される数のことである。ただし、 x, y は実数である。
- i を通常の数のように扱い実数で成り立っている演算規則に従うと考えて、複素数の和、差、積、除を定義する。ただし、 i^2 が出てくれば、適宜 -1 に置き換える。

- 複素数の大きさは $\sqrt{x^2 + y^2}$ で定義され、 $\tan \theta = y/x$ は偏角と呼ばれる。
- z の複素共役は z^* と書かれ $z^* = x - iy$ である。

1.3.2 複素数の基本的な性質

以下のような性質がある。

- z が実数ならば、 $z^* = z$
- z が純虚数ならば、 $z^* = -z$
- $(z^*)^* = z$
- $|z| = |z^*|$
- $z + z^* = 2\Re(z)$
- $z - z^* = 2i\Im(z)$
- $zz^* = |z|^2$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

ただし、 $\Re, \Im$ はそれぞれ複素数の実数部分、虚数部分を取り出すことを意味する記号である。

1.3.3 複素平面

一つの複素数 $z = x + iy$ は 1 組の実数の組 (順序対) (x, y) によって特徴付けることが可能である。この (x, y) を 2 次元平面上の点に対応させることによって、複素数を平面上の点と一対一に対応付けることが可能である。このように複素数に対応させた平面のことを複素平面と呼ぶ。

複素平面は抽象的に定義された複素数を直感的に理解する手助けになるものであり、有用である。

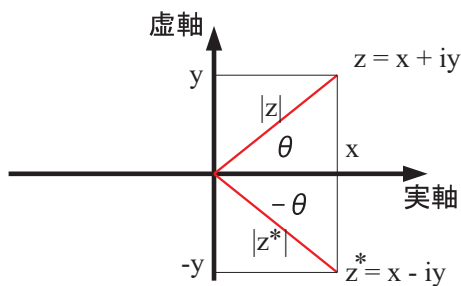


図 1.7 複素平面。

1.3.4 オイラーの公式

複素数を引数とする指数関数の微分は虚数を実数の定数と同様に扱って計算すれば良い。例えば、

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = i e^{i\theta}$$

である。従って、

$$\frac{d^n}{d\theta^n} e^{i\theta} = i^n e^{i\theta}$$

である。この関係式を用いれば、複素数を引数とする指数関数と三角関数の間の以下の関係式を証明できる。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

問題 1.3.1

複素数の基本的な性質を確認せよ。

===== 解答 =====

裏面も使うこと。

問題 1.3.2

オイラーの公式を証明せよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[d^k e^{i\theta} / d\theta^k]_{\theta=0}}{k!} \theta^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \theta^k \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 + \dots \\
 &\quad + i \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 + \dots \right) \\
 &= \cos \theta + i \sin \theta
 \end{aligned}$$

問題 1.3.3

オイラーの公式を用いて、以下の計算を行なえ。

ヒント : $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$

1. $\cos(\theta_1 + \theta_2)$
2. $\cos(\theta_1 - \theta_2)$
3. $\sin(\theta_1 + \theta_2)$
4. $\sin(\theta_1 - \theta_2)$

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
 &\cos(\theta_1 \pm \theta_2) + i \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \\
 &= e^{i(\theta_1 \pm \theta_2)} \\
 &= e^{i\theta_1} e^{\pm i\theta_2} \\
 &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 \pm i \sin \theta_2) \\
 &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\
 &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2)
 \end{aligned}$$

問題 1.3.4

1. 以下の微分方程式 (
- y_0, k
- は定数)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = y_0 e^{ikx}$$

で $y = y_1 e^{ikx}$ が解になるように、定数 y_1 を定めよ。

2. 以下の微分方程式 (
- y_0, ω
- は定数)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + y = y_0 e^{i\omega t}$$

で $y = y_1 e^{i\omega t}$ が解となるように定数 y_1 を定めよ。

===== 解答 =====

- 1.

$$\begin{aligned} y_1 (ik)^2 + y_1 (ik) + y_1 &= y_0 \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{y_0}{-k^2 + ik + 1} \end{aligned}$$

- 2.
- y
- を
- x
- で偏微分してもゼロなので、

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{i\omega t} \\ \Rightarrow y_1 &= y_0 \end{aligned}$$

問題 1.3.5

以下の計算を行なえ。

1. $i^i =$

2. $\sqrt{i} =$

===== 解答 =====

1.

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$$

2.

$$\sqrt{i} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

1.4 ベクトルに対する微積分

ベクトルに対する微積分について復習する。

1.4.1 ベクトルの微分

あるパラメータ s の関数としてベクトル $\vec{a}(s)$ が与えられているとき、そのパラメータに対する微分は

$$\frac{d\vec{a}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(s + \Delta s) - \vec{a}(s)}{\Delta s}$$

とする。物理ではパラメータとして時間 t を取ることが多い。

以下の性質がある。 ϕ はスカラー関数である。

•

$$\frac{d}{ds}(\phi \vec{a}) = \left(\frac{d}{ds}\phi\right) \vec{a} + \phi \left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right)$$

•

$$\frac{d}{ds}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \left(\frac{d}{ds}\vec{b}\right)$$

•

$$\frac{d}{ds}(\vec{a} \times \vec{b}) = \left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left(\frac{d}{ds}\vec{b}\right)$$

1.4.2 ベクトル場とベクトル演算子

空間の各点 $\vec{r}$ にベクトル関数 $\vec{v}(\vec{r})$ を指定するとき、ベクトル場 $\vec{v}(\vec{r})$ が与えられたと言う。ベクトル場の例としては、流れ場や電場、磁場がある。ベクトル場に関連する微分演算子としては、

- 勾配

$$\text{grad } \phi = \partial_x \phi \vec{i} + \partial_y \phi \vec{j} + \partial_z \phi \vec{k}$$

- 発散

$$\text{div } \vec{a} = \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z$$

- 回転

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} \\ &= (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \vec{i} \\ &+ (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \vec{j} \\ &+ (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \vec{k} \end{aligned}$$

がある。これらはベクトル演算子（ナブラ）

$$\vec{\nabla} = \partial_x \vec{i} + \partial_y \vec{j} + \partial_z \vec{k}$$

を導入することによって、

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \vec{\nabla} \phi \\ \text{div } \vec{a} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \\ \text{rot } \vec{a} &= \vec{\nabla} \times \vec{a} \end{aligned}$$

と簡便に表すことができる。ここではナブラのベクトル的な性質を強調するために、 $\vec{\nabla}$ と表記している。多くの場合 ∇ と表記されているので、注意のこと*3。

*3 $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ のことである。 ∂_y, ∂_z も同様である。

1.4.3 ガウスの定理

ガウスの定理とは、

$$\int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dv$$

である。ここで S は空間中にとった閉曲面で、 V はその閉曲面で囲まれた体積である。ただし、式を簡単にするために、 S の微小要素の大きさにその微小要素の法線ベクトルを掛けたもの $\vec{n}dS$ を $d\vec{S}$ と表していることに注意すること。

今、微小体積 $dx dy dz$ を考察する。具体的なイメージを掴むために、 $\vec{w} = \rho \vec{v}$ と考えて流体の流れを考えよう。ここで、 ρ と $\vec{v}$ は流体の密度とその速度である。

この微小体積に x 方向に沿って流出する流体の量を考える。図の灰色の面からこの微小体積に流入する流体の量は

$$\rho(x, y, z) v_x(x, y, z) dy dz \delta t = w_x(x, y, z) dy dz \delta t$$

である。一方、図の黒色の面から流れ出す流体の量は

$$w_x(x + dx, y, z) dy dz \delta t$$

である。よって正味の流出量は

$$(w_x(x + dx, y, z) - w_x(x, y, z)) dy dz \delta t = \frac{\partial w_x}{\partial x} dx dy dz \delta t$$

となる。同様に y 方向と z 方向にも考察を行い、それらを合計すると、この微小体積から δt の間に流出する流体の量は

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) dx dy dz \delta t = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dx dy dz \delta t$$

となる。

次に、空間に閉曲面 S とこの閉曲面に囲まれている空間の領域 V を考察する。 V を微小体積の集まりと考えて、 $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dx dy dz$ を考えよう。ある一つの微小体積のある面から流出する流体の量はその同じ面を共通に持つ隣の微小体積に流入する流体の量と同じである。結局、 V 内のすべての微小体

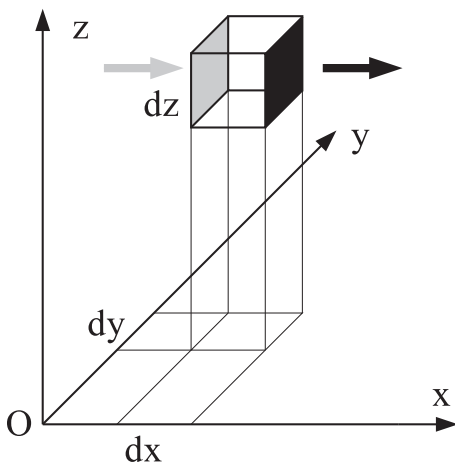


図 1.8 ガウスの定理

積の表面を通して流入出する流体の総和は、隣に微小体積を持たない微小体積に流入出する流体の量、すなわち閉曲面 S を通して流入出する流体の総和 $\int_S \vec{w} \cdot d\vec{S}$ になる。

1.4.4 ストークスの定理

あるベクトル $\vec{v}$ が与えられているとき、 $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ を考える。これを $\text{rot } \vec{v}$ と表記することもある。

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

の式が成り立つ。ここで、 C は空間中の閉曲線で、 S は閉曲線 C を縁とする曲面である。閉曲線のある点 $\vec{r}$ における接線ベクトル $\vec{t}(\vec{r})$ を導入して、 $\vec{t}(\vec{r})ds = d\vec{s}$ と書いている。上の式を「ストークスの定理」と言う。

この定理は次のようにして証明される。図 1.9 のように微小な長方形 PQRS を考える。この長方形は流体の流れにさらされている。その流速を $\vec{v}$

とする。この長方形に沿って $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ を計算すると、

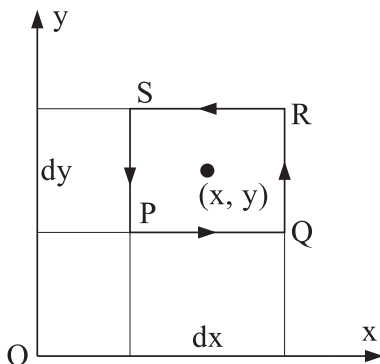


図 1.9 ストークスの定理 (a)

$$\begin{aligned}
 & \oint_{PQRS} \vec{v} \cdot d\vec{s} \\
 = & \underbrace{v_x(x, y - \frac{dy}{2})dx + v_y(x + \frac{dx}{2}, y)dy}_{-\frac{\partial v_x}{\partial y} dy dx} - \underbrace{v_x(x, y + \frac{dy}{2})dx + v_y(x - \frac{dx}{2}, y)dy}_{+\frac{\partial v_y}{\partial x} dx dy} \\
 = & (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) dy dx \\
 = & (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z dS
 \end{aligned}$$

となる。

次に閉曲線 C とそれを縁とするような曲面 S を考える。図 1.10 参照。この曲面を微小面積に分割して

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

を求めよう。これは、上の議論を用いて微小面積のすべての縁について $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ を計算しその総和を求めることによっても得られる。しかしながら、隣り合う微小面積の間でキャンセルする部分があるので、結局閉曲線 C に沿って $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ を計算したもの、すなわち、 $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$ と等しい。

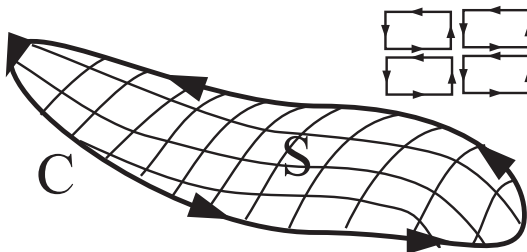


図 1.10 ストークスの定理 (b)

問題 1.4.1

ベクトルの微分の基本的な性質を証明せよ。

===== 解答 =====

問題 1.4.2

関数 $r, 1/r$ の勾配を求めよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} r &= \frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{\nabla} r^{-1} &= -r^{-2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}$$

問題 1.4.3

ベクトル演算の公式を証明せよ。 $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ などと省略することがあるの
で注意のこと。

1. $\vec{\nabla} \cdot \{\vec{a} \times \vec{b}\} = \vec{b} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} - \vec{a} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{b}\}$
2. $\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} = 0$
3. $\vec{\nabla} \times \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} = -\vec{\nabla}^2 \vec{a} + \vec{\nabla} \{\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\}$

===== 解答 =====

1.

$$\begin{aligned}& \vec{\nabla} \cdot \{\vec{a} \times \vec{b}\} \\&= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{a} \times \vec{b})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{a} \times \vec{b})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{a} \times \vec{b})_z \\&= \partial_x (a_y b_z - a_z b_y) + \partial_y (a_z b_x - a_x b_z) \\&\quad + \partial_z (a_x b_y - a_y b_x) \\&= b_x (\partial_y a_z - \partial_z a_y) + b_y (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \\&\quad + b_z (\partial_x a_y - \partial_y a_x) - a_x (\partial_y b_z - \partial_z b_y) \\&\quad - a_y (\partial_z b_x - \partial_x b_z) - a_z (\partial_x b_y - \partial_y b_x) \\&= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})\end{aligned}$$

2.

$$\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_x \{ \partial_y a_z - \partial_z a_y \} + \partial_y \{ \partial_z a_x - \partial_x a_z \} \\
&\quad + \partial_z \{ \partial_x a_y - \partial_y a_x \} \\
&= \partial_x \partial_y (a_z - a_z) + \partial_y \partial_z (a_x - a_x) \\
&\quad + \partial_z \partial_x (a_y - a_y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla} \times \{ \vec{\nabla} \times \vec{a} \} \\
&= \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \partial_y a_z - \partial_z a_y \\ \partial_z a_x - \partial_x a_z \\ \partial_x a_y - \partial_y a_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_y \{ \partial_x a_y - \partial_y a_x \} - \partial_z \{ \partial_z a_x - \partial_x a_z \} \\ \partial_z \{ \partial_y a_z - \partial_z a_y \} - \partial_x \{ \partial_x a_y - \partial_y a_x \} \\ \partial_x \{ \partial_z a_x - \partial_x a_z \} - \partial_y \{ \partial_y a_z - \partial_z a_y \} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\nabla^2 a_x + \partial_y \partial_x a_y + \partial_z \partial_x a_z + \partial_x \partial_x a_x \\ -\nabla^2 a_y + \partial_z \partial_y a_z + \partial_x \partial_y a_x + \partial_y \partial_y a_y \\ -\nabla^2 a_z + \partial_z \partial_y a_z + \partial_x \partial_y a_x + \partial_z \partial_z a_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\nabla^2 a_x + \partial_x (\partial_y a_y + \partial_z a_z + \partial_x a_x) \\ -\nabla^2 a_y + \partial_y (\partial_z a_z + \partial_x a_x + \partial_y a_y) \\ -\nabla^2 a_z + \partial_z (\partial_z a_z + \partial_x a_x + \partial_y a_y) \end{pmatrix} \\
&= -\nabla^2 \vec{a} + \nabla \{ \nabla \cdot \vec{a} \}
\end{aligned}$$

1.5 直交座標系とその応用

座標系についての理解を深める。

1.5.1 デカルト座標系

直交した 3 つのベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ によって、任意の 3 次元空間の位置ベクトル $\vec{r}$ が

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

と表される。ここで、 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ をそれぞれ右手の人差指、中指、親指に対応させるとき右手系の座標系を選んだと言う。 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を成分で表示する方法は既に述べた。

“直交した”ベクトルのとり方には他の選択もある。ここでは、極座標と円柱座標について考えよう。

1.5.2 極座標系

点対称な問題、例えば

原点に点電荷 q があり、その周囲の電界の様子を求める。

ような場合、次のような極座標系をとれば便利である。

空間上のある点 $\vec{r}$ を考える。これらの変数が他の変数 (r, θ, ϕ) によって、以下のように表されるとする。

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

この (r, θ, ϕ) を極座標と言う。直感的には、 r, θ, ϕ はそれぞれ、原点からの距離、緯度、経度を表す変数である。

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ と同様なベクトルを定義しておくと、便利である。極座標の場合は、以下のように各点毎に異なった直交した 3 つのベクトルを定義しなければなら

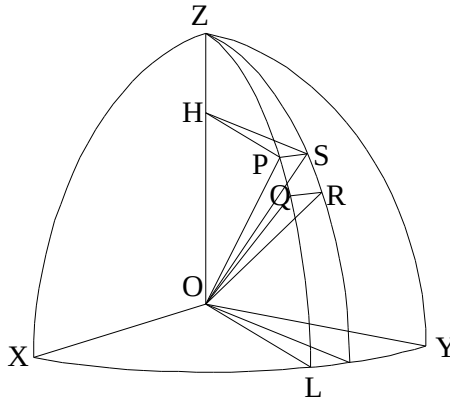


図 1.11 極座標

らない。

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{i} \sin \theta \cos \phi + \vec{j} \sin \theta \sin \phi + \vec{k} \cos \theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{i} \cos \theta \cos \phi + \vec{j} \cos \theta \sin \phi - \vec{k} \sin \theta \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i} \sin \phi + \vec{j} \cos \phi\end{aligned}$$

各点毎に 3 つの直交したベクトルを考えなければならないので、極座標は一見とっつきにくいかも知れない。しかしながら、極座標を用いることによって、問題が非常に簡単になる場合がある。

球の体積

半径 1 の球の体積 V は

$$V = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} dx dy dz \quad (1.5)$$

であるが、積分範囲を指定するために変数が相互に関連している。これでは、積分を行うことは困難である。そこで、この積分を極座標を用いて行う

ことを考えよう。

$$V = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \quad (1.6)$$

となり、積分を各変数ごとに独立に行うことができるようになり、計算は簡単になる。ただし、

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta \quad (1.7)$$

はヤコビアンである。ヤコビアンは一般に次のように表される。

$$\prod_i^n dx_i = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \prod_j^n dy_j$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

また、熱力学の講義ノートも参照のこと。

ラプラス方程式

ラプラス方程式とは、

$$\vec{\nabla}^2 \psi = 0 \quad (1.9)$$

あるいは、

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \psi = 0 \quad (1.10)$$

と表される方程式である。Maxwell の方程式の 1 番目の式（電荷の保存則）がこの形になっているので、電磁気学では非常に重要な方程式である。

$\vec{\nabla}$ は、

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\psi + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta}\psi + \vec{e}_\phi \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\psi \quad (1.11)$$

となる。これは、点 (r, θ, ϕ) から、微小変化 dr を行ったときの点の移動距離は dr 、微小変化 $d\theta$ を行ったときの点の移動距離は $r d\theta$ 、微小変化 $d\phi$ を行ったときの点の移動距離は $r \sin\theta d\phi$ であることから、推測できるだろう。証明は文献 [4] を参照のこと。

また、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2\psi \\ = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\sin\theta \partial_r (r^2 \partial_r \psi) + \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta \psi) + \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi^2 \psi \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

である。 ψ が r だけの関数である場合は、ラプラス方程式は

$$\partial_r (r^2 \partial_r \psi) = 0 \quad (1.13)$$

と非常に簡単になる。

1.5.3 円柱座標系

線対称な問題、例えば

原点を通る z 軸上に電荷密度 ρ で一様に分布した電荷があり、その周囲の電界の様子を求める。

ような場合、次のような円柱座標系をとれば便利である。

空間上のある点 P を考える。これらの変数が他の変数 (r, ϕ, z) によって、以下のように表されるとする。

$$x = r \cos \phi \quad (1.14)$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

この (r, ϕ, z) を円柱座標と言う。直感的には、円柱の表面の位置をどのように指定すれば良いかを考える。

$\vec{e}_i$ と同様なベクトルを定義しておく、便利である。円柱座標の場合は、以下のように各点毎に異なった直交した 2 つのベクトルを新たに定義しなければならない。

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \phi + \vec{j} \sin \phi \quad (1.15)$$

$$\vec{e}_\phi = -\vec{i} \sin \phi + \vec{j} \cos \phi$$

$$\vec{e}_z = \vec{k}$$

円柱の体積

半径 1、高さ 1 の球の体積 V は

$$V = \int_0^1 dz \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \quad (1.16)$$

であるが、積分範囲を指定するために変数が相互に関連している。これでは、積分を行うことは困難である。そこで、この積分を円柱座標を用いて行うことを考えよう。

$$V = \int_0^1 dz \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} \quad (1.17)$$

となり、積分を各変数ごとに独立に行うことができるようになり、計算は簡単になる。ただし、

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} = r \quad (1.18)$$

はヤコビアンである。

ラプラス方程式

円柱座標でのラプラス方程式を考えよう。

$\vec{\nabla}$ は、

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\psi + \vec{e}_\phi \frac{\partial}{r\partial\phi}\psi + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\psi \quad (1.19)$$

証明は文献 [4] を参照のこと。

また、

$$\vec{\nabla}^2\psi = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\psi) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2\psi + \partial_z^2\psi \quad (1.20)$$

である。 ψ が r だけの関数である場合は、ラプラス方程式は

$$\partial_r(r\partial_r\psi) = 0 \quad (1.21)$$

と非常に簡単になる。

問題 1.5.1

極座標における単位ベクトルについて、以下の計算を行え。ただし、 i, j は r, θ, ϕ である。

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

===== 解答 =====

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$

ただし, δ_{ij} は $i = j$ の場合 $\delta_{ij} = 1$ で, $i \neq j$ の場合 $\delta_{ij} = 0$ となる関数である. また, $(i, j, k) = (r, \theta, \phi), (\theta, \phi, r), (\phi, r, \theta)$ の場合 $\varepsilon_{ijk} = 1$ で, $(i, j, k) = (\theta, r, \phi), (r, \phi, \theta), (\phi, \theta, r)$ の場合 $\varepsilon_{ijk} = -1$ で, その他の場合は $\varepsilon_{ijk} = 0$ である.

問題 1.5.2

円柱座標における単位ベクトルについて、以下の計算を行え。ただし、 i, j は r, ϕ, z である。

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

===== 解答 =====

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$

ただし, δ_{ij} は $i = j$ の場合 $\delta_{ij} = 1$ で, $i \neq j$ の場合 $\delta_{ij} = 0$ となる関数である. また, $(i, j, k) = (r, \phi, z), (\phi, z, r), (z, r, \phi)$ の場合 $\varepsilon_{ijk} = 1$ で, $(i, j, k) = (r, \phi, z), (\phi, z, r), (z, r, \phi)$ の場合 $\varepsilon_{ijk} = -1$ で, その他の場合は $\varepsilon_{ijk} = 0$ である.

問題 1.5.3

空間に以下のような式で表される電荷が分布している。全電荷を $\int \rho(\vec{r})dV$ を計算することによって求めよ。電荷の分布は原点に関して点対称であることに注意。

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0(r_0/r)^4$$

ただし、 $r < r_0$ のときは電荷密度はゼロである。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned} \int \rho(\vec{r})dV &= \int \rho_0(r_0/r)^4 dV \\ &= \rho_0 \int_{r_0}^{\infty} 4\pi r^2 (r_0/r)^4 dr \\ &= 4\pi r_0^4 \rho_0 \int_{r_0}^{\infty} (1/r)^2 dr \\ &= 4\pi r_0^3 \rho_0 \end{aligned}$$

問題 1.5.4

極座標と円柱座標の場合に $\vec{\nabla}^2 \psi$ を計算せよ。ただし、極座標の場合は ψ が θ, ϕ に依存せず、円柱座標の場合には ψ が ϕ, z に依存しない場合を考えよ。

ヒント

極座標の場合、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} & \qquad \qquad \qquad (1.22) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \partial_r (r^2 v_r) + r \partial_\theta (\sin \theta v_\theta) + r \partial_\phi v_\phi \right) \end{aligned}$$

である。また、円柱座標の場合、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \partial_r (rv_r) + \frac{1}{r} \partial_\phi v_\phi + \partial_z v_z \quad (1.23)$$

である。

===== 解答 =====

1.

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi)$$

を計算する。ここで、 ψ は動径方向のみの依存性を持つので、 $\vec{\nabla} \psi$ は動径方向の成分しかもたない。すなわち、 $\vec{\nabla} \psi = (\partial_r \psi) \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\phi$ と表すことができる。従って、ヒントの式を使って、

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \partial_r (r^2 \partial_r \psi) + r \partial_\theta (\sin \theta \cdot 0) + r \partial_\phi (0) \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \partial_r (r^2 \partial_r \psi) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\partial_r (r^2 \partial_r \psi) \right) \end{aligned}$$

$r^2 \neq 0$ であるから、ラプラス方程式は $\partial_r (r^2 \partial_r \psi) = 0$ と表される。

2. 同様に、与えられた条件から $\vec{\nabla} \psi = (\partial_r \psi) \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\phi + 0 \vec{e}_k$ となるはずである。従って、ヒントの式を使って、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \psi &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \\ &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \psi) + \frac{1}{r} \partial_\phi 0 + \partial_z 0 \\ &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \psi) \end{aligned}$$

$r \neq 0$ であるから、ラプラス方程式は $\partial_r (r \partial_r \psi) = 0$ と表される。

1.6 近似計算

1.6.1 基本的な近似式

ある関数 $f(x)$ の $x = 0$ の近傍でのテイラー展開は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[d^k f(x)/dx^k]_{x=0}}{k!} x^k$$

である。ここで、 x^i の項まで考慮し、 x^{i+1} よりも冪の大きい項を無視する場合、 x の i 次の項まで考えると言う。

問題 1.6.1

以下の近似計算を $x = 0$ の近傍で x の 1 次まで求めよ。

1.

$$(1+x)^{-1}$$

2.

$$(1-x)^{-1}$$

3.

$$(a-x)^{-1}$$

4.

$$(1+x)^n$$

===== 解答 =====

1.

$$(1+x)^{-1} \approx 1-x$$

2.

$$(1-x)^{-1} \approx 1+x$$

3.

$$(a-x)^{-1} \approx \frac{1}{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

4.

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

1.6.2 r に関わる近似式

原点のごく近傍 $\vec{r}'$ に存在する電荷から位置 $\vec{r}$ に存在する電荷への力を考える場合がある。その場合、この二つの電荷間の距離が必要であるが、以下のように近似すると便利な場合がある。

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\ &= \sqrt{|\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + |\vec{r}'|^2} \\ &\approx \sqrt{|\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \\ &\approx |\vec{r}| \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2}\right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

一般に、

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^n &\approx |\vec{r}|^n \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2}\right)^{n/2} \\ &\approx |\vec{r}|^n \left(1 - n\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2}\right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

と近似できる。この近似式はよく使われる。

問題 1.6.2

以下の近似計算を行え。ただし、 $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ とする。

$$|\vec{r} + \vec{r}'|^n - |\vec{r} - \vec{r}'|^n$$

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
& |\vec{r} + \vec{r}'|^n - |\vec{r} - \vec{r}'|^n \\
& \approx |\vec{r}|^n \left(1 + n \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2} \right) - |\vec{r}|^n \left(1 - n \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2} \right) \\
& \approx 2n |\vec{r}|^{n-2} (\vec{r} \cdot \vec{r}')
\end{aligned}$$

1.6.3 三角関数に関わる近似式

θ が小さい場合、

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta \quad (1.26)$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad (1.27)$$

と近似できる。ただし、 θ は弧度法で測った角度である。

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$ は以下のようにして証明する。 $|\delta| \ll 1$ の場合図を描けば明らかなように $|\sin \delta| < |\delta| < |\tan \delta|$ である。従って

$$\cos \delta < |\sin \delta / \delta| < 1$$

である。

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} 1 &= 1 \\
\lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta &= 1
\end{aligned}$$

であるから、二つの間にある $|\sin \delta / \delta|$ も 1 に収束する。

問題 1.6.3

以下の近似式を証明せよ。ただし、 θ に関しては 1 次まで取る。

1. $\cos \theta \approx 1$
2. $\tan \theta \approx \theta$

===== 解答 =====

1. 次の問題を見よ。
2. $\sin \theta \approx \theta$ を $\cos \theta$ で割ることによって証明する。

問題 1.6.4

$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ の近似式を $\theta \ll 1$ の場合に、 θ の 2 次の項まで求めよ。

===== 解答 =====

テーラー展開を使って証明すれば良い。

第 2 章

電磁気学 I

ここでは時間的に変動しない静的な電場と磁場を扱う。今後は既に復習した物理数学を活用して講義を進めるので、物理数学の復習を行っておくこと。

後期の電磁気学 II では時間的に変動する電磁場と物質中の電磁場を取り扱う。

2.1 電荷に働く力

電荷を担うものは、電子（負電荷）や陽子（正電荷）と呼ばれる素粒子である。素粒子には、中性子という電荷を持たない粒子もある。素粒子には様々な種類のものがあるが、寿命が長くて物質を構成していると言える「素粒子」は上記の 3 種類である。

電子と陽子は符号が逆で大きさが全く等しい電荷を帯びている。その大きさ e を電気素量といい、

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \quad (2.1)$$

である。アインシュタインによって、質量が変化することが分かった。しかしながら、電荷の総量が保存されない例は存在しない。従って、電荷は素粒

子の持つ最も基本的な性質の一つと考えることができる。

電気現象と磁気現象は最初全く別の現象と考えられていたが、両者が結びついた現象が知られるようになり、現在では電磁気現象として理解されるようになっている。エレクトロニクスの講義ノートを参照のこと。

本講義では SI 単位系を用いる。参考書の単位系（MKSA 単位系）とは異なっている部分もあるので注意すること。

2.1.1 クーロンの法則

位置 $\vec{r}'$ にある点電荷 q' は位置 $\vec{r}$ にある点電荷 q に力 $\vec{F}$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.2)$$

を及ぼす。ただし $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0}$ は「真空の誘電率」である。 $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

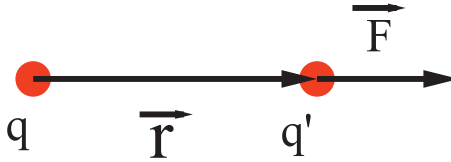


図 2.1 $\vec{r} = \vec{0}$ の場合を図示している。

は光の早さで、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A² は真空の透磁率である。

式を簡単にするために、 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ とおき、

$$\vec{F} = k \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.3)$$

を用いる場合も多い。

問題 2.1.1

水素原子の中の陽子と電子の間のクーロン力と万有引力の大きさの比を計算せよ。陽子と電子の質量は、それぞれ 1.7×10^{-27} kg, 9.1×10^{-31} kg で

ある。

===== 解答 =====

陽子・電子間の距離を R とすると、クーロン力は $F_C = e^2/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ に対して、万有引力は $F_G = GMm/R^2$ である。その比は $F_G/F_C = GMm/(e^2/(4\pi\epsilon_0)) = 4.5 \times 10^{-40}$ となる。

問題 2.1.2

質量 m の 2 個の小球にそれぞれ長さ l の糸を付けて同一点からつり下げた。小球に同量の電荷 q を与えたところ、糸は角度 2θ だけひらいて釣り合った。 q の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

小球間の距離は $2l \sin \theta$ である。小球間に働くクーロン力の大きさは $F_C = q^2/(4\pi\epsilon_0 (2l \sin \theta)^2)$ である。重力と張力とクーロン力が釣り合っているので、 $F_C/(mg) = \tan(\theta)$ であるから $q = 4l \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \sin^3 \theta / \cos \theta}$ となる。

問題 2.1.3

1 辺の長さ l の正三角形の角頂点に電荷 q を固定し、正三角形の重心にも電荷 q を置いた。重心の電荷に働く力を求めよ。図を描いて考えよ。

===== 解答 =====

対称性より重心の電荷に働くクーロン力の合力は 0 になる。

2.2 電場の性質

クーロンの法則は遠隔力の考えに基づいている。遠隔力とは二つの物体が接触せずに力を及ぼすことができるような力のことである。力学では必ず力が作用する場合には、物体の接触があった。その意味で遠隔力は「不思議」な力である。

これに対してファラデーは直感的に以下のように考えた。何らかの原因

(例えば点電荷 A が存在すること)によって、空間の状態が変化する。その変化した空間に点電荷 B (プローブ電荷) 置くとその電荷には力が作用する。すなわち、電荷 B はこの空間の変化を感知する。このように変化した空間＝「電場」と言う。このような考え方を「近接作用」の考え方と言う。

電場を定量的に表すために仮想的なプローブ電荷 q を用いる。そのプローブ電荷をある位置 $\vec{r}$ においた時、力 $\vec{F}$ を受けるとその位置における「電場の強さ」(あるいは、単に電場)を $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$ と表す。

静的な現象を扱う限りは遠隔作用的な考え方でも、近接作用的な考え方でも、同様に現象を扱うことができる。しかしながら、動的な現象では原因の変化に対して、結果には遅れが生じる。例えば、ある点電荷が動くと別の点電荷に及ぼされる力が変化するような場合である。そのような遅れを考えるためには、力が空間を伝わるという近接作用的な考え方の方が自然である。

2.2.1 電荷のつくる電場

クーロンの法則より、位置 $\vec{r}'$ にある点電荷 q が位置 $\vec{r}$ につくる電場は以下の式で表される。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} q \quad (2.4)$$

点電荷が多数ある場合は、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i \quad (2.5)$$

である。さらに一般化して、電荷が分布している場合には、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV' \quad (2.6)$$

となる。

問題 2.2.1

間隔 d だけ離しておいた二つの電荷 $q, -q$ （それぞれの座標は $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ とする。）を考える。

1. 位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ に作られる電場を表す式を作れ。
2. d に比べて十分遠い領域での電場の近似式を求めよ。

===== 解答 =====

求める電場は、

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q(\vec{r} - (0, 0, d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, d/2)|^3} + \frac{-q(\vec{r} - (0, 0, -d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, -d/2)|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x, y, z - d/2)}{(x^2 + y^2 + (z - d/2)^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x, y, z + d/2)}{(x^2 + y^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \right)\end{aligned}$$

以下では $r \gg d$ として近似式を作る。

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{(x, y, z - d/2)}{(1 - \frac{dz}{r^2})^{3/2}} - \frac{(x, y, z + d/2)}{(1 + \frac{dz}{r^2})^{3/2}} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((x, y, z - d/2) \left(1 + \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x, y, z + d/2) \left(1 - \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((0, 0, -d) + \frac{3dz(x, y, z)}{r^2} \right) \\ &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((0, 0, -1) + \frac{3z(x, y, z)}{r^2} \right) \\ &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3xz, 3yz, 3z^2 - r^2)\end{aligned}$$

問題 2.2.2

無限に長い直線上に単位長さ当たり λ の電荷が分布している。この電荷が x 軸上に作る電場を計算せよ。

===== 解答 =====

幾何学的な対称性より、 z 軸方向の電場は存在しない。また、系は軸対称なので、接線方向の電場も存在しない。従って、動径方向の電場のみを考えれば良い。 z 軸に沿って電荷が分布していると考えて計算を行う。

z 軸上 $(0, 0, z)$ に存在する電荷が $(x, 0, 0)$ に作る電場の大きさは

$$dE(z) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + z^2}$$

この位置における動径方向は x 軸方向である。その方向の成分は

$$dE_{\perp}(z) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

求めるべき電場の大きさは

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \end{aligned}$$

ただし、 $z = x \tan \theta$ を用いて、変数変換を行っている。

問題 2.2.3

2 個の点電荷 $2q, -q$ が $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ に置かれている。これらの電荷が十分遠方に作る電場の近似式を求めよ。 d の 1 次まで求めれば良い。

===== 解答 =====

問題 2.2.1 の解答を参考に、電場を表す式を作ると、

$$\begin{aligned}
 & \vec{E}(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q(\vec{r} - (0, 0, d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, d/2)|^3} + \frac{-q(\vec{r} - (0, 0, -d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, -d/2)|^3} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2(x, y, z - d/2)}{(x^2 + y^2 + (z - d/2)^2)^{3/2}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(x, y, z + d/2)}{(x^2 + y^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \right)
 \end{aligned}$$

以下では $r \gg d$ として近似式を作る。

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{2(x, y, z - d/2)}{(1 - \frac{dz}{r^2})^{3/2}} - \frac{(x, y, z + d/2)}{(1 + \frac{dz}{r^2})^{3/2}} \right) \\
 &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2(x, y, z - d/2) \left(1 + \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - (x, y, z + d/2) \left(1 - \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((x, y, z - 3d/2) + \frac{9}{2}(x, y, z - d/6) \frac{dz}{r^2} \right)
 \end{aligned}$$

d については 1 次まで取ることにする。

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((x, y, z - 3d/2) + \frac{9}{2}(x, y, z) \frac{dz}{r^2} \right)$$

問題 2.2.4

以下の場合の電場を求めよ。

1. 半径 R の円周上に電荷が一様に電荷密度 λ で分布している場合に、円周の中心を通過して円周が作る面に垂直な直線上の電場。
2. 半径 R の円板上に電荷が一様に電荷密度 σ で分布している場合に、円板の中心を通過して円板が作る面に垂直な直線上の電場。

3. 無限に広い平面上に電荷が一様に電荷密度 σ で分布している場合に、空間の任意の点での電場。

===== 解答 =====

円周は xy 面内にあるとし、考えている直線を z 軸とする。

1. 円周上の $R(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ における微少線要素 $ds = R d\theta$ が作る電場は、

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(0, 0, z) - R(\cos \theta, \sin \theta, 0)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \lambda R d\theta \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R\lambda(0, 0, z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

2. 円盤を半径 r で幅 dr の細い輪に分割すると、それぞれの輪に対しては上の解を用いることができる。このとき、電荷の線密度は σdr となる。

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \int_0^R \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{r(0, 0, z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \sigma dr \\ &= \frac{(0, 0, z)\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{(0, 0, z)\sigma}{2\epsilon_0} \left[-(z^2 + r^2)^{-1/2} \right]_0^R \\ &= \frac{(0, 0, z)\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)\end{aligned}$$

3. $R \rightarrow \infty$ にすれば良いので、

$$\vec{E}(z) = \frac{(0, 0, 1)\sigma}{2\epsilon_0}$$

となる。

2.2.2 電気力線

各点における接線がその点における電場 $\vec{E}$ の方向と一致するような曲線、すなわち「電気力線」、によって電場を視覚化することができる。電場の強さは単位面積を貫く電気力線の本数によって表す。

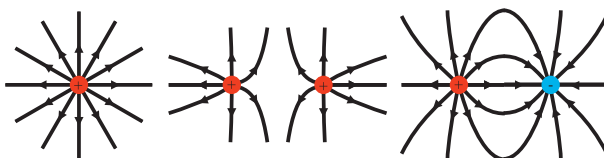


図 2.2

問題 2.2.5

- 1 A・s の電荷から出ている電気力線の本数を ε_0 を使って表せ。
- 1 A・s の電荷から出ている電気力線の本数を ε_0 を使って表せ。

===== 解答 =====

この点電荷 q から r だけ離れた点における電場の強さ $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ である。一方、半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ である。定義より電気力線の密度は電場の強さに等しいはずなので、 q から出る電気力線の本数を Nq とすれば、

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Nq}{4\pi r^2}$$

従って、 $N = 1/\varepsilon_0$ となる。符号が負の場合はマイナスをつければ良い。

問題 2.2.6

以下の場合の電気力線の様子を図示せよ。

- 無限に長い直線上に一様に電荷が分布している場合。

2. 無限に広い平面上に一様に電荷が分布している場合。

===== 解答 =====

2.2.3 ガウスの法則

ガウスの法則を理解するために、立体角 $d\Omega$ を定義しておこう。ある面 dS を原点から見た時の立体角 $d\Omega$ は

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.7)$$

である。ただし、 $d\vec{S}$ は大きさが dS で方向はこの面に垂直で外向きのベクトルである。例えば、原点を中心とする半径 r_0 の球の原点から見込んだ立体角は球の表面積が $4\pi r_0^2$ だからそれを r_0^2 で割って 4π になる。

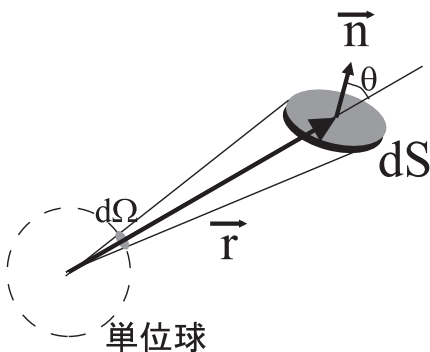


図 2.3

原点に電荷 q があり、その周りを閉曲面 S が囲んでいる。その閉曲面上で $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ を積分すると、

$$\begin{aligned}
 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_S \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_S d\Omega}_{4\pi} \\
 &= q/\epsilon_0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

また、閉曲面 S が電荷 q を取り囲んでいない場合には $\int_S d\Omega = 0$ になるので $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ になる。以上まとめると、

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} q : (q \text{ が } S \text{ の中にある時}) \\ 0 : (q \text{ が } S \text{ の外にある時}) \end{cases} \tag{2.9}$$

一般の電荷分布の場合には、

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{r}) dV \tag{2.10}$$

となる。ただし、 V は閉曲面 S で囲まれた体積である。

問題 2.2.7

半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ (正) で電荷が分布している場合の電場を求めよ。ガウスの法則を用いても良い。

===== 解答 =====

対称性より同心球面 S 上ではすべての電場の大きさは一定で、その方向は球面に垂直で外向きである。その大きさはその球面の半径だけの関数であるから、 $E(r)$ とする。この球面上でガウスの法則を適用すると、

$$\epsilon_0 \int_S E(r) dS = \epsilon_0 E(r) \int_S dS = \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2$$

一方、この球面 S 内にある電荷の総和 $q(r)$ は、以下の式で表されるので、

$$q(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho & r < a \\ \frac{4\pi}{3} a^3 \rho & r > a \end{cases}$$

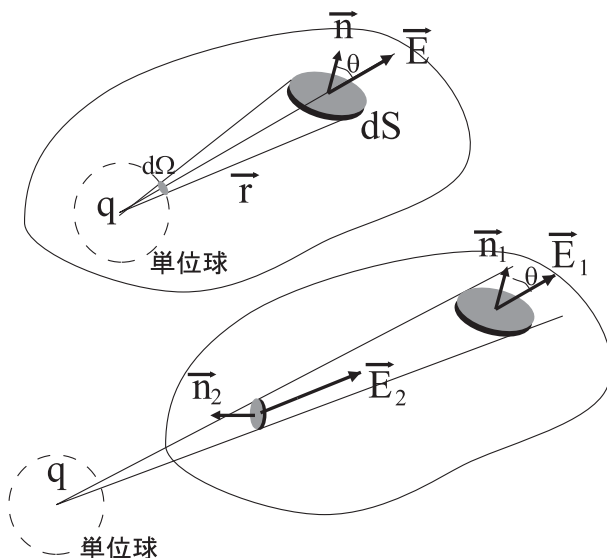


図 2.4

となる。ガウスの法則とあわせて、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r & r < a \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases}$$

が得られる。

問題 2.2.8

無限に長い直線上に線電荷密度 λ の電荷が分布している。ガウスの法則を用いて電場を求めよ。

===== 解答 =====

直線の長さ l の部分に存在する電荷は λl である。電場は軸対称になるはずなので、電場は放射状になっているはずである。従って、直線から距離 r

の場所の電場の大きさを求めることができれば、解けたと考えることが出来る。この直線を軸とした半径 r の円筒を考えて、ガウスの法則を適用すると、

$$2\pi r l E(r) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

となるので、 $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ となる。

問題 2.2.9

無限に広い厚さの無視できる平板上に面電荷密度 σ で電荷が分布している。任意の点における電場を求めよ。

===== 解答 =====

電荷の分布の様子から電場は面に対して垂直であることは明らかである。問題 2.2.4 を参照のこと。面を挟んで、面から上下に $\pm z$ だけ離れたところに、1 辺 L の面を考える。側面は面に垂直とする。これらの面に対してガウスの法則を適用すると、

$$\sigma L^2 / \varepsilon_0 = 2E(z)L^2$$

となり、 $E(z) = \sigma / (2\varepsilon_0)$ であることがわかる。

問題 2.2.10

半径 R_1, R_2 の無限に長い二つの円筒に電荷が、それぞれ面電荷密度 σ_1, σ_2 で一様に分布している。二つの円筒の軸が一致している場合に、生じる電場を求めよ。

===== 解答 =====

対称性から電場は円筒の軸から放射状に生じ、その大きさは軸からの距離のみに依存する。閉曲面として、円筒と軸が同じで半径 r ながさ l の円筒を考える。円筒の上下の面に垂直な磁場は存在しないので、側面のみに注目し

てガウスの法則を適用すれば良い。

$$2\pi r l \varepsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ 2\pi R_1 l \sigma_1 & R_1 < r < R_2 \\ 2\pi(R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2)l & R_2 < r \end{cases}$$

従って、電場は

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2}{\varepsilon_0 r} & R_2 < r \end{cases}$$

となる。

問題 2.2.11

半径 R の無限に長い円筒の内部に電荷が、電荷密度 ρ で一様に分布している。円筒の内外に、生じる電場を求めよ。

===== 解答 =====

閉曲面は上と同様にとる。

$$2\pi r l \varepsilon_0 E(r) = \begin{cases} \pi r^2 \rho l & r < R \\ \pi R^2 \rho l & r > R \end{cases}$$

従って、電場は

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & r < R \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} & r > R \end{cases}$$

となる。

2.2.4 電位

保存力

質点が位置 $\vec{r}$ に依存した力 $\vec{F}(\vec{r})$ の下で、ある基準点 A から P 点までゆっくりと（加速度を生じないように）移動する場合を考える。このような移動の際、外部からその力 $\vec{F}(\vec{r})$ と大きさがほとんど等しく、逆向きの力を加え

ないといけない。従って、点 P まで移動する際に外から与えなければならない仕事 W は

$$W(P) = \int_A^P (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \quad (2.11)$$

である。もしも、 $W(P)$ が途中の経路によらず、位置 P のみの関数である場合に、 $\vec{F}(\vec{r})$ は保存力であるという。

この保存力の下で、二つの経路 C_1, C_2 を通って基準点 A から点 P に達する場合を考えよう。保存力の定義より、

$$\int_{C_1} (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \quad (2.12)$$

となる。書きかえると、

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.13)$$

C_1 と $-C_2$ の経路は基準点 A から点 P を通って基準点 A に戻る経路であり、閉曲線になる。その閉曲線を C であらわすと、

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.14)$$

となる。

保存力の場合、位置 $\vec{r}$ の関数 $\phi(\vec{r})$ を定義して、

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad (2.15)$$

とすることができる。これは

$$(\phi(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \phi(\vec{r})) = -\vec{F} \cdot \delta\vec{r} \quad (2.16)$$

から導かれる。

電位

点電荷 q が q' に及ぼすクーロン力は

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.17)$$

である。ここで関数

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.18)$$

を導入すると、

$$\vec{F}(\vec{r}) = \{-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\}q' \quad (2.19)$$

と表すことができる。すなわち、静電場にはポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を考えることができる。特に一般のポテンシャルと区別するときには「静電ポテンシャル」または「電位」と呼ぶ。電荷が分布している場合には、それぞれの電荷が作る電位を加算することによって電位を得ることができる。

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.20)$$

別の表現で表すと、「静電場中を電荷 q を移動させる場合、電場のする仕事は移動の経路によらず始点と終点の電位差に q を掛けたものになる」。無限遠点を基準に電位を決める式は、

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (2.21)$$

となる。

$\phi(\vec{r}) = \text{一定}$ を満たす $\vec{r}$ は一つの曲面を作り、これを「等電位面」と呼ぶ。この等電位面に電気力線は直交する。これは $\phi(\vec{r}) = \text{一定}$ の面上の任意のベクトル $\delta\vec{r}$ に対して

$$\vec{E} \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad (2.22)$$

であることよりわかる。電位の単位は「J/C」で「V」と略記し「ボルト」と呼ぶ。

問題 2.2.12

半径 R の球面上に一様に面密度 σ で電荷が分布している。電位を求めよ。

===== 解答 =====

電場の向きは放射線状外向きで、その大きさは

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

である。これを無限遠点を基準に電位を求めるには電場を線積分すれば良い。

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^r E(r') dr' \\ &= \begin{cases} - \int_{\infty}^r \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' & r > R \\ - \int_{\infty}^R \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' - \int_R^r 0 dr' & r < R \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} & r > R \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{R} & r < R \end{cases} \end{aligned}$$

問題 2.2.13

半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ (正) で電荷が分布している場合の電位を求めよ。

===== 解答 =====

問題 2.2.7 より、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^2} & r > a \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r & r < a \end{cases}$$

である。これを無限遠点を基準に電位を求めるには電場 $E(r)$ を r によって積分すれば良い。

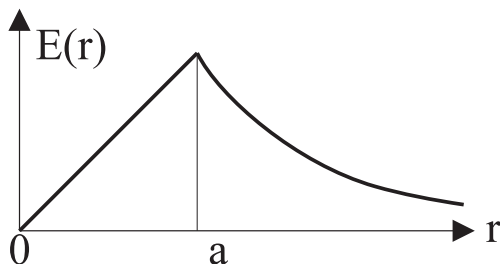


図 2.5

$$\begin{aligned}
 \phi(r) &= - \int_{\infty}^r E(r) dr \\
 &= \begin{cases} \int_r^{\infty} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} dr & r > a \\ \int_a^{\infty} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} dr + \int_r^a \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr & r < a \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r} & r > a \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{3a^2 - r^2}{2} & r < a \end{cases}
 \end{aligned}$$

問題 2.2.14

間隔 d だけ離しておかれた二つの点電荷 $q, -q$ がある。それぞれの電荷の位置は $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ とする。電荷から十分遠い所における電位を求め、その電位から電場を求めよ。

===== 解答 =====

電位は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} \right)$$

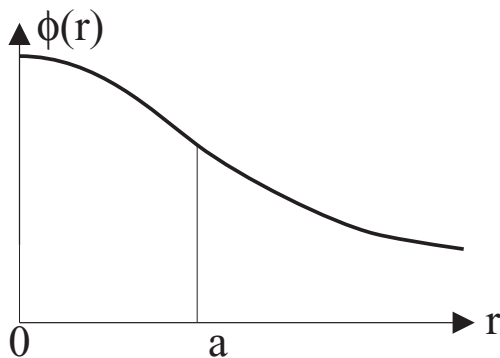


図 2.6

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \Bigg) \\
 & \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 & \quad \left(\left(1 + \frac{zd/2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) - \left(1 - \frac{zd/2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right) \\
 & = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}
 \end{aligned}$$

電場は電位を偏微分すればよい。この偏微分の計算は省略。

2.2.5 静電エネルギー

点電荷 q_1, q_2 がそれぞれ位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ に存在する。電荷 q_1 による電荷 q_2 の位置におけるポテンシャルは、

$$\phi_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (2.23)$$

である。従って、二つの電荷が存在することによる（静電）エネルギーは

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (2.24)$$

となる。複数の電荷が存在する場合には以下のように拡張すればよい。

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{(i,j)}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (2.25)$$

ここで、 $\sum_{(i,j)}^n$ は n 個の電荷のすべての組み合わせについて足しあげることの意味する。また、以下のように表すこともできる。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi'_i q_i \quad (2.26)$$

$$\phi'_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j(\neq i)}^n \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.27)$$

ϕ'_i は電荷 q_i 以外の電荷から生じる電位である。ここで $1/2$ は 2 回足しあわせてしまっているので、それを補正するためである。より一般には、

$$U = \frac{1}{2} \int \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad (2.28)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.29)$$

となる。あるいは、

$$U = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \quad (2.30)$$

とあらわすこともできる。

問題 2.2.15

半径 R の球内に電荷密度 ρ_0 で電荷が一様に分布している。このときの静電エネルギーを求めよ。

===== 解答 =====

半径 r 電荷密度 ρ の球に電荷を運んで、半径を dr だけ大きくするために必要な仕事を求めよう。運ぶべき電荷は $4\pi r^2 \rho dr$ である。一方、電位は $\frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}$ である。問題 2.2.13 を参照。従って、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} 4\pi r^2 \rho dr \\ &= \frac{4\pi \rho^2}{3\varepsilon_0} \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{4\pi \rho^2}{15\varepsilon_0} R^5 \end{aligned}$$

となる。

問題 2.2.16

1 V の電位差がある 2 点間の電子の位置エネルギーの差を 1 eV と呼ぶ。1 eV は何 J に相当するか？また、 10^{-10} m 離れた電子と陽子を無限遠まで引き離すために必要なエネルギーは何 eV か？

===== 解答 =====

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \times 1 \text{ V} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

電位エネルギーは

$$\begin{aligned} & \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \cdot 10^{-10}} \text{ J} \\ &= \frac{1.602 \times 10^{-19}}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \cdot 10^{-10}} \text{ eV} \\ &= 14.4 \text{ eV} \end{aligned}$$

問題 2.2.17

半径 R の球面上に電荷 Q が一様に分布している。このときの静電エネルギーを求めよ。

===== 解答 =====

球面上の電荷を 0 から増やして、最後には Q にする仮定で必要な仕事を計算して静電エネルギーを求める。

$$\int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

問題 2.2.18

無限に長い直線上に正負の点電荷 $\pm q$ が交互に間隔 a をおいて並んでいる。点電荷 1 個当たりの静電エネルギーを計算せよ。

===== 解答 =====

1 個の電荷とその他の電荷との静電エネルギーは、

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2q^2}{a} + \frac{2q^2}{2a} - \frac{2q^2}{3a} + \dots \right)$$

となる。電荷 1 個あたりの静電エネルギーはこれの半分で、

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \log 2$$

となる。

2.2.6 電気双極子

$\pm q$ の点電荷の対の間隔 $d = |\vec{r}_+ - \vec{r}_-|$ を $p = qd$ を一定に保ちながら、小さくした極限を考える。そのような対象を電気双極子と呼び、ベクトル $\vec{p}$ を用いて表す。

$$\vec{p} = \lim_{d \rightarrow 0} qd \frac{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{d} = p \lim_{d \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{d} \quad (2.31)$$

電気双極子によって、作られる電位は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.32)$$

となる。

密集した多数の点電荷による十分遠方の電位を近似的に求める方法について考えよう。 n 個の点電荷 q_i が位置 $\vec{r}_i$ ($i = 1 \sim n$) に存在する。ただし、 $\sum_i \vec{r}_i = \vec{0}$ となるように原点を決める。位置 $\vec{r}$ における電位は

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_i| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)} \\ &= \sqrt{|\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i + |\vec{r}_i|^2} \end{aligned}$$

であるから、 $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_i|$ の条件を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} &\approx \frac{1}{|\vec{r}|} \left(1 - 2 \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{r}|} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) \end{aligned}$$

と近似できる。電位を求める式に代入すると、

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}|} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。ここで、

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \quad (2.34)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i \quad (2.35)$$

である。 Q は全電荷、 $\vec{P}$ は電荷のモーメントである。

問題 2.2.19

以下の場合について、電荷から十分遠方における電位を求めよ。

1. 3 個の点電荷 $-q, 2q, -q$ が間隔 d で直線上に並んでいる場合。
2. 4 個の点電荷 $\pm q$ が 1 辺 d の正方形の角頂点に置かれている場合。隣り合う電荷の符号は異なっているものとする。

===== 解答 =====

1. 2 個の電気双極子 $\vec{p} = \mp q(0, 0, d)$ がそれぞれ $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ に置かれている場合を考えれば良い。

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (0, 0, d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, d/2)|^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (0, 0, -d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, -d/2)|^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(-\vec{p} \cdot (\vec{r} - (0, 0, d/2)) \left(1 + \frac{3dz/2}{r^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \vec{p} \cdot (\vec{r} + (0, 0, d/2)) \left(1 - \frac{3dz/2}{r^2}\right) \right)\end{aligned}$$

d について 1 次までとると、

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} \cdot (0, 0, d) - \vec{p} \cdot \vec{r} \frac{3dz}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 q r^3} \left(|\vec{p}|^2 - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{r^2} \right)\end{aligned}$$

2. 2 個の双極子 $\vec{p} = \pm q(0, d, 0)$ がそれぞれ $(d/2, 0, 0), (-d/2, 0, 0)$ に置かれてると考えれば良い。

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (d/2, 0, 0))}{|\vec{r} - (d/2, 0, 0)|^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (-d/2, 0, 0))}{|\vec{r} - (-d/2, 0, 0)|^3} \right)\end{aligned}$$

d について 1 次までとると、

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} \cdot (\vec{r} - (d/2, 0, 0)) \left(1 + \frac{3dx/2}{r^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \vec{p} \cdot (\vec{r} + (d/2, 0, 0)) \left(1 - \frac{3dx/2}{r^2}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(-\vec{p} \cdot (d, 0, 0) + \vec{p} \cdot \vec{r} \frac{3dx}{r^2} \right) \\
 &= \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{r^5}
 \end{aligned}$$

2.2.7 電束

静電場は目に見えず、直感的に理解することが難しい。そこで、水の流れとの対比を行うことによって、理解の助けとしよう。空間中に水の流れを考えると、空間の各点毎にそこを流れる水が存在する。言い換えると水の流れを規定するためには、各点毎に流速を表すベクトルを決める必要がある。このように、各点毎にベクトルが与えられるような空間をベクトル場と呼ぶ。水の流れの場を $\vec{v}(\vec{r})$ と表すこととしよう。ある閉曲面 S を考えて、そこで流速の面積分

$$\int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

を考えよう。この面積分はこの閉曲面の中に水のわき出し $f(\vec{r})$ の総量に等しいはずである。式で表すと、

$$\int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V f(\vec{r}) dV$$

となる。ここで、 V は閉曲面 S で囲まれる体積である。

真空中の電場 $\vec{E}$ に対して

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.36)$$

となるベクトルを定義し、「電束密度」と呼ぶ。ガウスの法則は以下のようになる。

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.37)$$

となる。 $\int_V \rho(\vec{r}) dV$ は面 S に囲まれた体積 V の中に存在する全電荷量になっている。水の流れと比較すると、 $\vec{v} \leftrightarrow \vec{D}$ 、 $f \leftrightarrow \rho$ となっていることがわかるであろう。

静電場の場合、電荷が存在しなければ $\vec{D} = \vec{0}$ である。水の流れ場の場合にはわき出しが存在しなくても、 $\vec{v} \neq \vec{0}$ となる場合がある。それは渦が存在する場合である。渦がある条件は

$$\int_c \vec{v} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

と表すことができる。ここで c はある閉曲線であり、上の式は閉曲線 c に沿っての線積分である。従って、静電場と水の流れ場との対比を完全にするためには、静電場では渦がないという条件

$$\int_c \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.38)$$

が必要となる。

2.3 静電場の微分法則

今までは、静電場の基本法則を積分形で書いていた。すなわち、マクロな視点にたった法則であった。近接作用の観点からは、空間の各点で成立するミクロな視点にたった法則＝法則の微分形で表す必要がある。微分形の基本法則によって、ある影響が伝搬する様子を表すことができる。

2.3.1 ガウスの法則の微分形

ガウスの法則の積分形は

$$\int_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

と表すことができる。これにガウスの定理を適用することによって、

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) dV = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

となる。体積 V は任意だから、積分の中身が等しい必要がある。従って、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (2.39)$$

となる。これがガウスの法則の微分形である。

問題 2.3.1

半径 R の球内に一様に電荷が分布している。その電荷密度は ρ である。この電荷によって作られる電場をもとめ、それがガウスの法則の微分形を満たすことを示せ。

===== 解答 =====

電荷の分布は、

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & |\vec{r}| \leq R \\ 0 & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

である。電場は、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} & |\vec{r}| \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \vec{r} & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

なので、球の内外で $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ を計算し、電荷の分布と比較すれば良い。

問題 2.3.2

半径 R の無限に長い円筒の内部に電荷が密度 ρ で一様に分布している。この電荷が作るポテンシャル、電場を求め、その電場がガウスの法則の微分形を満たすことを示せ。

===== 解答 =====

電荷の分布は、

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

である。 z 軸方向に長さ L の円筒を考えてガウスの法則を適用すると、電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0}(x, y, 0) & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

なので、球の内外で $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ を計算し、電荷の分布と比較すれば良い。

2.3.2 渦なしの法則の微分形

渦なしの法則の積分形は

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 0$$

と表すことができる。これにストークスの定理を適用することによって、

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

となる。閉曲線 C は任意だから、積分の中身が等しい必要がある。従って、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.40)$$

となる。これが渦なしの法則の微分形である。

問題 2.3.3

次に挙げるベクトル場の中で静電場と見なせるものはどれか？また、その場合の電位を求めよ。

1. $F_x = 2Axz, F_y = 2Ayz, F_z = A(x^2 + y^2 - 2z^2)$
2. $F_x = A(y^2 + z^2), F_y = A(x^2 + z^2), F_z = A(x^2 + y^2)$
3. $F_x = 2Axy, F_y = A(x^2 - y^2), F_z = 0$

===== 解答 =====

1. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ となるので、静電場とみなすことができる。
電位 $\phi(\vec{r}) = -A((x^2 + y^2)z - (2/3)z^3)$ である。
2. $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq \vec{0}$ なので、静電場と見なすことはできない。
3. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ となるので、静電場とみなすことができる。
電位 $\phi(\vec{r}) = -A(x^2y - y^3/3)$ である。

2.3.3 ポアソン方程式

電位 $\phi(\vec{r})$ の勾配を取ることによって得られる電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) = 0$$

となり、自動的に渦なしの条件を満たしている。従って、電荷分布が与えられている場合の電位（その勾配を計算することによって電場も）は以下の微

分方程式を満たす解として与えられる。

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad (2.41)$$

この方程式をポアソン方程式と言う。特に、真空の場合には

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = 0 \quad (2.42)$$

となり、ラプラス方程式と言う。なお、 $\Delta = \vec{\nabla}^2$ をラプラシアンと言う。

問題 2.3.4

原点に点電荷 q がある場合の電位 $\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|}$ は原点以外でラプラス方程式を満たすことを確認せよ。

===== 解答 =====

省略。

問題 2.3.5

原点に置かれた電気双極子による電位は原点以外でラプラス方程式を満たすことを示せ。

===== 解答 =====

省略。

問題 2.3.6

電位 $\phi(\vec{r}) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r}$ で表される。ここで、 $r = |\vec{r}|$ である。

1. 原点以外の電荷密度を求めよ。
2. 原点における点電荷の大きさを求めよ。
3. 原点以外に分布する全電荷を求めよ。

===== 解答 =====

1. ポアソンの方程式より以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) &= A(-1)r^{-2}\frac{\vec{r}}{r}e^{-\kappa r} + \frac{A}{r}(-\kappa)e^{-\kappa r}\frac{\vec{r}}{r} \\
 &= -\frac{A}{r^3}e^{-\kappa r}(1 + \kappa r)\vec{r} \\
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) &= \left(\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{A}{r^3} \right) \right) e^{-\kappa r}(1 + \kappa r)\vec{r} \\
 &\quad + \left(-\frac{A}{r^3} \right) \left(\vec{\nabla} \cdot e^{-\kappa r} \right) (1 + \kappa r)\vec{r} \\
 &\quad + \left(-\frac{A}{r^3}e^{-\kappa r} \right) \left(\vec{\nabla} \cdot (1 + \kappa r) \right) \vec{r} \\
 &\quad + \left(-\frac{A}{r^3}e^{-\kappa r}(1 + \kappa r) \right) \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r} \right) \\
 &= \kappa^2 A \frac{e^{-\kappa r}}{r}
 \end{aligned}$$

$\rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r})$ より、

$$\rho = -\varepsilon_0 \kappa^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

となる。

2. 電場は $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ から、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A}{r^3}e^{-\kappa r}(1 + \kappa r)\vec{r}$$

である。原点を中心とする微少な半径 δ の球を考えてガウスの法則を適用すると、 $4\pi\varepsilon_0\delta^2\frac{Ae^{-\kappa\delta}}{\delta^2} \rightarrow 4\pi\varepsilon_0A$ となる。

3. 原点以外に分布する電荷の総和は、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \rho(r)4\pi r^2 dr &= -4\pi\varepsilon_0 A\kappa^2 \int_0^\infty r e^{-\kappa r} dr \\ &= -4\pi\varepsilon_0 A\end{aligned}$$

となる。原点に存在する電荷と符号が逆で大きさは等しい点に注意。

2.3.4 ポアソン方程式の解の性質

ある電荷分布 $\rho(\vec{r})$ が与えられているとき、ポアソン方程式を満たす解 $\phi(\vec{r})$ が見つかったとしよう。また、ラプラス方程式の解 $\psi(\vec{r})$ とすると、

$$\Delta(\phi(\vec{r}) + \psi(\vec{r})) = \Delta\phi(\vec{r}) + \Delta\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

となり、 $\phi(\vec{r}) + \psi(\vec{r})$ も解であることがわかる。このように解には不定性があり、境界における条件を満たすようにして始めて電位は決まる。

ポアソン方程式から以下の電位の性質が導かれる。

1. 電位は電荷のないところで極大、極小にならない。
極大、極小では2次微分がゼロでない。すなわち、ラプラス方程式と矛盾する。
2. ある領域内に電荷が存在せず、その領域の境界での電位が一定ならば、その領域内では電位は至る所境界における電位と等しい。
領域内で電位の空間変化があれば、領域内で極小または極大が存在することになる。しかしながら、これは領域内に電荷が存在しないという条件に反することになる。

電荷分布と境界条件が与えられたならば、ポアソン方程式の解はただ一つに決まることが以下のようにして分かる。

仮に、2つの解 $\phi_1(\vec{r}), \phi_2(\vec{r})$ が存在すると仮定しよう。当然、領域内で

$$\Delta\phi_1(\vec{r}) = \Delta\phi_2(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

を満たし、境界で

$$\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r}) = \phi_0$$

を満たしている。ここで、 $\varphi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$ を考えると、至る所で $\varphi(\vec{r}) = 0$ とならなければならない。言い換えると、 $\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})$ を意味しており、解は唯一であることが分かる。

ここまで、クーロンの法則によって電荷が作る静電場の満たすべき方程式としてガウスの法則と渦なしの法則を導いた。この2法則とポアソン方程式は等価である。一方、ポアソン方程式を境界条件の下で解くことによって、静電場を完全に決定できることを上で示した。

2.4 導体

導体では、その内部に電場があると電荷が移動し、内部の電場を打ち消すような電荷分布が実現する。そのために、時間的に変化しない場合には導体内部で電場は常にゼロであり、導体の表面は電位一定の面になる。

2.4.1 導体と絶縁体

電気の流れ易さを基準に物質を「絶縁体」(抵抗率が $10^8 \Omega\text{m}$ 以上)、「導体」($10^{-5} \Omega\text{m}$ 以下)、そしてその中間の「半導体」に分けることができる。典型的な導体である銅の電気抵抗は室温で $1.55 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ である。特に金属中には殆ど自由に動くことのできる「伝導電子」が存在し電気を運ぶ。抵抗率については後述。

導体（ここでは、金属を考える）を電場中に置くと伝導電子が動き、片側の表面が正に、他の側が負に帯電する。このような現象を「静電誘導」と言

う。静電誘導の結果、導体内の電場はゼロになる。すなわち、導体表面は等電位面になる。よって、導体のすぐ外側の電場は導体表面に垂直である。

導体表面においてガウスの法則を適用することによって、

$$\varepsilon_0 E \Delta S = \sigma \Delta S \quad (2.43)$$

となる。よって、表面電荷密度 σ と導体のすぐ外側の電場の関係

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \quad (2.44)$$

が分る。ただし、 $\vec{n}$ は表面に垂直な単位ベクトルである。

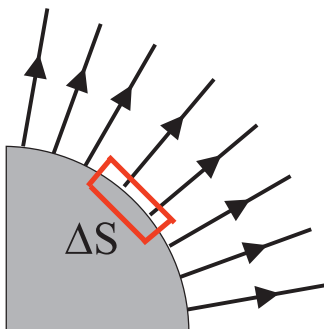


図 2.7

問題 2.4.1

地球の表面では、下向きに $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ の電場が存在する。地球全体では何クーロンの電荷があるか？地球を半径 6400 km の導体球と考える。

===== 解答 =====

表面電荷密度は $\sigma = \varepsilon_0 E$ で与えられるので、地球の表面積倍すれば総電

荷が得られる。

$$\begin{aligned} Q &= -8.85 \times 10^{-12} \cdot 100 \cdot 4\pi(6.4 \times 10^6)^2 \\ &= -4.6 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

問題 2.4.2

導体球殻 A の内部に点電荷 q_1 を置き、外部に点電荷 q_2 を置く。点電荷 q_1 に働く力を求めよ。

===== 解答 =====

球殻の内部では電場は存在しないので、点電荷 q_1 に力は働かない。

問題 2.4.3

導体の平らな表面の深さ d まで電荷が一様な密度 ρ で分布している。

1. 表面からの深さが x の導体内部の電場の強さ $E(x)$ を求めよ。
2. 表面電荷に働く力は単位面積あたり、

$$f = \int_0^d \rho E(x) dx$$

で与えられる。計算せよ。

===== 解答 =====

1. 導体表面に垂直に x 軸を取り、正の向きを導体に入る方向に取る。原点は導体表面に取る。電場は $x < 0$ で $-E = -\rho d / \varepsilon_0$ 、 $x > d$ で 0 である。 $0 < x < d$ ではガウスの法則により、 $E(x) = (\rho / \varepsilon_0)x + C$ となるはずである。ここで C は導体の内外で電位が連続になるようにするための定数。 $x = 0$ で連続であるために、 $0 < x < d$ で

$$E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon}(x - d)$$

となる。

2.

$$f = \int_0^d \rho E(x) dx = \frac{\rho^2}{\varepsilon} \int_0^d (x - d) dx = -\frac{\rho^2 d^2}{2\varepsilon}$$

符号は負なので、力は導体外向きに働く。

2.4.2 境界値問題

電荷の分布 $\rho(\vec{r})$ が与えられている場合に電場を求めるにはこの電荷密度に対してポアソン方程式を解けばよい。しかし、導体が存在すると、その表面の電荷密度は表面の電位を一定にするように決定される。言い換えると、与えられた電荷密度と導体の表面で値が一定（境界値が一定）という条件の下でポアソン方程式を解く必要がある。このような問題を境界値問題と言う。

境界値問題には以下のような重ね合わせの原理が成り立つ。真空中に導体 1, 2 が置かれている。無限遠における電位を 0 とし、導体 1 の電位を ϕ_1 、導体 2 の電位を 0 としたときの境界値問題の解を $\phi_1(\vec{r})$ とする。同様に導体 1 の電位を 0、導体 2 の電位を ϕ_2 としたときの境界値問題の解を $\phi_2(\vec{r})$ とする。導体 1, 2 の電位がそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 の場合の境界値問題の解は

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) \quad (2.45)$$

となる。なぜならば、 $\phi(\vec{r})$ は真空中でラプラス方程式を満たす。一方、導体 1 の表面では $\phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) = \phi_1 + 0$ なので、 $\phi(\vec{r})$ は境界条件を満たす。導体 2 の表面上でも同様である。境界値問題の解は一つしかないから、これが求める解になる。

問題 2.4.4

平らな導体の表面から d だけ離れた所に置かれた点電荷 q による電場と導体に静電誘導される表面電荷密度を以下の手順に従って求めよ。

1. 点電荷の近傍では電気力線は放射状に、そして導体の表面には電気力

線は垂直に入射することに注意して、全空間での電気力線の様子を描け。

2. 導体表面を鏡面と見立てたときの点電荷 q の像の位置に $-q$ の電荷を置き、この二つの電荷による電気力線の様子を描け。ただし、導体の存在は無視する
3. 2 番目の場合の金属の外の電位を求めよ。
4. 点電荷 q を無限遠まで引き離すために必要な仕事を求めよ。

===== 解答 =====

1. 省略。
2. 省略。
3. 電位 $\phi(\vec{r})$ は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - (0, 0, d)|} - \frac{1}{|\vec{r} - (0, 0, -d)|} \right)$$

$\phi(x, y, 0) = 0$ になっており、金属表面が等電位面になっている。
電場は

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x, y, z-d)}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x, y, z+d)}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

特に $z = 0$ では、

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, 0) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(0, 0, d)}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

となる。従って、表面電荷密度は $\sigma = \epsilon_0 E$ より求まる。

4. $(0, 0, z)$ にある点電荷に働く力は、鏡像との間に働く力より計算でき、

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2z)^2}(0, 0, 1)$$

である。これに抗して電荷を動かさないといけない。従って、必要な仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_d^\infty \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2z)^2} dz \\ &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} \end{aligned}$$

となる。

問題 2.4.5

一様な静電場 $\vec{E}_0$ の中に帯電していない半径 R の導体球を置いた。静電場はどのようなになるか？

1. 一様な静電場を作る電位は、 $\phi_0(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$ であることを確認せよ。
2. 電気双極子による電位は $\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ である。一様な電場を作る電位と電気双極子が作る電位が球の表面上で 0 になる条件は何か？
3. 導体球の外側の電位を求めよ。
4. 導体球の表面の電荷密度を求めよ。
5. この表面の電荷分布と同じ電荷分布を絶縁体球上に再現した。この電荷分布によって得られる電場を考察せよ。

===== 解答 =====

1. 省略。
2. 合成した電位は、 $\vec{r} = R\vec{n}$ の位置で、

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot R\vec{n} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot R\vec{n}}{R^3}$$

$$= \left(-\vec{E}_0 + \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \cdot R\vec{n}$$

となる。ただし、 $|\vec{n}| = 1$ とする。従って、 $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ が条件となる。

3.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= -\left(1 - \frac{R^3}{|\vec{r}|^3} \right) \vec{E}_0 \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

となる。

4. $r \geq R$ において、

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -3R^3 r^{-4} \frac{\vec{r}}{r} \vec{E}_0 \cdot \vec{r} - \left(1 - \frac{R^3}{|\vec{r}|^3} \right) \vec{E}_0$$

となる。 $\vec{r} = R\vec{n}$ のとき、

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -3(\vec{E}_0 \cdot \vec{n})\vec{n}$$

となる。従って、電荷密度はこれを ϵ_0 倍すれば良い。

5. 導体球内部では、この電荷密度による電場と外場によって導体球の内部の電場は 0 になっていた。従って、この電荷密度による電場は外場と反対向き、すなわち $-\vec{E}$ となる。一方、球外部では原点に $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ という電気双極子がある場合の電場になる。

問題 2.4.6

平らな導体の表面から d だけ離れた所に置かれた直線状の電荷がある。その線電荷密度は λ である。電場を求めよ。また、導体表面に生じる電荷密度を求めよ。

===== 解答 =====

直線状の電荷は点電荷が線上に分布していると考える。それぞれの電荷の鏡像は先の問題と同様に考えることができる。また、無限に長い直線状の電荷を考えているので、電場を求めるのは $x = 0$ の位置だけで十分である。

直線状の電荷による電場の大きさ E はガウスの法則より、 $\vec{r} = (0, y, z)$ では

$$2\pi l |\vec{r} - (0, 0, d)| \varepsilon_0 E_1 = \lambda l$$

となる。向きも考慮すると、

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - (0, 0, d)}{|\vec{r} - (0, 0, d)|^2} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(0, y, z - d)}{y^2 + (z - d)^2} \end{aligned}$$

となる。同様に鏡像による電場 $\vec{E}_m$ は

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(\vec{r}) &= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - (0, 0, -d)}{|\vec{r} - (0, 0, -d)|^2} \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(0, y, z + d)}{y^2 + (z + d)^2} \end{aligned}$$

となる。従って、電場は、

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_m(\vec{r}) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{(0, y, z - d)}{y^2 + (z - d)^2} - \frac{(0, y, z + d)}{y^2 + (z + d)^2} \right) \end{aligned}$$

特に、 $z = 0$ では

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{(0, 0, d)}{y^2 + d^2}$$

となる。従って、表面電荷密度は $-\frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{y^2 + d^2}$ となる。

2.4.3 静電容量

ある導体に電荷 q を帯電させた時、その導体表面の電位が無遠点点を基準に ϕ になったとする。この時、この導体の静電容量 C は

$$Q = C\phi \quad (2.46)$$

で与えられる。その単位には C/V を用い、F と略記してファラッドと呼ぶ。静電容量は導体を帯電させるのに必要なエネルギーが小さいほど大きくなる。また、その時のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}q\phi = \frac{1}{2}C\phi^2 = \frac{1}{2C}q^2 \quad (2.47)$$

となる。

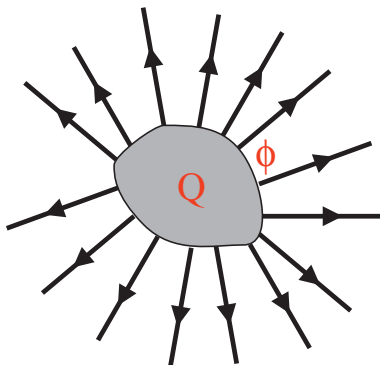


図 2.8

導体が多数ある場合には、お互いに影響を及ぼしあう。導体 1 の電位を ϕ_1 、導体 2 の電位を 0 とした場合に、それぞれの導体の持つ電荷を q_1, q_2 とすれば、

$$q_1 = C_{11}\phi_1, \quad q_2 = C_{21}\phi_1 \quad (2.48)$$

となる。導体 1 の電位を 0、導体 2 の電位を ϕ_2 とした場合に、それぞれの導体の持つ電荷を q_1, q_2 とすれば、

$$q_1 = C_{12}\phi_2, \quad q_2 = C_{22}\phi_2 \quad (2.49)$$

となる。導体 1, 2 の電位がそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 の場合には重ね合わせになるので、

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

となる。

C_{ij} は導体の形状や位置関係で決まるが、必ず

$$C_{12} = C_{21} \quad (2.51)$$

となる。この関係を容量係数の相反定理と呼ぶ。

問題 2.4.7

半径 a の導体球の静電容量を求めよ。問題 2.2.12 と静電容量の定義から考えれば良い。

===== 解答 =====

問題 2.2.12 より、半径 a の球に電荷 Q が帯電している場合の電位は無限遠点を基準にして、

$$Q = 4\pi\epsilon_0 a\phi$$

ここで $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ を用いた。よって、静電容量は $4\pi\epsilon_0 a$ である。

問題 2.4.8

導体が 2 個ある場合について、相反定理を以下の手順で証明せよ。

1. 電荷 q_1, q_2 が与えられた時の ϕ_1, ϕ_2 を求めよ。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

を解けば良い。

2. $U = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2)$ より系全体のエネルギーを求めよ。
3. 導体 1 の電荷を微少量 δq_1 だけ変化させた時のエネルギーの変化 δU を求めよ。ただし、 $\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1$ を用いる。
4. δq を微少と考えれば、その電荷変化による電位変化は δq^2 の程度となり、無視できる。従って、 $\delta U = \phi_1 \delta q_1$ として、良いはずである。上と比較することによって、相反定理が成り立つことを示せ。

===== 解答 =====

1.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. 上で求めた ϕ_1, ϕ_2 を代入すれば、

$$U = \frac{C_{22}q_1^2 - (C_{12} + C_{21})q_1q_2 + C_{11}q_2^2}{2(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})}$$

3.

$$\delta U = \frac{C_{22}q_1 - \frac{C_{12}+C_{21}}{2}q_2}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \delta q$$

4.

$$\delta U = \frac{C_{22}q_1 - C_{12}q_2}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \delta q_1$$

は先に計算した δU と等しい。従って、 $C_{12} = C_{21}$ でなければならない。

問題 2.4.9

半径 R の 2 個の導体球を十分な距離 r 離して置く。

1. 最初、一方の導体球に電荷 Q を与えた時の全体のエネルギーを求めよ。
2. 次に導体球を導線で接続した。この時の全体のエネルギーを求めよ。
3. 上の二つの場合のエネルギー差の原因は何か？

===== 解答 =====

1. 十分離れているので、一方に電荷を与えても他方への影響は無視できる。従って、1 個の導体球に電荷を与えた場合の静電エネルギーになる。これは、 $U = (1/2C)Q^2 = Q^2/(8\pi\epsilon_0 R)$ である。
2. 電荷は当分配されるので、電荷は半分になる。しかしコンデンサーが 2 個あることになり、 $U = 2(1/2C)(Q/2)^2 = Q^2/(16\pi\epsilon_0 R)$ となる。
3. 電荷が導線を移動する間に発生するジュール熱がエネルギー差に相当する。

問題 2.4.10

半径 R_1 の導体球を内径 R_2 で外径 R_3 の球殻の中に中心が一致するように入れた。電気容量係数（行列）を求めよ。

===== 解答 =====

導体球と導体球殻にそれぞれ電荷を q_1, q_2 を与えた。このとき、電場は大きさ

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_3 < r \end{cases}$$

で、外向きに（電荷は正として）放射線状に向いている。従って、無限遠点

を基準にして、 R_1, R_3 における電位 ϕ_1, ϕ_2 を求めると、

$$\phi_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

q_1, q_2 について解くと、

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} & -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} & R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

問題 2.4.11

平行平板コンデンサーの静電容量を求めよ。ただし、極板の面積を S 、間隔を d とする。端を除けば、極板には一様な電荷 σ が誘起されており、電場は極板に垂直であると考えても良いことを用いる。

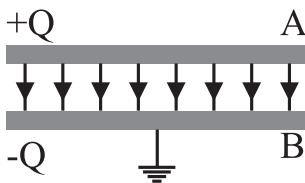


図 2.9

===== 解答 =====

ガウスの法則より、コンデンサー内部の電場の大きさは $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ になる。
一方、電極間の電位差 $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \int_A^B E dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q$$

である。ただし、 $Q = \sigma S$ を用いた。よって、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

である。

問題 2.4.12

半径 R_1 の球を中心をあわせて、内径 R_2 の球殻に配置した。これらをコンデンサーと見なした場合の容量を求めよ。

===== 解答 =====

問題 2.4.10 で $q_1 = -q_2 = q$ を与えた場合を考えれば良い。

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

となるので、容量は

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

となる。

問題 2.4.13

面積 A の 3 枚の導体板 a, b, c を順に間隔 d_1, d_2 をおいて平行に並べた。導体板 a と c は接地し、導体 b に電荷 Q を与えた。導体間の電場を求めよ。

===== 解答 =====

a と c は接続されているので、電位は等しい。従って、ab 間と cb 間の電位差は等しく、電場の強さはそれぞれ $E_{ab}d_1 = E_{cb}d_2$ となる。b の a 側の面の面電荷密度と b の c 側の面の面電荷密度はそれぞれ、 $\sigma_{ab} = \varepsilon_0 E_{ab}$, $\sigma_{cb} = \varepsilon_0 E_{cb}$ である。また、b に与えられた全電荷は $Q = (\sigma_{ab} + \sigma_{cb})A$ であるので、

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \frac{Q}{A} \frac{d_2}{d_1 + d_2}, \sigma_{cb} = \frac{Q}{A} \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \\ E_{ab} &= \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \frac{d_2}{d_1 + d_2}, E_{cb} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \frac{d_1}{d_1 + d_2} \end{aligned}$$

となる。

2.4.4 静電場のエネルギー

キャパシターに電荷を蓄える場合に必要な仕事を考察する。キャパシターの電位が ϕ の時には電荷 $q = C\phi$ が蓄えられている。ここに微少電荷 Δq を無限遠点から運んで、電荷を $q + \Delta q$ にするために必要な仕事は $\phi\Delta q$ である。よって、電荷 0 から q まで蓄えるのに必要な仕事 W は

$$U = \int_0^q \phi dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (2.52)$$

となる。平行平板コンデンサーを考えれば、

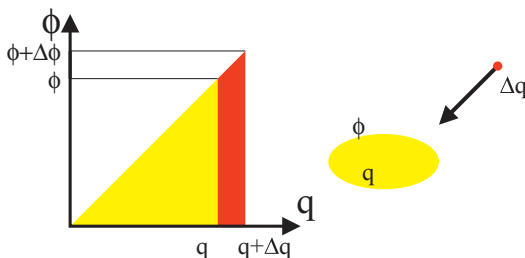


図 2.10

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{q}{\varepsilon_0 A} \right)^2 Ad = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 Ad \quad (2.53)$$

となる。ここで、 A, d はそれぞれ極板面積、極板間隔であり、 Ad は極板間の体積である。

この仕事は電場のエネルギーとして極板間の空間に蓄えられていると考えることもできる。この電場のエネルギーの密度 u_0 は

$$u_0 = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2\varepsilon_0} D^2 \quad (2.54)$$

である。

問題 2.4.14

電荷 q を持つ半径 R の導体球の周囲の空間の静電場のエネルギーを求めよ。

===== 解答 =====

導体球の外の電場は $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ である。電場のエネルギー密度は $u(\vec{r}) = (1/2)\epsilon_0|\vec{E}(\vec{r})|^2$ であるから、それを積分すると、

$$\begin{aligned} U &= \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

となる。これは、導体球をコンデンサーと考えた場合に得られる静電エネルギーと同じである。

問題 2.4.15

同心球のコンデンサーが蓄えるエネルギーを静電場のエネルギーを積分することによって求めよ。

===== 解答 =====

問題 2.4.14 の積分範囲 $R \rightarrow \infty$ を $R_1 \rightarrow R_2$ にすれば良い。

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

となる

問題 2.4.16

点電荷を平らな導体面から引き離すのに要する仕事は、点電荷とその鏡像を点電荷と見なした場合の静電エネルギーと一致しない。その理由を簡単に

述べよ。

===== 解答 =====

2 個の点電荷 $\pm q$ を $2d$ だけ離して置いた場合の静電エネルギーは点電荷 q を平らな導体面から d だけ離しておいた場合の静電エネルギーの 2 倍になっている。これは導体内では電場が 0 であり、その空間における静電エネルギーの寄与がないことから理解できる。

問題 2.4.17

平行平板コンデンサーの極板間を引き離すために必要な力を

1. 静電場のエネルギーの変化
2. 電場中の電荷に働く力

の 2 点から別々に計算せよ。もちろん、結果は同じになる。

===== 解答 =====

1. 面積 A 、間隔 d の平行平板コンデンサーの容量は $C = \varepsilon_0 A/d$ であり、電荷 Q が与えられた時の静電エネルギーは

$$U(d) = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 A}$$

である。

$$F(d) = -\partial_d U(d) = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

より力が得られる。ここで、負号は d の変化の向きと反対に力が働くことを意味している。

2. 大きさのみに着目して、議論する。電場の大きさは $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(A\varepsilon_0)$ だから、 $F = (1/2)E(\sigma A) = Q^2/(2\varepsilon_0 A)$

ここで $1/2$ は自身がつくる電場による 2 重の寄与を考慮したものである。

2.4.5 キャパシターの接続

複数のキャパシター $C_1, C_2, \dots, C_n$ を並列接続する場合、その合成容量 C は

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (2.55)$$

となる。これは、すべてのキャパシターに同じ電位差がかかることから明らかである。

複数のキャパシターの直列接続の場合、それぞれのキャパシターに貯えられる電荷は皆同じ (Q) である。一方、すべてのキャパシターに生じた電位差を加算すると、外部から与えた電位差になるので、以下の式が成り立つ。

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \quad (2.56)$$

ここで、容量の定義を用いて

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.57)$$

となる。

2.5 定常電流の性質

2.5.1 電流

電池の発明によって定常電流を得ることができるようになり、電気に関する研究は大きく発展した。電池は化学エネルギーを電気エネルギーに変換することによって、定常電流を作り出す装置である。電池の起電力は、金属原子が酸に溶け出す性質の強さに由来している。2種類の金属を同時に酸に漬けることによって、金属間に電位差が生じる。

1 モルの H^+ イオンによって運ばれる電荷を 1 F と呼び、その大きさは

$$1 \text{ F} = 1.602 \times 10^{-19} \times 6.02 \times 10^{23} = 9.64 \times 10^4 \text{ C}$$

である。

2.5.2 定常電流と電荷の保存

ある閉曲面 S を考えよう。その閉曲面で囲まれる体積の中に電荷の湧き出しや吸い込みがなければ、その閉曲面を通じて出入りする電流の総和は 0 になるはずである。すなわち、

$$\int_S \vec{i}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.58)$$

であり、微分形であらわすと、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i}(\vec{r}) = 0 \quad (2.59)$$

である。これは電荷の保存則である。

2.5.3 オームの法則

ある物体に電流が流れる時、その電流の大きさ I は電位差 $\Delta\phi$ に比例し、以下の式で表される。

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} \quad (2.60)$$

ここで、 R を抵抗と呼ぶ。これがオームの法則である。

均質な導線の電気抵抗 R は長さ l に比例し、その断面積 S に反比例する。すなわち、

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.61)$$

である。 ρ は物質や温度によって決まる定数で抵抗率と言う。また、抵抗率の逆数を伝導度と呼び、 σ で表すことが多い。また、オームの法則は一般に

$$\vec{i}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.62)$$

と表すことができる。

問題 2.5.1

電気伝導度の異なる金属（それぞれの電気伝導度を σ_1, σ_2 とする）が平面で接触し、その面に垂直に電流が流れている。この電流の電流密度を $\vec{i}$ とし、境界面に現れる電荷密度を求めよ。

===== 解答 =====

接触面に垂直な方向のみ議論する。各金属内の電場の大きさを E_1, E_2 とすると、電流は一定だから、 $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ である。電場は不連続になっているので、ガウスの法則より電荷が存在するはずである。その面密度を σ とすれば、

$$S\varepsilon(E_2 - E_1) = S\sigma$$

となる。従って、

$$\sigma = \varepsilon i \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right)$$

となる。

問題 2.5.2

太さの様な金属線がある。この金属線を 2 倍の長さに引き延ばすとその電気抵抗は何倍になるか？

===== 解答 =====

長さが 2 倍になると断面積は半分になるはずである。従って、抵抗は 4 倍になる。

2.5.4 導体中の電流の分布

電場に時間変動がない場合は、電荷が電場から受ける力は保存力になる。従って、導体中の電流分布を決定する基本法則を微分形で表すと、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i}(\vec{r}) = 0 \quad (2.63)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.64)$$

$$\vec{i}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.65)$$

となる。これに境界条件を加えて問題を解くことになる。

電荷の存在しない真空中での静電場の基本法則は

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

であった。また、導体や電極で電位が一定という境界条件も同じである。従って、 $\vec{D} \leftrightarrow \vec{i}, \sigma \leftrightarrow \varepsilon_0$ を対応させると同じ*1電場 $\vec{E}$ が得られる。

問題 2.5.3

内径と外径がそれぞれ R_1, R_2 、高さが L の金属製の円筒を同軸上に配置し、その間を電気伝導度 σ の電解質溶液で満たす。内外の円筒を電極として電流 I を流した場合の電気抵抗を以下の手順に従って求めよ。

1. 対称性から電流がどのように流れるか考察し、中心から距離 r の位置での電流密度を求めよ。
2. オームの法則を適用して、各点における電場を求めよ。
3. 電場を積分することによって、電位差を求めよ。
4. 電位差と電流から抵抗を求めよ。

===== 解答 =====

1. 電流は放射状に流れ、その強さは中心からの距離 r のみの関数となる。全電流は一定だから、電流密度の大きさは $i(r) = I/(2\pi r L)$ となる。

*1 導体表面を越えて電流が流れることはないので、導体表面の近傍では電流も電場も表面に平行になる。このような境界条件は静電場の場合には存在せず、全く同じという訳ではない。しかし、これらの違いは導体表面の近傍に限られる。

2. オームの法則により、 $E(r) = i(r)/\sigma$ となる。

3. 電位差は、

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr \\ &= \frac{I}{2\pi L\sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{I}{2\pi L\sigma} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

となる。

4.

$$R = \Delta\phi/I = \frac{1}{2\pi L\sigma} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

問題 2.5.4

厚さが一様で十分広い金属箔の中央に 2 個の電極をつなぐ。電極を通じて定常電流を流した場合の金属箔上の等電位線の概略を描け。

===== 解答 =====

電極の近傍では同心円になり、金属箔の端では直交する（電流は端に対して常に平行になっている）ことに注意して描く。

問題 2.5.5

電気伝導度 σ の電解質溶液の中に 2 個の半径 a の導体球を中心間の距離 $R \gg a$ をとって置いた。導体球間に電位差 $\Delta\phi$ をかけた時に流れる電流を考察して、抵抗を求めよ。ただし、導体球や導線の電気抵抗は電解質溶液の抵抗に比べて十分小さく無視できる。

===== 解答 =====

真空中に十分離しておいた 2 個の導体球に電荷 $\pm q$ を与えると、それらの電位は $\pm q/(4\pi\epsilon_0 a)$ となる。よって、電位差 $\Delta\phi = 2q/(4\pi\epsilon_0 a)$ である。こ

ここで $\varepsilon_0 \rightarrow \sigma, q \rightarrow I$ と置き換えれば、 $I = 2\pi\sigma a\Delta\phi$ となり、 $R = 1/(2\pi\sigma a)$ と求まる。

2.6 電流と静磁場

電気現象と磁気現象は全く別の現象と考えられていた。しかしながら、電流が磁場を作るなどの現象が発見され、これらの現象はある一つの現象（磁気現象）の異なった現れであることが分かってきた。電気と磁気が統一されて、電磁気として理解されるようになった。

2.6.1 磁石と磁場

磁石の両端には「磁極」があり、N極には正の「磁荷」S極には負の磁荷があると言う。これらの磁荷は電荷と異なり単独で取り出すことはできないが、仮にそのようなものと仮定して「単極」＝「モノポール」と言う。このモノポールにはクーロンの法則が成り立つ。すなわち、モノポール q_m と q'_m の間には次のような力が働く。

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m q'_m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.66)$$

となり、 μ_0 は真空の「透磁率」と言う。この時の磁荷の単位を「ウェーバー (Wb=J/A)」と言う。

電荷の場合と同様に「磁場」を考えることができる。電場と同様に磁場の強さ「 $\vec{H}$ 」をプローブ磁荷 q_m に受ける力 $\vec{F} = q_m \vec{H}$ によって定義する。

2.6.2 磁場中の磁石

磁石を2つのモノポール q_m と $-q_m$ を棒（長さ ℓ ）の両端に固定したものとする。この棒の方向と長さ、そして磁荷の大きさを考慮して磁石の「磁気モーメント」 $\vec{p}_m$ を定義する。 $\vec{p}_m$ は大きさが $p_m = q_m \ell$ で向きがS極が

ら N 極へ向かうベクトルとする。この磁石を磁場 $\vec{H}$ の中に入れると

$$\vec{N} = \vec{p}_m \times \vec{H} \quad (2.67)$$

の力のモーメントを受ける。力のモーメントの定義を思い出すこと。

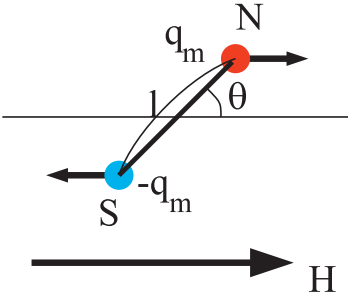


図 2.11

2.6.3 ローレンツ力

ある点において磁束密度 $\vec{B}$ がある。そこを荷電粒子 q が速度 $\vec{v}$ で通過する場合、その荷電粒子には「ローレンツ力」

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.68)$$

が働く。ローレンツ力は $\vec{v}$ に直交しており、磁束密度の下で荷電粒子が運動しても速さ（エネルギー）の変化は起きない。

さらに、電場 $\vec{E}$ がある場合には、荷電粒子は

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.69)$$

の力を受ける。さて、この粒子と一緒に動きながら粒子を観測しよう。運動する観測者からは $\vec{v} = \vec{0}$ である。言い換えると磁束密度からの力は存在し

ない。しかし、粒子に作用する力は観測者の運動にかかわらず同じはずである。観測者にとっては、粒子のところに

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

の電場があるように見える。電場と磁場（磁束密度）は別のものではなく、観測の仕方によって相互に変換されるものである。

磁束密度 $\vec{B}$ の中に置かれた電流 I が流れる長さ dl の導線に働く力 $d\vec{F}$ は、電流が導線の中の荷電粒子の運動であることから、ローレンツ力によって理解できる。導線の方向を $\vec{t}$ として、 $d\vec{l} = \vec{t}dl$ と表すことにすれば、

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (2.70)$$

となる。 $I d\vec{l} = \sum_i q_i \vec{v}_i$ であることに注意。ここで、和は長さ dl の導線中の電流を担う荷電粒子に対して行う。この法則を「フレミングの左手の法則」と言う。

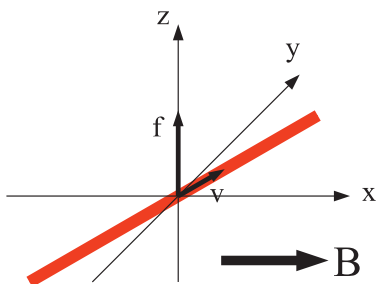


図 2.12

問題 2.6.1

サイクロトン運動：紙面に対して垂直上向き（ z 方向）に磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ のある空間に、速度 $\vec{v} = (0, v, 0)$ の粒子（電荷 $q < 0$ 、質量

m) が入射した。この荷電粒子に対するローレンツ力は常に進行方向に対して垂直で大きさが $|qvB|$ である。磁場によるローレンツ力は仕事をしないので、「運動エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2$) は一定＝速さは一定」である。すなわち、荷電粒子は「等速円運動」を行う。この円運動の半径を求めよ。また、周期を求めよ。

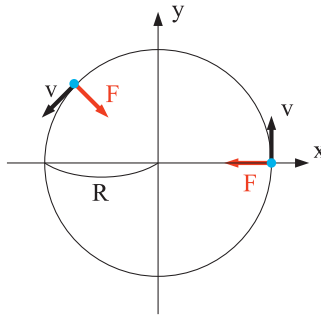


図 2.13

===== 解答 =====

この円運動の半径 R を求めよう。角速度 ω は $\frac{v}{R}$ である。等速円運動において中心方向の加速度 a は $R\omega^2$ である。これは、ローレンツ力によって生じているので、 $R\omega^2 = \frac{|q|vB}{m}$ 。以上により、半径 R と周期 $T = \frac{2\pi R}{v}$ は以下ようになる。

$$R = \frac{mv}{|q|B}, \quad T = \frac{2\pi m}{|q|B} \quad (2.71)$$

問題 2.6.2

一辺の長さが a の正方形の回路に電流 I が流れている。この回路を一様な磁束密度 $\vec{B}$ の中に置いた場合に作用する力のモーメント $\vec{N}$ を求めよ。ただし、正方形の作る面の法線の向きは、面に垂直に右ねじを置いて電流の進

む向きに回した場合にねじの進む方向であり、単位ベクトル $\vec{n}$ で表す。

===== 解答 =====

正方形の各頂点を ABCD とする。この面の法線ベクトルが z 軸と平行になるような座標系を考えると、 $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{BC} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{CD} = -a\vec{i}$, $\overrightarrow{DA} = -a\vec{j}$ とすることができる。辺 AB と辺 CD、および辺 BC と辺 DA に働く力は同じ大きさで逆向きなので、力としては相殺する。しかしながら、力のモーメント $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ を考えると $\vec{0}$ にはならない。

$$\begin{aligned}\vec{N} &= (0, -a/2, 0) \times (aI\vec{i} \times \vec{B}) + (a/2, 0, 0) \times (aI\vec{j} \times \vec{B}) \\ &\quad + (0, a/2, 0) \times (-aI\vec{i} \times \vec{B}) + (-a/2, 0, 0) \times (-aI\vec{j} \times \vec{B}) \\ &= \frac{Ia^2}{2} \left(-\vec{j} \times (0, -B_z, B_y) + \vec{i} \times (B_z, 0, -B_x) \right. \\ &\quad \left. -\vec{j} \times (0, -B_z, B_y) + \vec{i} \times (B_z, 0, -B_x) \right) \\ &= Ia^2(-B_y, B_x, 0) \\ &= Ia^2\vec{n} \times \vec{B}\end{aligned}$$

注意、ベクトル積は結合則を満たさない。すなわち、 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ である。

問題 2.6.3

幅 5 cm の長方形の回路に 0.8 A の電流を流し、一様な磁場中に回路面を磁場に対して垂直にして、半ばまで挿入した。回路には 0.02 N の引き込もうとする力が働いた。この磁場の磁束密度を求めよ。

===== 解答 =====

回路の下の方の 1 辺は磁場に垂直だから、その部分に働く力は単位長さ当たり IB で辺の長さが a だから、 $F = IBa$ 。従って、 $B = 0.02/(0.8 \cdot 0.05) = 0.5$ T である。

問題 2.6.4

一辺 a の小さな正方形の回路に電流 I が流れている。この正方形は xy 面内にあり、 xy 面には垂直にしかし大きさは一様ではない磁場がかかっている。この磁場の磁束密度の位置依存性が $\vec{B}(\vec{r})$ と表されるとして、回路に働く力を求めよ。ただし、 a は磁束密度の変化の特徴的な長さ比べて十分小さいものとする。また、正方形の各辺は軸に平行であるとする。

===== 解答 =====

xy 面内の点 $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ の近傍で、磁場は以下のように近似できる。

$$B_z(\vec{r}) = B_z(\vec{r}_0) + [\partial_x B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0}(x - x_0) + [\partial_y B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0}(y - y_0)$$

y 軸に平行な 2 辺に働く力は x 軸方向になり、それぞれ

$$\begin{aligned} & \int_{y_0-a/2}^{y_0+a/2} I B_z(x_0 + a/2, y, 0) dy \\ & \int_{y_0-a/2}^{y_0+a/2} (-I) B_z(x_0 - a/2, y, 0) dy \end{aligned}$$

である。従って、その合力 F_x は

$$\begin{aligned} F_x &= I \left(B_z(x_0, y_0, 0) + \partial_x B_z(x_0, y_0, 0) \frac{a}{2} \right) a \\ &\quad - I \left(B_z(x_0, y_0, 0) - \partial_x B_z(x_0, y_0, 0) \frac{a}{2} \right) a \\ &= I [\partial_x B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0} a^2 \end{aligned}$$

となる。同様に x 軸に平行な 2 辺に働く力は y 方向に働く力 F_y となり、

$$F_y = I [\partial_y B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0} a^2$$

となる。

問題 2.6.5

導体に電流を流しながら、電流に垂直に磁場をかけると、電流、磁場両方に垂直な方向に電場が生じる。この現象をホール効果という。ホール効果に

よる電場は

$$\vec{E} = -\frac{\vec{i} \times \vec{B}}{nq}$$

となることを確かめよ。ここで n, q は伝導を担う粒子の密度とその電荷である。

===== 解答 =====

磁束密度 $\vec{B}$ の磁場から電流密度 $\vec{i} = nq\vec{v}$ を担っている荷電粒子に働くローレンツ力は

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

である。定常状態では電流の向きに直交した方向の力は誘起される電場とキャンセルしなければならないので、その電場を $\vec{E}$ とすると、

$$\vec{0} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

である。従って、

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{\vec{i} \times \vec{B}}{nq}$$

電荷の正負に応じて電場の向きが変化することに注意。

2.6.4 ビオ-サバールの法則

強さ I の電流が流れているとき、その微少部分 $d\vec{s}$ が、そこから $\vec{r}$ だけ離れたところに作る磁場の磁束密度を $d\vec{B}$ とすると以下の式が成り立つ。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.72)$$

積分形で表すと、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{i}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (2.73)$$

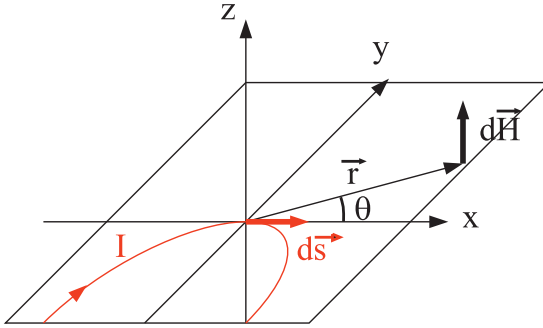


図 2.14

となる。

磁場の強さ（磁界） $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ を導入して、

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (2.74)$$

と表す場合も多い。

問題 2.6.6

無限に長い $((0, 0, -\infty) \rightarrow (0, 0, \infty))$ 直線電流による磁場を考える。導線には強さ I の電流が流れている。直線電流の微小部分 $dz \vec{k}$ が点 $(a, 0, 0)$ に作る微小磁場 $d\vec{H}$ は

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} (dz \vec{k}) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

となる。ただし、 $\vec{k}$ は z 方向の単位ベクトルである。これを積分することによって、磁場を求めよ。

===== 解答 =====

$\vec{r} = (a, 0, -z)$ を代入すれば、

$$d\vec{H}(a, 0, 0) = \frac{I}{4\pi(a^2 + z^2)}(dz(0, 0, 1)) \times \frac{(a, 0, -z)}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

となる。これを積分することによって、点 $(a, 0, 0)$ における磁場 $\int d\vec{H} = \vec{H}$ を求めることができる。 $d\vec{H}$ は x 方向の成分を持たないこと。また、積分すると z 方向の成分はキャンセルすることを念頭に、 y 方向の大きさ H のみを計算する。

$$\begin{aligned} H &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ia}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^3(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで変数変換 $z = a \tan \theta$ を用いた。以上により、 $H = \frac{I}{2\pi a}$ となる。

問題 2.6.7

半径 a の円形の回路に電流 I が流れている。この電流が円の中心 O を通り、円に垂直な直線上に作る磁界 $\vec{H}$ を求めよ。

ヒント：計算を簡単にするために、回路の中心は原点にあり、回路は xy 面内にあるものとしよう。 $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds$ を計算する。ただし、

- $\vec{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$
- $\vec{t}(\vec{r}') = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- $\vec{r} = (0, 0, z)$
- $ds = a d\theta$

として θ を 0 から 2π まで積分する。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
 \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z)}{((-a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta + z^2)^{3/2}} ds \\
 &= \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z\cos\theta, z\sin\theta, a)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\theta \\
 &= \frac{I}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z\cos\theta, z\sin\theta, a) a d\theta \\
 &= \frac{Ia^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} (0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

問題 2.6.8

長いソレノイドの両端の磁束密度は中央の磁束密度のちょうど半分になっている。対称性の観点からこれを説明せよ。

===== 解答 =====

中央部にはコイルの左右の部分から同じ大きさの寄与がある。両端では片方の寄与しかないから、磁場はちょうど半分になる。

問題 2.6.9

長さが無限と見なせる幅 a の薄い平らな導体板 (xy 面内にあり、幅は y 方向とする) に電流 I が流れている。電流密度は一様である。板の中央線上の任意の点を原点とし、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における磁界を求めよ。

===== 解答 =====

この導体を流れる電流を点 $(0, y, 0)$ を通る x 軸に沿った無限に長い電流を $-a/2$ から $a/2$ まで積分すれば良い。問題 2.6.6 より、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ の磁界の大きさは

$$|d\vec{H}| = \frac{(I/a)dy}{2\pi\sqrt{y^2 + z^2}}$$

である。向きまで考慮すると

$$d\vec{H} = \frac{(I/a)dy}{2\pi\sqrt{y^2+z^2}} \frac{(1,0,0) \times (0,-y,z)}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{I dy}{2\pi a} \frac{(0,-z,-y)}{(y^2+z^2)}$$

$\vec{H}(z)$ は

$$\vec{H}(z) = \int d\vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(0,-z,-y)}{(y^2+z^2)} dy$$

となり、 z 成分の被積分関数が奇関数の寄与は 0 になる。また、 $y = z \tan \theta, z \tan \theta_0 = a/2$ とおくと、

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= (0, -z, 0) \frac{I}{2\pi a z} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \\ &= (0, -1, 0) \frac{I\theta_0}{\pi a} \end{aligned}$$

となる。

2.6.5 円電流による磁気モーメント

中心が原点で、半径 a の円形回路に電流 I が流れている。回路によって決まる法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると、十分遠方 $\vec{r}(r \gg a)$ での磁場の強さ（磁界）は以下の式で表すことができる。

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r^3} \left(\vec{m} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} \right) \quad (2.75)$$

ここで、 $\vec{m} = IS\vec{n}$ (S は回路の面積。ここでは $S = \pi a^2$) はこの電流による磁気モーメントである*2。

計算を簡単にするために、 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ とし、 $\vec{r}$ は xz 面内のみを考えて、 $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds$ を計算する。ただし、

*2 参考書とは $\vec{m}$ の定義が異なっている点に注意。参考書は MKSA 単位系を採用しているのに対して、本講義では SI 単位系を採用している。

- $\vec{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$
- $\vec{t}(\vec{r}') = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- $\vec{r} = (x, 0, z)$
- $ds = ad\theta$

として θ を 0 から 2π まで積分する。

$$\begin{aligned}
 \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (x - a \cos \theta, -a \sin \theta, z)}{((x - a \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta + z^2)^{3/2}} ds \\
 &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(z \cos \theta, z \sin \theta, -x \cos \theta + a)}{(x^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \theta)^{3/2}} ds \\
 &\approx \frac{I \int (z \cos \theta, z \sin \theta, -x \cos \theta + a) \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ds}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

以後は成分毎に検討しよう。

$$\begin{aligned}
 H_x(\vec{r}) &= \frac{I \int_0^{2\pi} z \cos \theta \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{I\pi a^2 \frac{3xz}{x^2 + z^2 + a^2}}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{I\pi a^2}{r^3} \frac{3xz}{r^2} \\
 H_y(\vec{r}) &= \frac{I \int_0^{2\pi} z \sin \theta \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} = 0 \\
 H_z(\vec{r}) &= \frac{I \int_0^{2\pi} (-x \cos \theta + a) \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{I \int_0^{2\pi} (a - \frac{3ax^2 \cos^2 \theta}{x^2 + z^2 + a^2}) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{I\pi a^2}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \frac{-x^2 + 2z^2}{x^2 + z^2 + a^2} \\
 &\approx \frac{I\pi a^2}{r^3} \frac{-x^2 + 2z^2}{r^2}
 \end{aligned}$$

得られた近似式は式 2.75 に $\vec{n} = (0, 0, 1)$ を代入したものになっている。また、 z 軸周りに回転することによって、 y 成分が 0 でない場合も求めることができる。

2.6.6 アンペールの法則

電流の周囲に閉曲線 C を考える。その閉曲線に沿って、 $\vec{H} \cdot d\vec{r}$ を積分すると、

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} 0 & : C \text{ が電流を囲まない時} \\ I & : C \text{ が電流を右ネジの向きに一周する時} \\ -I & : C \text{ が電流を右ネジの向きと反対向きに一周する時} \end{cases} \quad (2.76)$$

となる。これを「アンペールの法則」と言う。

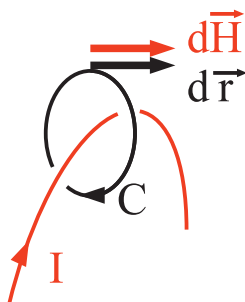


図 2.15

電流が分布している場合は、

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{i}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (2.77)$$

と表すことができる。この式にストークスの定理を適用すると、微分形の法則

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \quad (2.78)$$

が得られる。

問題 2.6.10

金属でできた半径 R の円筒に電流 I が流れている。円筒の厚さは無視できるとして、円筒の内外の磁界の大きさ $H(r)$ を求めよ。

===== 解答 =====

円筒の軸に垂直な面内の軸を中心とする半径 r の円周を考える。ここにアンペールの法則を適用する。向きは接線方向であり、大きさのみを考える。

$$H(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

問題 2.6.11

以下のベクトル場について、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ となることを確認し、 $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ から電流密度を求めよ。

1. $\vec{H} = (-A(x^2 + y^2)y, A(x^2 + y^2)x, A')$
- 2.

$$H_x = \begin{cases} A & (z > d) \\ A \frac{z}{d} & (d \geq z \geq -d) \\ -A & (z < -d) \end{cases}, H_y = A', H_z = 0$$

===== 解答 =====

- 1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -2Axy + 2Axy + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -A(x^2 + y^2)y & A(x^2 + y^2)x & A' \end{vmatrix} \\ &= (0, 0, 4A(x^2 + y^2))\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{cases} \vec{0} & (z > d) \\ (0, A/d, 0) & (d \geq z \geq -d) \\ \vec{0} & (z < -d) \end{cases},\end{aligned}$$

問題 2.6.12

無限に大きな平面上を一定の向き、一定の強さで流れる一様な電流（電流密度 j ）の作る静磁場を求めよ。

===== 解答 =====

面に垂直に z 軸を、電流の向きに x 軸を、そしてそれらに直交するように y 軸を取る。アンペールの法則を適用する経路として yz 面内の正方形を考える。各辺は y 、 z 軸に平行とする。

1. 正方形が電流が流れる平面をまたがないとき

磁場が平面からの距離に依存しても z 軸に平行な辺での寄与はキャンセルして 0 になる。今、この経路の中に電流はないからアンペールの法則より、すべての寄与はキャンセルして 0 にならないといけない。しかしながら、 y 軸に平行な辺からの寄与は磁場が平面からの距離に依存しては 0 にならない。従って、磁場の強さは平面からの距離に依存しない。なお、面を挟んで磁場の向きは逆転する。

2. 正方形が電流が流れる平面をまたぐとき

正方形の 1 辺の長さを a とすると、 $Ha - (-Ha) = ja$ となる。従って、 $H = j/2$ である。

電流の流れる平面で磁場は不連続になっていることに注意。

問題 2.6.13

単位長さ当たり n 回巻いた円筒形の非常に長いコイルに電流 I が流れている。中心に作る磁場を求めよ。

===== 解答 =====

磁場の向きは円筒の軸方向であることは明らかである。ここでは大きさのみを求めよう。積分経路としては 1 辺 a の正方形を考える。この正方形の 2 辺ははコイルの軸に平行であり、そのうち 1 辺はコイル内、もう 1 辺はコイル外にある。残りの 2 辺でのアンペールの法則での線積分はお互いにキャンセルしてなくなる。コイルの外側は磁場が 0 であるので、結局 $Ha = (na)I$ となる。従って、 $H = nI$ であることがわかる。

問題 2.6.14

無限に長い断面が半径 R の円形の導線に電流 I が流れている場合の磁場を以下の手順に従って求めよ。

1. 電流密度 $i(\vec{r})$ を求めよ。
2. ビオ-サバールの法則より磁力線には動径方向の成分がないことを説明せよ。
3. アンペールの法則より磁場の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

1. $i(\vec{r}) = \frac{I}{\pi R^2}$ である。
2. 電線の中の位置 (x, y, z) における電流の微少要素によって作られる位置ベクトル (x_0, y_0, z_0) での磁場を考える。

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi r^2} (dz \vec{k}) \frac{(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) dx dy}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}}$$

$$= \frac{i}{4\pi r^2} \frac{(-(y_0 - y), x_0 - x, 0) dx dy dz}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}}$$

この式より、磁場には z 成分が存在しないことが分る。座標軸の取り方は任意だから、点 (x_0, y_0, z_0) として $(x_0, 0, 0)$ のみを考えてそこで磁場が y 方向の成分しかないことが証明できれば十分である。その磁場は

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi r^2} \frac{(y, x_0 - x, 0) dx dy dz}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2 + z^2}}$$

となる。一方、 $(x, -y, z)$ にある微小電流要素からの磁場は

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi r^2} \frac{(-y, x_0 - x, 0) dx dy dz}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2 + z^2}}$$

である。両者を足すと、磁場は y 方向の成分しか存在しない。電流の分布は y 軸に対して対称だから、積分しても y 方向の成分がないことが分る。

3. 各点における磁場の大きさを H とすると、それは導線の中心軸からの距離 r だけの関数である。ここで、アンペールの法則を適用すると

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} \pi r^2 i & r < R \\ I & r > R \end{cases}$$

故に、

$$H(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} i r = \frac{1}{2} \frac{I}{\pi R^2} r & r < R \\ \frac{I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

となる。

2.7 ベクトル・ポテンシャル

2.7.1 静電ポテンシャルとベクトル・ポテンシャル

静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ のように静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ によって表すことが可能である。このように表すことができるのは、 $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ であることによっている*3。静電場を計算する場合、静電ポテンシャルをまず求めて、それから電場を計算する方が便利なが多い。

同様なことが静磁場にもある。ただし、静磁場の基本法則は

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.79)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (2.80)$$

である。電流があると渦なしの条件が崩れ、ポテンシャルを定義することが出来なくなる。そこで、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.81)$$

を考える。このように表すと式 2.79 は自動的に満たされるので*4、式 2.80 のみを考えれば良いことになる。ただし、この時点では $\vec{A}(\vec{r})$ が存在は証明されていない。

2.7.2 ベクトル・ポテンシャルの任意性

静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を表す静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ に定数 c を加えて、新しい静電ポテンシャル $\phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + c$ を作っても、元と同じ静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を表すことができる。

*3 すべてのベクトル場は渦無し場と渦有り場の和として表すことができることを思い出すこと。

*4 ベクトル演算の公式 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$ を思い出すこと。

同様のことがベクトル・ポテンシャルの場合にもある。すなわち、任意のスカラー関数 $\chi(\vec{r})$ に対して $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi(\vec{r})) = 0$ であるから*5、

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \quad (2.82)$$

は、 $\vec{A}$ と同じ磁場を作る。このようなベクトル・ポテンシャルの任意性のおかげで最も便利なベクトル・ポテンシャルを用いることが許される。

2.7.3 ベクトル・ポテンシャル

ベクトル・ポテンシャルが存在することを証明する。電流分布 $\vec{i}(\vec{r})$ から $\vec{A}(\vec{r})$ を決めることができれば、証明できたことになる。

式 2.80 に $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ を代入すると、

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) \quad (2.83)$$

だから、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ を仮定すると

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{i}(\vec{r}) \quad (2.84)$$

が得られる。従って、

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.85)$$

のように $\vec{A}(\vec{r})$ を求めることができる*6。

*5 ベクトル演算の公式を思い出すこと

*6 ポアソン方程式

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})$$

の解は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

で与えられる。ベクトル・ポテンシャルの場合は各成分毎にポアソン方程式を解けば良い。

次にこのようにして求めた $\vec{A}(\vec{r})$ が $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ を満たすことを示せば証明は完了する。定義に従って、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{i}(\vec{r}') \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{i}(\vec{r}') \cdot \left(-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'\end{aligned}\quad (2.86)$$

が得られる。ここで $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ であるのに対して $\vec{\nabla}' = (\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})$ とする。さらに、

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{i}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (2.87)$$

だから、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'\end{aligned}\quad (2.88)$$

となる。定常電流では電荷の保存則より $\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r}') = 0$ である。一方、第2項はガウスの定理により表面積分になり、十分大きな体積をとることによりその積分はゼロにすることができる。言い換えると、無限に大きな空間に有限の電流が分布していると無限に大きなエネルギーが必要となり、それは許されない訳である。以上により、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ が証明できた。

問題 2.7.1

以下のベクトル・ポテンシャルが作る磁場を計算せよ。

1. $\vec{A}_1 = (-By, 0, 0)$
2. $\vec{A}_2 = (0, Bx, 0)$
3. $\vec{A}_3 = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$

===== 解答 =====

どのベクトル・ポテンシャルでも同じ磁場を与える。

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_i = (0, 0, B)$$

問題 2.7.2

非常に長い線分上を流れる電流 I が点 $\vec{r}$ につくるベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ を求めよ。線分は $(0, 0, -\ell)$ から $(0, 0, \ell)$ で、 $\ell \gg r$ とする。また、このベクトル・ポテンシャルから得られる磁場を計算せよ。

ヒント：

$$\frac{d}{dx} \log \left(\sqrt{a^2 + x^2} + x \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

===== 解答 =====

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{(0, 0, 1)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz'$$

ここで、 $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}' = (0, 0, z')$ である。 $A_x(\vec{r}) = A_y(\vec{r}) = 0$ は明らかである。従って、以後 $A_z(\vec{r})$ のみを考察する。 $|x| \gg |x'|$ 、 $|y| \gg |y'|$ と $\ell \gg |z|$ より、

$$\begin{aligned} A_z(\vec{r}) &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} dz' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} [\log(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} + (z' - z))]_{-\ell}^{\ell} \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + \ell^2} + \ell}{\sqrt{x^2 + y^2 + \ell^2} - \ell} \right) \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \left(\frac{\ell \left(1 + \sqrt{1 + (x^2 + y^2)/\ell^2} \right)}{\frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\ell}} \right) \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \left(\frac{4\ell^2}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \left(\frac{2\ell}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

と近似できる。

ベクトル・ポテンシャルは z 成分しかないから、

$$B_x = \partial_y A_z(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \partial_y r = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{y}{r}$$

$$B_y = -\partial_x A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \partial_x r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{x}{r}$$

となる。ここで、 ℓ は定数としてその微分はゼロとしている。

問題 2.7.3

非常に大きな半径 R の円盤上に電荷が一様に分布している（面電荷密度は σ_0 ）。最初円盤の中心は原点にあり、やがて x 方向に速さ v_0 で動き始めた。ただし、円盤は常に xy 面上にある。動き始めた瞬間を考えよう。

1. 円盤が動くことによって電流が生じる。その面電流密度を求めよ。
2. 円盤が動くことによって生じるベクトル・ポテンシャルを求めよ。ただし、点 $\vec{r}$ ($r \ll R, z > 0$) の点について調べれば良い。
3. 求めたベクトル・ポテンシャルから磁場を求めよ。

===== 解答 =====

1. 面電荷が σ_0 で x 方向に速さ v_0 で動いているので、面電流密度 i_0 は

$$i_0 = \sigma_0 v_0$$

となる。

2. ベクトル・ポテンシャルを表す式に代入すると

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int \frac{(1, 0, 0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy'$$

$r \ll R$ より $\vec{r} = (0, 0, z)$ の場合のみを考えれば十分である。また、明らかにベクトル・ポテンシャルは y, z 成分はゼロなので、 x 成分のみを考える。

$$A_x(z) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dx' dy'$$

円筒座標を用いて $dx' dy'$ を $rd\theta dr$ に置き換えると、

$$\begin{aligned} A_x(z) &= \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} B_x(z) &= \partial_y A_z - \partial_z A_y = 0 \\ B_y(z) &= \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right) \\ &\approx -\frac{\mu_0 i_0}{2} \\ B_z(z) &= \partial_x A_y - \partial_y A_x = 0 \end{aligned}$$

問題 2.7.4

無限に長い半径 R の円筒上に電荷が一様に分布している（面電荷密度は σ_0 ）。円筒を回転させた。円筒の部分での速さを v_0 とする。

1. 円筒が回転することによって生じるベクトル・ポテンシャルを求めよ。
2. 求めたベクトル・ポテンシャルから磁場を求めよ。

===== 解答 =====

1. 半径 R の側面に密度 σ で一様に分布する電荷による電場は軸から放射状に生じ、軸からの距離が r の点における強さは $E(r) = 0$ ($r < R$)、 $E(r) = \sigma R/(\varepsilon_0 r)$ ($r > R$) である。静電ポテンシャルで表すと、

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \log R & (r < R) \\ -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \log r & (r > R) \end{cases}$$

円筒に流れる電流の軸を z 軸に取り、 $\varepsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0$, $\sigma \rightarrow I/(2\pi R)$ の置き換えを行うと、ベクトル・ポテンシャル

$$A_z(r) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log R & (r < R) \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log r & (r > R) \end{cases}$$

が得られる。

2. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ より求まる。

問題 2.7.5

ベクトル・ポテンシャルを用いてビオ-サバールの法則を導出せよ。

===== 解答 =====

x 成分について考察しよう。 y, z 成分も同様である。

$$\begin{aligned} B_x &= \partial_y \times A_z(\vec{r}) - \partial_z \times A_y(\vec{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(i_z(\vec{r}') \partial_y \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - i_y(\vec{r}') \partial_z \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(i_z(\vec{r}') \frac{-(y - y')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - i_y(\vec{r}') \frac{-(z - z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\{\vec{i}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')\}_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$

第 3 章

電磁気学 II

3.1 電磁誘導

3.1.1 閉回路を貫く磁束による起電力

閉回路を貫く時間的に変動する磁束を $\Phi(t)$ とした場合、その閉回路には

$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1)$$

の起電力が生じる。その閉回路を貫く磁束は磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ を用いて、

$$\Phi = \int_S \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \quad (3.2)$$

と表される。負号の意味は「電磁誘導によって生じる起電力によって電流が流れた場合、その電流の作る磁場は起電力の原因となった磁束の変化を減らす方向に生じる」ことを意味している。このことを特に「レンツの法則」と言うこともある。

ここで S は閉回路を境界とする任意の曲面である。 $\vec{n}(\vec{r})$ は回路の向きを決めておき、その向きに回転する右ネジの進む向きを正とするようなその曲面に対する法線ベクトルである。

ここで、 Φ は曲面の取り方に依存しないことを証明しておこう。まず、閉

回路を境界とする任意の二つの曲面 S_1, S_2 を考え、それらを貫く磁束をそれぞれ Φ_1, Φ_2 とする。

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_{S_1} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \\ \Phi_2 &= \int_{S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS\end{aligned}\quad (3.3)$$

二つの曲面をあわせたもの S は閉曲面になるので、ガウスの法則により、

$$\int_{S_1+S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS = 0 \quad (3.4)$$

である。ここで、曲面 S_1, S_2 を独立に考えた場合の法線の向きと二つを組み合わせて閉曲面を作ったときの法線の向きに注意すると、

$$\begin{aligned}& \int_{S_1+S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \\ &= \int_{S_1} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS - \int_{S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \\ &= \Phi_1 - \Phi_2\end{aligned}$$

以上により、

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (3.5)$$

となり、曲面 S の取り方に依存しないことが証明された。

3.1.2 運動の相対性

閉回路を貫く時間変動する磁束を作るには、閉回路の近くで磁石を動かせばよい。しかしながら、磁石を動かすのではなく閉回路を動かしても閉回路を貫く磁束は時間変動することになる。

ここで、ニュートン力学が相互に等速運動している観測者に対して同じように成り立つことを思い出そう。磁石と閉回路の例は、力学だけではなくす

すべての自然法則が等速運動している観測者に対して同じように成り立つことを示唆するものである。

このように相互に等速運動している観測者はすべて自然法則の前に平等であり、これらの観測者に対して自然法則は同じ形に表されなければならないという思想を物理学では受け入れている。これを相対性の原理という。

3.1.3 電磁誘導とローレンツ力

一様な z 方向の磁場 $(0, 0, B)$ 中に垂直に長方形の回路を置く。その一辺 AB (長さ ℓ) を早さ v で x 方向に動かす時を考える。導線には自由電子が存在し、それにはローレンツ力が作用する。このローレンツ力によって自由電子は y 方向に動かされ、 B の方にたまる。この荷電粒子の分布の不均衡によって $A \rightarrow B$ の向きの電界 E が生じる。この電界による電子に作用する力とローレンツ力が打ち消しあうと電子の移動はとまる。

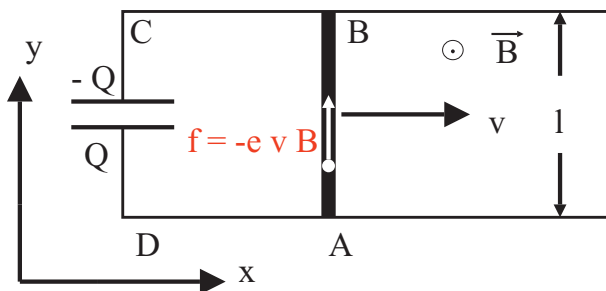


図 3.1 ローレンツ力による起電力。

すなわち、

$$E \cdot (-e) = \frac{V_A - V_B}{\ell} \cdot (-e) = vB \cdot (-e)$$

となる。このように辺 AB を動かす時に、仮想的な電界 E' が生じその電界によって自由電子が動いたと考えることもできる。その仮想的な電界による

AB 間の電圧は $= vBl$ である。すなわち、「導線を動かすことによって、起電力が生じる」と考えることができる。この起電力の原因はミクロに見ると自由電子に作用するローレンツ力である。

この場合に閉回路に生じる起電力は vBl であり、 $v\ell = dS/dt$ (S は閉回路の面積) なので、式 3.1 が成り立っている。

3.1.4 電磁誘導の法則の微分形

閉回路に生じる起電力は電界の定義により、閉回路に沿った電場を積分したものである。式で表すと、

$$\phi_{em} = \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (3.6)$$

となる。さらに電界は閉回路の有無によらず、存在することを考えると上の式の C を単なる閉じた経路を表すものとしてもよいと考えられる。

式 3.1 より、

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (3.7)$$

となる。左辺にはストークスの定理を適用し、右辺の積分と時間微分の順序を変えれば、

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (3.8)$$

となる。曲面 S は任意であるから、両辺は積分の中も等しいはずである。すなわち、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

でないといけない。以上により、電磁誘導の法則の微分形が得られた。

3.1.5 インダクタンス

相互インダクタンス

2つのコイル1,2があって、コイル1に流れる電流 I_1 によって生じる磁場によってコイル2にも磁束 Φ_2 が貫く。 Φ_2 は電流 I_1 に比例する。その比例係数を M とすると、 $\Phi_2 = MI_1$ と表すことができる。

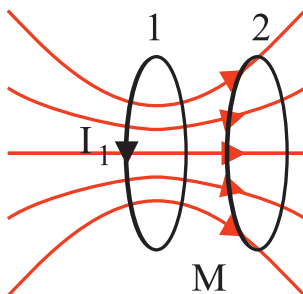


図 3.2 相互誘導現象。

ここで、 I_1 が時間的に変化する場合、 Φ_2 も時間的に変化しコイル2に誘導起電力 V_2 が生じる。

$$V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

この現象を「相互誘導」と呼び、この比例係数 M を「相互インダクタンス」と言う。

ここでは、電流の変化がゆっくりで各瞬間の磁場の大きさはその時のコイルに流れる電流と同じ大きさの定常電流によって生じる磁場の大きさと等しいと仮定している。このような電流を準定常電流という。

自己インダクタンス

相互誘導と似た現象がコイル一つだけでも起こる。コイルのある部分を通る電流によって生じた磁束がコイルの他の部分を貫き、そのために誘導起電力が生じる。この現象をコイルが一つだけで起こるので「自己誘導」と言う。誘起される起電力 V はコイルに流れる電流を I として、

$$V = -L \frac{dI}{dt}$$

となり、 L を「自己インダクタンス」と言う。インダクタンスの単位は「ヘンリー」で $H(= \frac{V \cdot s}{A})$ と表記する。

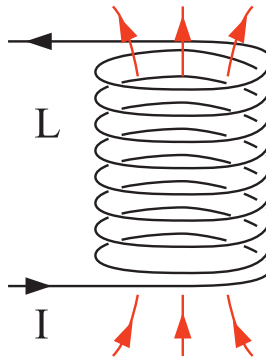


図 3.3 自己誘導現象

非常に長いソレノイドの自己インダクタンス

単位長さ当たりの巻数 n 、長さ ℓ 、断面積 S のコイルの自己インダクタンスは以下のように計算される。コイルに電流 I を流した場合、コイル内部に生じる磁束密度は、

$$B = \mu_0 n I$$

である。コイルの一巻をつらぬく磁束は BS 、コイルの巻数は $n\ell$ だから、コイル全体を貫く磁束は

$$\Phi = n\ell BS = \mu_0 n^2 \ell SI$$

となる。従って、自己インダクタンスは定義より、

$$L = \mu_0 n^2 \ell S \quad (3.10)$$

となる。

過渡応答

図のような回路を考える。スイッチを閉じて（電流が流れ始めて）からしばらくはコイルの自己誘導による起電力 $-L \frac{dI}{dt}$ により、抵抗 R にかかる電圧は電池の電圧 V より小さくなる。数式で表すと、

$$V - L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t)$$

となる。この微分方程式を解けば、

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

となる。ここで、 $\tau = L/R$ をこの回路の「時定数」と言う。

問題 3.1.1

直径 10 cm、2000 回巻のコイルを地球磁場 (5×10^{-5} T) の中で毎秒 15 回の早さで回転させた。コイルに生じる起電力を求めよ。ただし、回転の軸はコイルの中心軸とは直交している。

===== 解答 =====

適当に回転角の位相を決めると、

$$\Phi = 2000 \cdot \pi 0.05^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot 5 \times 10^{-5}$$

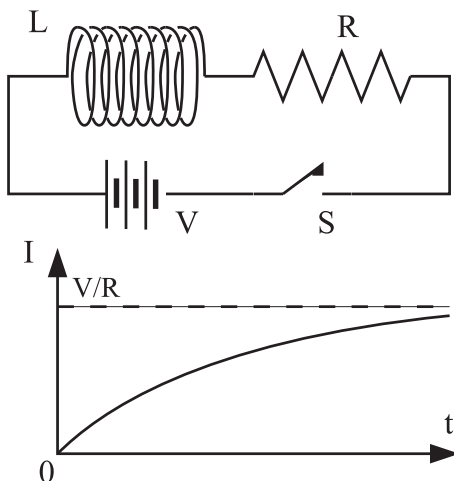


図 3.4 過渡応答

であるから、微分を行うと、

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\Phi}{dt} &= -2000 \cdot \pi 0.05^2 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{1/15}t\right) \cdot 5 \times 10^{-5} \\
 &= -7.4 \times 10^{-2} \cos(30\pi t)
 \end{aligned}$$

となる。単位は [V] である。

問題 3.1.2

電流 I が z 軸方向に流れている。 z - x 面に平行な小さな 1 巻コイル（面積は S ）を一定の早さ v で電流から遠ざけた。コイルに生じる起電力を求めよ。 x - y 面に平行なコイルの場合はどうなるか？

===== 解答 =====

z - x 面に平行なコイルの場合、電流によって生じる磁束はコイルと直交す

るので、その大きさだけを考えると、

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r(t)} S$$

となる。だから、生じる起電力の大きさ ϕ_{em} は、

$$\begin{aligned}\phi_{em} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d\Phi}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I S}{2\pi r^2} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I S}{2\pi r^2} v\end{aligned}$$

と計算できる。

一方、x-y 面に平行なコイルの場合、電流によって生じる磁束はコイルの面と平行である。従って、コイルを貫く磁束はゼロであり、誘導起電力は生じない。

問題 3.1.3

Fig. 3.1 でキャパシタの代わりに抵抗 R を接続した。(その抵抗以外の導線の抵抗は無視できるとする。)

1. 回路に流れる電流と消費される電力を求めよ。
2. 辺 AB に働く力とその力による仕事率を求めよ。

===== 解答 =====

1.

$$\begin{aligned}\phi_{em} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v \\ I &= \frac{|\phi_{em}|}{R} = \frac{B\ell v}{R}\end{aligned}$$

したがって、ジュール熱は、

$$I^2 R = \left(\frac{B\ell v}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

となる。

2.

$$f = IB\ell = \frac{B\ell v}{R} B\ell = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

したがって、仕事率は

$$fv = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

となり、ジュール熱の大きさと等しくなる。

問題 3.1.4

直径 5 cm、長さ 20 cm、2000 回巻のコイルの自己インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 n^2 \ell S \\ &= \mu_0 \frac{2000^2}{\ell^2} \ell \pi r^2 \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \frac{2000^2}{0.2^2} 0.2\pi 0.025^2 \\ &= 4.9 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

単位は [H] である。

問題 3.1.5

半径 $a_1, a_2 (a_2 > a_1)$ の 2 本の金属管により、同軸ケーブルを作った。一端には抵抗 R を、他端には電源をつなぎ電流 I を流した。

1. アンペールの法則を用いて、同軸ケーブルの内外に生じる磁界を求めよ。
2. 長さが ℓ の場合、この同軸ケーブルの自己インダクタンスを求めよ。磁束が貫く面積は $\ell \times (a_2 - a_1)$ である。

===== 解答 =====

1. 中心導体を中心として半径 r ($a_1 < r < a_2$) の円を経路として、アンペールの法則を適用する。このとき、

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

であるから、

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

となる。 $r > a_2$ の場合には、正味の電流はないので、 $B(r) = 0$ となる。

2. 回路を貫く磁束は、

$$\begin{aligned}\Phi &= \ell \int_{a_1}^{a_2} B(r) dr \\ &= \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1)\end{aligned}$$

定義より、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1)$$

となる。

問題 3.1.6

2つの細長いコイルがある。それぞれの単位長さ当たりの巻数は n_1, n_2 、長さは ℓ_1, ℓ_2 、断面積は S_1, S_2 である。コイル1の中にコイル2を重ねた場合 ($S_1 > S_2$)、コイル1と2の間の相互インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

コイル1による磁束密度は、 $B = \mu_0 n_1 I_1$ である。一方、コイル2を貫く磁束は

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= n_2 \ell_2 B S_2 \\ &= \mu_0 n_1 n_2 \ell_2 S_2 I_1\end{aligned}$$

である。したがって、定義より、

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \ell_2 S_2$$

となる。

問題 3.1.7

2つの回路がある。回路1のインダクタンスを L 、回路1と回路2の間の相互インダクタンスを M とする。回路1に変動する起電力 $\phi_1(t)$ をかけた時に回路2に生じる電圧 $\phi_2(t)$ を求めよ。

===== 解答 =====

回路1に流れる電流を I_1 とすると、

$$\begin{aligned}\phi_1(t) - L \frac{dI_1}{dt} &= 0 \\ \phi_2(t) &= -M \frac{dI_1}{dt}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\phi_1(t)$ はコイルの誘導起電力を打ち消していることに注意。したがって、

$$\phi_1(t)/\phi_2(t) = -L/M$$

となる。

問題 3.1.8

半径 a_1, a_2 の円形回路が、同一平面上に中心を同じくして置かれている。ただし、 $a_1 \gg a_2$ である。

1. 円形回路（半径 a ）に電流 I が流れている。その回路の中心の磁束密度をビオ・サバルの法則を用いて計算せよ。

ヒント： $\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0 I \vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds$ を計算する。ただし、

- $\vec{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$
- $\vec{t}(\vec{r}') = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- $\vec{r} = (0, 0, 0)$
- $ds = a d\theta$

として θ を 0 から 2π まで積分する。

2. 回路 1 に電流 I_1 を流した時に回路 2 を貫く磁束から相互インダクタンスを求めよ。
3. 円形回路（半径 a ）に電流 I が流れている。その回路は xy 平面上にあるとして、 x 軸上の十分遠方にある点での磁束密度を計算せよ。
ヒント：小問 1 と同様に計算する。ただし、 $\vec{r} = (x, 0, 0)$ で、 $x \gg a$ であることに注意。また、近似式 $(1+x)^n \approx 1+nx$, $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ (ただし、 $x \ll 1$) を用いこと。
4. 回路 2 に電流 I_2 を流した時に回路 1 を貫く磁束から相互インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

1. 円形回路の中心を原点にとると、

$$\begin{aligned} & \vec{B}(\vec{0}) \\ &= \int \frac{\mu_0 I \vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)}{\left(\sqrt{(-a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}\right)^3} I a d\theta$$

であるから、 z 方向以外の成分はゼロになる。以下 z 方向の成分 $B_z(\vec{r})$ のみを考察する。積分範囲は $0 \sim 2\pi$ である。

$$\begin{aligned} B_z(\vec{0}) &= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a}{a^3} I a d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} 2\pi \\ &= \frac{\mu_0}{2a} I \end{aligned}$$

2. コイル 1 による中心の磁束密度は、

$$B = \frac{\mu_0}{2a_1} I_1$$

である。したがって、コイル 2 を貫く磁束は

$$\begin{aligned} \phi_2 &= BS \\ &= \frac{\mu_0}{2a_1} I_1 \pi a_2^2 \end{aligned}$$

したがって、定義により、

$$M = \frac{\pi \mu_0 a_2^2}{2a_1}$$

となる。

3. 点 $(x, 0, 0)$ (ただし、 $x \gg a$) における磁束密度を考える。

$$\vec{B}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (x - a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)}{\left(\sqrt{(x - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}\right)^3} I a d\theta
\end{aligned}$$

であるから、 z 方向以外の成分はゼロになる。以下 z 方向の成分 $B_z(\vec{r})$ のみを考察する。積分範囲は $0 \sim 2\pi$ である。

$$\begin{aligned}
&B_z(\vec{r}) \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a - x \cos \theta}{\left(\sqrt{(x - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}\right)^3} I a d\theta \\
&\quad \text{since } \frac{1}{(1-x)^n} \approx 1 + nx \text{ when } x \ll 1 \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(a - x \cos \theta) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2ax \cos \theta}{x^2 + a^2}\right)}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} I a d\theta \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a - x \cos \theta + 3 \frac{a^2 x \cos \theta}{x^2 + a^2} - 3 \frac{ax^2 \cos^2 \theta}{x^2 + a^2}}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} I a d\theta \\
&\quad \text{since } \int \cos^{2n+1} \theta d\theta = 0 \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a - 3 \frac{ax^2 \cos^2 \theta}{x^2 + a^2}}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} I a d\theta \\
&\quad \text{since } x \gg a \\
&= \int \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{a - \frac{3}{2}a}{x^3} d\theta \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi a^2 I}{x^3} \\
&= -\frac{\mu_0}{4} \frac{a^2 I}{x^3}
\end{aligned}$$

4.

$$\Phi_1 = \int_0^{a_1} B_z(\vec{r}) 2\pi r dr$$

$$= - \int_{a_1}^{\infty} B_z(\vec{r}) 2\pi r dr - \int_{\text{semi-sphere}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

ここで、 $r \rightarrow \infty$ のとき $|\vec{B}(\vec{r})| \approx B(r_0) \frac{r_0^3}{r^3}$ 、 $\int_{\text{semi-sphere}} ds = 4\pi r^2$ であるから、第2項はゼロになる。

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \int_{a_1}^{\infty} B_z(\vec{r}) 2\pi r dr \\ &= - \int_{a_1}^{\infty} \left(-\frac{\mu_0}{4} \frac{a_2^2 I}{r^3} \right) 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi \mu_0 a_2^2 I}{2} \int_{a_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\pi \mu_0 a_2^2}{2a_1} I \end{aligned}$$

したがって、定義より $M = \frac{\pi \mu_0 a_2^2}{2a_1}$ となり、同じ結果を与える。

3.1.6 相互インダクタンスの相反定理

コイル1に電流を流してコイル2に生じる起電力から得られる相互インダクタンスとコイル2に電流を流してコイル1に生じる起電力から得られる相互インダクタンスは等しいことが知られている。これを相互インダクタンスの相反定理といい、以下のようにして証明される。

コイル1に流れる電流 I_1 によって作られる磁束密度はベクトルポテンシャルを用いて、

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \end{aligned}$$

と表される。コイル2を貫く磁束は

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S_2} \{\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\} \cdot d\vec{S} \\
&= \oint_{C_2} \vec{A}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{s}_2
\end{aligned}$$

である。最後の式変形にはストークスの定理を用いた。次に、 $\vec{A}(\vec{r})$ の表式を代入すると、

$$\Phi_2 = \oint_{C_2} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (3.11)$$

となる。従って、コイル 1 に電流を流した時の相互インダクタンスは

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (3.12)$$

となる。コイル 2 に電流を流した場合の相互インダクタンス L_{12} も同様に計算できて、それは上記の式の C_1, C_2 、 $d\vec{s}_1, d\vec{s}_2$ および、 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ を入れ替えたものになる。入れ替えても結果は同じなのはあきらかである。以上により、相互インダクタンスの相反定理は証明できた。

3.1.7 静磁場のエネルギー

静電界のエネルギーが単位体積当たり、

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (3.13)$$

と表されたように、静磁場のエネルギーも単位体積あたり、

$$\begin{aligned}
u_m &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\
&= \frac{\mu_0}{2} H^2
\end{aligned} \quad (3.14)$$

と表される。

コイルの中の静磁場のエネルギー

非常に長いソレノイドの内部の磁場に蓄えられる静磁場のエネルギーを計算することによって、式 3.14 を確かめて見よう。ただし、コイルの電気抵抗は無視できるものとする。

電流 $I(t)$ は $t = 0$ に $I(0) = 0$ 、 $t = t_1$ に $I(t_1) = I$ になったとする。この間電流は増加しているので、コイルの電流増を妨げるように自己誘導起電力が生じる。これに逆らって電流を流すためには外部から電位差 $\phi(t)$

$$\phi(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

をかけないといけない。この電位差の下で電荷 $I(t)\Delta t$ が移動するから、電源のする仕事は

$$\Delta W = \phi(t)I(t)\Delta t$$

となる。時刻 $t = 0$ から t_1 までにコイルにされた仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{t_1} \phi(t)I(t) dt \\ &= L \int_0^{t_1} \frac{dI(t)}{dt} I(t) dt \\ &= \frac{1}{2} LI^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、式 3.10 を L に代入すると、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell S I^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V I^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 V \end{aligned}$$

となる。ここで、 $V = \ell S$ 、 $B = \mu_0 n I$ を用いた。これで、先に示した静磁場の単位体積当たりのエネルギーが式 3.14 で与えられることが確かめられた。

3.2 回路

直流回路を拡張して、時間的に変動する電流が流れている回路を考える。

3.2.1 交流回路

時間的に $V(t) = V_0 \cos \omega t$ で振動する起電力を「交流起電力」と言う。ここで、 ω は「角周波数」、 $f = \omega/2\pi$ を「周波数」と言う。以下に抵抗 R 、コイル L 、そしてキャパシター C に流れる交流電流を考える。

抵抗

各瞬間毎にオームの法則が成り立つから、回路に流れる電流 $I(t)$ は $V(t) = V_0 \cos \omega t = RI(t)$ である。よって、

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$$

となる。

コイル

交流起電力とコイルの自己誘導起電力を足し合わせるとゼロになるので、 $V(t) - L \frac{dI}{dt} = V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$ となる。よって、

$$I(t) = \frac{V_0}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

となる。

キャパシター

交流起電力とキャパシターの両端の電圧を加えるとゼロになるので、 $V(t) - Q/C = 0$ である。よって、

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 &= C \frac{dV}{dt} \\
 &= C \frac{dV_0 \cos \omega t}{dt} \\
 &= V_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)
 \end{aligned}$$

となる。

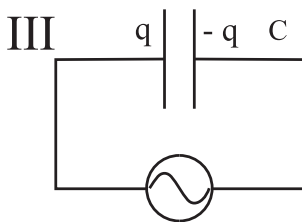
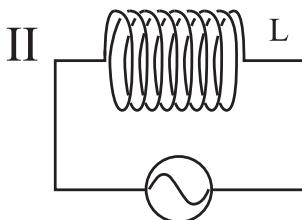
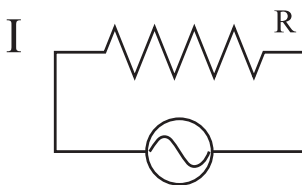


図 3.5 交流回路

実効値

抵抗 R に交流電圧 $V(t) = V_0 \cos \omega t$ をかけた場合、消費される電力 $V^2(t)/R$ の時間平均は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{V^2(t)}{R} \right\rangle_{\text{時間平均}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t dt \\ &= \frac{V_0^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \end{aligned}$$

になる。 T は周期である。「実効値」 $V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ を考えると消費される電力は $\frac{V_e^2}{R}$ と表され、直流の場合と同様になるので便利である。同様に電流の実効値 $I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ を考えることもできる。

コイルやキャパシターに交流電圧がかかる場合、そこに流れる電流の「位相」は電圧の位相と異なっている。コイルの場合は電流の位相は電圧の位相より $\pi/2$ だけ進んでいる。一方、キャパシターの場合は電流の位相は電圧の位相より $\pi/2$ だけ遅れている。このように電圧と電流の位相 ϕ が異なっている場合、その位相差の余弦 ($\cos \phi$) を「力率」と言う。交流回路で消費される電力は電圧と電流の実効値と力率を用いて、 $I_e V_e \cos \phi$ と表すことができる。特にコイルだけ、またはキャパシターだけしかない回路では力率はゼロであり、電力は消費されない。

3.2.2 電気振動

下図の回路でキャパシター C に電荷 Q_0 を蓄えた後、スイッチ S を閉じる。この時、回路に流れる電流を $I(t)$ とすると、 $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ である。ここで $Q(t)$ は各瞬間においてキャパシターに蓄えられている電荷である。

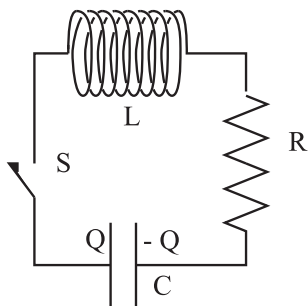


図 3.6 電気振動

回路を一周する時の起電力の総和は

$$\begin{aligned}
 0 &= L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \\
 &= L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}
 \end{aligned}$$

である。

特に $R = 0$ の場合は

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q(t)$$

となるから、電荷 $Q(t)$ は

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= Q_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \\
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}}
 \end{aligned}$$

の単振動を行う。また、抵抗がゼロでない場合の解は

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= A e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \delta) \\
 \alpha &= \frac{R}{2L} \\
 \omega' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}
 \end{aligned}$$

であり、減衰振動を行う。ここで、液体中の単振り子と比較するとコイルが「慣性」の、キャパシターが「復元力」の役を担っていることが分かる。抵抗はもちろん「抵抗」の役である。

問題 3.2.1

インダクタンスが 1 H のコイルに 1 A の電流が流れているときの磁場のエネルギーを容量 $0.1 \text{ }\mu\text{F}$ のキャパシターの電界のエネルギーに変換した。キャパシターに現れる電圧はいくらか？

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}LI^2 &= \frac{1}{2}1 \cdot 1 \\ \frac{1}{2}CV^2 &= \frac{1}{2}0.1 \times 10^{-6}V^2\end{aligned}$$

より、 $V = \sqrt{10^7} = 3.16 \times 10^3 \text{ [V]}$ になる。

問題 3.2.2

インダクタンス L の超伝導コイルに電流 I が流れていた。ところが、わずかな残留抵抗 R のために、コイルの電流は徐々に減少した。電流の時間変化を微分方程式を解くことによって求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ における電流を I_0 とする。さらに、コイルの電流がゼロになるまでに、抵抗 R で発生するジュール熱を計算せよ。また、それを、初めに蓄えられていた静磁場のエネルギーと比較せよ。

===== 解答 =====

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0$$

だから、

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

となる。積分することによって、

$$I(t) = I_0 e^{-t/T}$$

となる。ただし、 $T = L/R$ である。

抵抗で発生するジュール熱は、各瞬間におけるジュール熱を積分すれば良いので、

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^\infty RI^2 dt \\
 &= \int_0^\infty RI_0^2 e^{-2t/T} dt \\
 &= RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/T} dt \\
 &= RI_0^2 \left[-\frac{T}{2} e^{-2t/T} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{1}{2} RTI_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} LI_0^2
 \end{aligned}$$

となる。最初コイルに蓄えられていた磁場のエネルギーと等しいことに注意すること。

問題 3.2.3

問題 3.1.5 の場合、金属管の間に生じる静磁場のエネルギーを求めよ。それと先に計算した L から求めた回路のエネルギー $\frac{1}{2}LI^2$ を比較せよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\ell}{2\mu_0} \int_{a_1}^{a_2} B^2(r) 2\pi r dr \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2 \ell}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{r} dr \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1)
 \end{aligned}$$

である。一方、 $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1)$ であったから、 $U = \frac{1}{2}LI^2$ は、磁場の持つエネルギーと等しい。

問題 3.2.4

自己インダクタンスが L_1, L_2 で相互インダクタンスが M の 2 つの回路がある。

1. 回路 1 にのみ電流 I_1 を流したときに回路に蓄えられるエネルギー U_1 はいくらか?
2. コイル 1 の電流を一定に保ちながら、コイル 2 に電流を流し始める。コイル 2 の電流が I になったときに、コイル 1, 2 を貫く磁束はいくらか?
3. 誘導起電力 ϕ_2 に抗してコイル 2 の電流を 0 から I_2 まで増加するのに必要な仕事 U_2 はいくらか?
4. コイル 2 の電流が 0 から I_2 まで変化する間、誘導起電力 ϕ_1 に抗してコイル 1 の電流を I_1 に維持するために必要な仕事 U_3 はいくらか?
5. U_1, U_2, U_3 の合計を求めよ。

===== 解答 =====

1.

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

2.

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1 I_1 + M I \\ \Phi_2 &= L_2 I + M I_1\end{aligned}$$

3.

$$\phi_2 = -L_2 \frac{dI}{dt}$$

だから、

$$U_2 = - \int_0^T \phi_2 I dt$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^T -L_2 \frac{dI}{dt} I dt \\
&= \int_0^{I_2} L_2 I dI \\
&= \frac{1}{2} L_2 I_2^2
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
U_3 &= - \int_0^T \phi_1 I_1 dt \\
&= - \int_0^T -M \frac{dI}{dt} I_1 dt \\
&= M I_1 \int_0^{I_2} dI \\
&= M I_1 I_2
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
U_1 + U_2 + U_3 &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \\
&= \frac{1}{2} (I_1, I_2) \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

問題 3.2.5

以下の回路において抵抗がゼロの場合を考える。

1. キャパシターに蓄えられる最大のエネルギーを求めよ。そのときのコイルに蓄えられているエネルギーはいくらか?
2. コイルに蓄えられる最大のエネルギーを求めよ。そのときのキャパシターに蓄えられているエネルギーはいくらか?

===== 解答 =====

1.

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

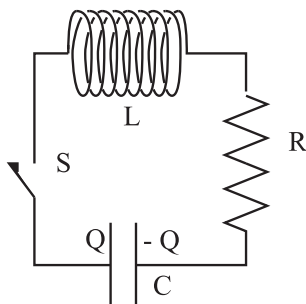


図 3.7 電気振動

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \frac{dQ}{dt} \\
 &= -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \\
 &= I_0 \sin(\omega_0 t + \delta)
 \end{aligned}$$

であるから、 $\omega_0 t + \delta = n\pi$ の時に、コンデンサーに蓄えられているエネルギーは最大 $\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ になる。このとき、コイルの電流はゼロであるから、コイルに蓄えられているエネルギーはゼロである。

2. 同様に考えると、 $\omega_0 t + \delta = \pi/2 + n\pi$ の時に、コンデンサーの電圧はゼロになり、コイルに流れる電流は最大になるので、そのとき

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} L I_0^2 &= \frac{1}{2} L (\omega_0 Q_0)^2 \\
 &= \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} L \frac{1}{LC} Q_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}
 \end{aligned}$$

となる。

問題 3.2.6

キャパシター C 、抵抗 R 、スイッチ S が直列回路を構成している。最初キャパシターには電荷 Q_0 が蓄えられていた。

1. スイッチを閉じた後のキャパシターの電圧、抵抗に流れる電流を求めよ。
2. 抵抗 R で発生するジュール熱と最初キャパシター C に蓄えられていたエネルギーを比較せよ。

===== 解答 =====

1.

$$\frac{Q}{C} + RI = 0$$

だから、

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

となる。この微分方程式を解けば、

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/T}$$

ただし、 $T = CR$ である。キャパシターに現れる電圧は Q/C 、抵抗に流れる電流は $-\frac{Q_0}{T} e^{-t/T}$ である。

2.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty RI^2 dt &= R \left(\frac{Q_0}{T} \right)^2 \int_0^\infty -e^{-2t/T} dt \\ &= R \left(\frac{Q_0}{T} \right)^2 \left[-\frac{T}{2} e^{-2t/T} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} R \frac{Q_0^2}{T} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \end{aligned}$$

となり、最初キャパシターに蓄えられていたエネルギーに等しい。

3.2.3 複素インピーダンス

サブセクション 3.2.1 で示したように回路にコイルやキャパシターがある場合は微分方程式を解けば、回路の振る舞いを知ることができる。しかしながら、微分方程式を解くのは大変なので以下のような考えに従って複素インピーダンスを導入すると便利である。

交流起電力が

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.15)$$

と与えられている場合を考える。この起電力によって生じる電流や電荷も同じ振動数で振動するであろう。従って、

$$\begin{cases} I(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta) & (3.16a) \\ Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \gamma) & (3.16b) \end{cases}$$

となる。位相は異なる可能性があることに注意。そして、次のような複素数の関数を作る。

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(t) = \phi_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = \tilde{\phi}_0 e^{i\omega t} & (3.17a) \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}_0 = \phi_0 e^{i\alpha} \quad (3.17b)$$

$$\begin{cases} \tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \beta)} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t} & (3.17c) \end{cases}$$

$$\tilde{I}_0 = I_0 e^{i\beta} \quad (3.17d)$$

$$\begin{cases} \tilde{Q}(t) = Q_0 e^{i(\omega t + \gamma)} = \tilde{Q}_0 e^{i\omega t} & (3.17e) \end{cases}$$

$$\tilde{Q}_0 = Q_0 e^{i\gamma} \quad (3.17f)$$

これらの関数の実数部は物理的に意味がある式に一致する。これらの関数が解くべき微分方程式を満たしていると仮定しよう。例えば、

$$L \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + R\tilde{I}(t) + \frac{\tilde{Q}}{C} = \tilde{\phi}(t)$$

などである。ここで、実数部と虚数部に分けると、

$$\begin{aligned} \{L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q}{C}\} + i\{L\frac{dI'(t)}{dt} + RI'(t) + \frac{Q'}{C}\} \\ = \phi(t) + i\phi'(t) \end{aligned}$$

となる。 L, R, C はすべて実数だから $\{\}$ の中は実数であり、右辺と左辺でそれぞれの実数部と虚数部が等しくないといけない。従って、まず複素数の関数を用いて問題を解いた後、その実数部分のみを取り出せば物理的に意味のある解を得ることができる。

強制振動の解

微分方程式

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q}{C} = \phi(t) \quad (3.18)$$

を解いてみよう。これは、図 3.6 に交流起電力を直列に入れた回路の振る舞いを決定する微分方程式である。

$$\frac{d\tilde{Q}(t)}{dt} = i\omega\tilde{Q}_0e^{i\omega t} = \tilde{I}_0e^{i\omega t}$$

であるから、 $i\omega\tilde{Q} = \tilde{I}$ となる。同様に、 $\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = i\omega\tilde{I}_0e^{i\omega t}$ になるので、解くべき微分方程式は

$$i\omega L\tilde{I} + R\tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{i\omega C} = \tilde{\phi}$$

となる。すべての項に共通な $e^{i\omega t}$ は落としている。もう少し式変形して、

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{Z}} \quad (3.19)$$

$$\tilde{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (3.20)$$

が得られる。

R が小さい場合、 ω を変化させるとある特定の周波数で $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ となる。このとき、 $\tilde{Z}$ は小さな値になり、大きな電流が流れることになる。これは、振動子の共鳴と同じ現象である。式 3.20 の括弧の中がゼロになる周波数を共鳴周波数 ω_0 と呼び、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.21)$$

である。

$\tilde{Z}$ のことをインピーダンスと呼び、これを用いると交流回路でも直流回路に適用できたキルヒホッフの法則のような様々な解法が適用できるようになる。

3.3 マクスウェルの方程式と電磁波

3.3.1 変位電流

交流回路にキャパシターが入っている場合を考えよう。キャパシター以外の部分ではアンペールの法則が成立する。ところが、キャパシターの電極間では通常の電流（伝導電流）は流れておらず、伝導電流だけを考えるのなら、アンペールの法則が成立しない。

ここで電流の概念を拡張して、「変位電流」を導入する。変位電流の密度は $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ で与えられる。ここで、 D は電束密度である。

平行平板コンデンサーの変位電流

平行平板コンデンサー（面積 S 、間隔 d ）の場合を考えよう。このキャパシターに電荷 Q が蓄えられている場合に、回路に流れる電流は $I = -\frac{dQ}{dt}$ である。符号は図の x 方向を基準に考える。一方、電極間の電束密度の大きさは $D = -\frac{Q}{S}$ であるから、電流を電束密度で表すと、 $I = S \frac{\partial D}{\partial t}$ となる。すなわち、キャパシターの極板間の仮想的な電流の密度は $I/S = \frac{\partial D}{\partial t}$

である。

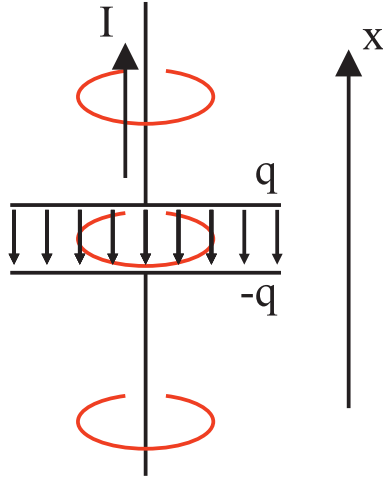


図 3.8 変位電流

アンペールの法則の拡張

直流電流によって生じる磁場を与える法則として、アンペールの法則

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{i}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (3.22)$$

があった。変位電流も含めて、変動する電流と磁場の関係を与えるものとして、アンペールの法則を

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \left\{ \vec{i}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{S} \quad (3.23)$$

のように拡張する。

また、上の式の微分形はストークスの定理を適用して、

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left\{ \vec{i}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} \quad (3.24)$$

と得られる。

準定常電流

3.1.5 において定常電流の考えを導入した時、変位電流に対する考察は全くされていなかった。ここで、準定常電流の準定常の意味を考えて見よう。

交流回路における通常の電流と変位電流の大きさを比較してみよう。導体内部での電界が

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin \omega t$$

と時間変化すると仮定する。通常の電流の密度は電気伝導度を σ として、

$$\vec{i}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}_0 \sin \omega t$$

となる。一方、変位電流の密度は、

$$\vec{i}_d(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \vec{E}_0 \cos \omega t$$

となる。変位電流が通常の電流に対して無視できる条件は、

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sim 10^{18} \text{ s}^{-1}$$

となる。従って、周波数がよほど高くない限り、準定常電流を仮定し変位電流を無視しても問題ない。

問題 3.3.1

振幅 E_0 、周波数 $f = \omega/2\pi$ の振動電界がある。変位電流密度の最大値を求めよ。

1. $E_0 = 1 \text{ } \mu\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ 、 $f = 10^6 \text{ s}^{-1}$ の電波の場合。
2. $E_0 = 2 \times 10^6 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ 、 $f = 10^{15} \text{ s}^{-1}$ のレーザー光の場合。

===== 解答 =====

変位電流は以下の式で求めることができる．

$$\begin{aligned}\vec{i}_d &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0 \cos \omega t \\ &= -\varepsilon_0 \omega \vec{E}_0 \sin \omega t\end{aligned}$$

1.

$$(8.85 \times 10^{-12})(2\pi \times 10^6)(1 \times 10^{-6}) = 5.6 \times 10^{-11}$$

となる．単位は [A] である．

2. 同様に、

$$(8.85 \times 10^{-12})(2\pi \times 10^{15})(2.0 \times 10^6) = 1.1 \times 10^{11}$$

となる．単位は [A] である．

問題 3.3.2

銅と石英ガラスに、振動電界がかかっている．伝導電流と変位電流の比を求めよ．ただし、銅の電気伝導度 (σ) は $5.8 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ 、石英ガラスのそれは $10^{-15} \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ とする．

ただし、変位電流と伝導電流の大きさの比は

$$\frac{\varepsilon_0 \omega E_0}{\sigma E_0} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$$

である．

1. 振動数 50 s^{-1} の場合．
2. 振動数 10^{10} s^{-1} の場合．

===== 解答 =====

1. 銅の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 50}{5.8 \times 10^7} = 4.8 \times 10^{-17}$$

石英の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 50}{10^{-15}} = 2.8 \times 10^6$$

2. 銅の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 10^{10}}{5.8 \times 10^7} = 9.6 \times 10^{-9}$$

石英の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 10^{10}}{10^{-15}} = 5.6 \times 10^{14}$$

石英の場合、変位電流が支配的になることに注意。

問題 3.3.3

早さ v で右向きに運動している荷電粒子による変位電流を図を用いて考察せよ。変位電流の概略はどのように表されるか? また、進行方向に垂直で荷電粒子を含む平面の磁場はどのようなになるか?

===== 解答 =====

時刻 $t = t - \Delta/2$ の荷電粒子の位置とそれによる電場をオレンジ色で、時刻 $t = t + \Delta/2$ の荷電粒子の位置とそれによる電場を赤色で表すと図のようになる。

変位電流はその定義に戻って考えれば、図より明らかである。また、磁場は変位電流の様子が分かれば、明らかであろう。

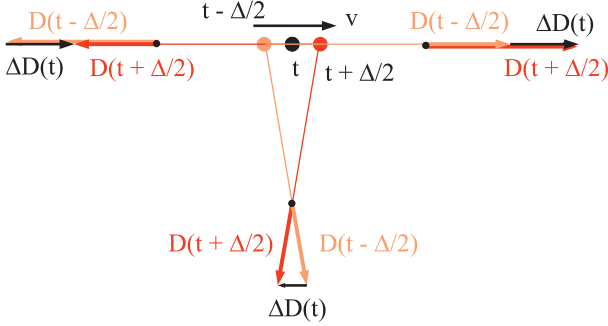


図 3.9 運動している荷電粒子による電束電流の考察

3.3.2 マクスウェルの方程式

積分形

基本法則を整理しよう。

- ガウスの法則： $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\text{S 中にある真電荷})$
- 電磁誘導： $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- 磁気に関する法則： $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
この法則は電荷の場合のガウスの法則に対応。
- アンペールの法則： $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \sum_j I_j + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

以上 4 つの式をまとめて、マクスウェルの方程式と言う。これらに

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} & (3.25a) \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} & (3.25b) \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} & (3.25c) \end{cases}$$

を組み合わせれば、電磁氣的現象を統一的に説明することができる。

微分形

物理現象を近接作用の観点から理解しようとしたとき、物理法則を微分形で表現したほうが理解しやすい。マクスウェルの方程式の微分形は、ガウスの定理とストークスの定理を用いると、先のマクスウェルの方程式を次のような微分形で表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.26a) \\ (3.26b) \\ (3.26c) \\ (3.26d) \end{array}$$

式 3.26d の両辺の発散をとると、左辺は恒等的にゼロになる。

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{H}\}}_{=0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ここに、時間微分と空間微分を入れ替えて式 3.26a を代入すると、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.27)$$

となる。この式は電荷が保存されることを意味している。すなわち、電荷密度が変化するときには、それに見合った電流が流れ込んでいることを示している。

変数と式の数

マクスウェルの方程式にあらわれる変数は、電界と磁場の x, y, z 方向の成分で計 6 個である。一方、マクスウェルの方程式は成分に分解すると、計 8 個あるようにみえる。この点について考察しよう。

式 3.26d の両辺の発散をとると、左辺は恒等的にゼロになる。

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{H}\}}_{=0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

次に、式 3.27 を用いて、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{i}$ を消去し、 $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ は $\partial/\partial t$ と $\vec{\nabla} \cdot$ の順序を入れ替えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho(\vec{r}, t)\} = 0$$

となる。言い換えると、ある関数 $F(\vec{r})$ を用いて、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho(\vec{r}, t) = F(\vec{r})$$

となる。これは、初期条件として、式 3.26a が成立するならば、その後電磁場が変化しても、常に式 3.26a が成立することを意味している。よって、式 3.26a は式の数と変数の数を検討するときに、考えなくてよい。同様のことが式 3.26b にも成立するので、変数 6 に対して式が 6 こあることになる。

3.3.3 電磁場のエネルギー

式 3.26d と $\vec{E}$ 、式 3.26c と $\vec{H}$ の内積をとると、

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} &= 0 \\ \vec{E} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} &= \vec{E} \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

2 つの式の差をとると、

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{E}\} - \vec{E} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{H}\} \\ = -\vec{E} \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right\}}_{u(\vec{r}, t)} \quad (3.28)$$

と、

$$\vec{H} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{E}\} - \vec{E} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{H}\} = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\{\vec{E} \times \vec{H}\}}_{\vec{S}(\vec{r}, t)} \quad (3.29)$$

を用いると、

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) = -\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (3.30)$$

となる。

各項の意味を考えてみよう。静電界のエネルギー密度は $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ で、静磁場のエネルギー密度は $\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$ (式 3.14 参照) で表された。これらの式が時間変動する電界、磁場にも適用できると考えると、 u は電界と磁場、すなわち電磁場のエネルギー密度を表していることになる。

右辺の $\vec{E} \cdot \vec{i}$ は単位体積中の荷電粒子が電界から受ける単位時間当たりの仕事である。ローレンツ力は荷電粒子の運動方向と垂直に作用するので、磁場は荷電粒子に仕事をしないことを考えると、右辺は単位体積中の荷電粒子が電磁場から受ける単位時間当たりの仕事になる。電磁場から考えるとそれだけのエネルギーが電磁場から、なくなっていくことを示している。

$\vec{S}$ の意味を考えるに当たって、式 3.30 と式 3.27 の類似性に注目しよう。式 3.30 の $u, \vec{S}$ と式 3.27 と $\rho, \vec{i}$ が対応している。そのように考えると、 $\vec{S}$ は電磁場のエネルギーの流れに相当することがわかる。この式を導きだした人の名前をとって、このベクトルはポインティング・ベクトル (Poynting vector) と呼ばれている^{*1}。

^{*1} 電磁場の単位体積当たりの運動量は $\vec{S}/c^2$ によって表される。詳しくは参考文献 [2] を見ること。

問題 3.3.4

半径 R の円形の平行平板キャパシターに最初電荷 Q_0 が蓄えられていた。外部に回路（具体的には、抵抗 R_0 ）をつなぎ、時刻 t に電流 $I(t)$ が流れたとする。準備として、時刻 t における回路の電流 $I(t)$ を求めよう。微分方



程式

$$\frac{Q(t)}{C} = R_0 I(t)$$

を解けば良い。ただし、

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

であることに注意。答えは

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

となる。ここで、 $\tau = RC$ 、 I_0 は時刻 $t = 0$ における電流である。

1. 極板間に生じる変位電流密度を求めよ。
2. 極板間に生じる磁束密度を求めよ。
3. 極板間に生じるポインティング・ベクトルを求めよ。
4. 極板間に生じるポインティング・ベクトルにより、極板間から抜け出す電磁場のエネルギーを求めよ。極板間の距離を D とする。
5. 抵抗 R_0 は長さ ℓ の抵抗線である。キャパシターとこの抵抗をつなぐ導線の抵抗は無視できるとして、抵抗線の周囲のポインティング・ベクトルを求めよ。ただし、抵抗線の長さ ℓ に対して十分近くの様子を考察する。

6. 抵抗のない導線の周囲にできるポインティング・ベクトルは、導線から十分遠方でゼロになることを示せ。
7. エネルギー保存の観点から、回路全体の周囲のポインティング・ベクトルの振る舞いを考察せよ。

===== 解答 =====

1. 変位電流の密度は $I(t)/\pi R^2$ となる。
2. アンペールの法則より、

$$\mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I(t) = 2\pi r B(r, t)$$

となるから、

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I(t)$$

となる。

3. 電界は面に垂直で大きさは

$$\frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2}$$

一方、磁束密度は円周方向に大きさ

$$\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I(t)$$

である。したがって、ポインティング・ベクトルの向きは放射状外向きになって、その大きさは、

$$\begin{aligned} \frac{r}{2\pi R^2} I(t) \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} &= -\frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{r}{(\pi R^2)^2} Q(t) \frac{dQ(t)}{dt} \\ &= -\frac{1}{4\varepsilon_0} \frac{r}{(\pi R^2)^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $Q(t)$ は時間の増加に伴って減少する関数だから、全体としては正になっていることに注意。

4. 極板間から抜け出すエネルギーを計算するために、円周方向と極板方向に積分すると、

$$\begin{aligned}
 & D \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4\varepsilon_0} \frac{R}{(\pi R^2)^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} R d\theta \\
 &= -D \frac{1}{4\varepsilon_0} \frac{R}{(\pi R^2)^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} R 2\pi \\
 &= -D \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\pi R^2} \frac{dQ^2(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

となる。極板方向の積分は長さ D をかけることに対応する。ここで計算した量は単位時間あたりにエネルギーが抜け出す割合になっていることに注意すること。したがって、時刻 $t = 0$ から $t = \infty$ までに抜け出すエネルギーを求めるためには、時間に関して積分を行わないといけない。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty -D \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\pi R^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{D}{\varepsilon_0 \pi R^2} \int_0^\infty \frac{dQ^2(t)}{dt} dt \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{C} \int_0^\infty dQ^2(t) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Q^2(0)}{C}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $C = \varepsilon_0 \pi R^2 / D$ を用いている。

5. 導線の周囲の磁場はアンペールの法則より、

$$B(r, t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t)$$

である。一方、電界は導線に沿って生じている。導線のすぐ外側の電界も導線に対して並行になっていると期待される。また、電界の大きさは、

$$E(r, t) = \frac{R_0 I(t)}{\ell}$$

となる。ポインティングベクトルの大きさ S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\mu_0} E(r, t) B(r, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{R_0 I(t)}{\ell} \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \end{aligned}$$

となる。また、その向きは導線に向かって入って来る向きになっている。

導線全体で単位時間に入って来るエネルギーを求めるために、積分を行うと

$$\begin{aligned} \int S d\ell r d\theta &= \int \frac{1}{\mu_0} E(r, t) B(r, t) d\ell r d\theta \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{R_0 I(t)}{\ell} \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \ell r 2\pi \\ &= R_0 I^2(t) \end{aligned}$$

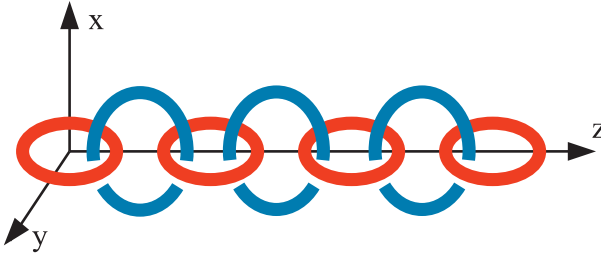
となる。

6. 抵抗が存在しないので、導線に沿って電界は生じない。電界が存在しなければ、ポインティングベクトルもゼロである。
7. コンデンサーの極板の間から抜け出したポインティングベクトルが空間を通過して、抵抗に戻って来るようになっている。

3.3.4 電磁波

微分形のマクスウェルの方程式の 3 番目の式 3.26c より、磁場が変化すると電場が発生する。この発生した電場がさらに時間変化すると、今度は同じく 4 番目の式 3.26d より磁場が発生する。するとまた、電場が発生し、... と空間中を伝わる波 = 「電磁波」が生じる。

電荷も電流もない真空中を伝わる波を考える。これらの条件を数式で表すと、 $\rho = 0$ 、 $\vec{i} = \vec{0}$ 、 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ 、そして $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ である。よって、マクス



ウェルの方程式は電界 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ だけで表せ、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

となる。ここで z 方向に伝わる平面波を考えると、すべての量は z と t だけの関数であるから、マクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\implies \partial_z E_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \partial_t \vec{H} &\implies \begin{cases} -\partial_z E_y &= -\mu_0 \partial_t H_x \\ \partial_z E_x &= -\mu_0 \partial_t H_y \\ 0 &= -\mu_0 \partial_t H_z \end{cases} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 &\implies \partial_z H_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &\implies \begin{cases} -\partial_z H_y &= \varepsilon_0 \partial_t E_x \\ \partial_z H_x &= \varepsilon_0 \partial_t E_y \\ 0 &= \varepsilon_0 \partial_t E_z \end{cases}\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\partial_A B = \frac{\partial B}{\partial A}$ と略記している。 $\partial_z E_z = 0$ 、 $\partial_t E_z = 0$ より、 E_z は z にも t にもよらない定数である。ここでは静電場は考慮していないので、 $E_z = 0$ と結論づけることができる。同様にして $H_z = 0$ が結論できるので、電磁波は「横波」であることがわかる。

ここで、 $\vec{E}$ の方向を x 方向にとると、定義より $E_y = 0$ である。この $E_y = 0$ と上記の方程式を合わせて、

$$\partial_t H_x = 0, \quad \partial_z H_x = 0$$

が得られる。すなわち、 $H_x = 0$ となり $\vec{H}$ は y 成分だけを持つ。

結局、マクスウェルの方程式は以下のように簡略できる。

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \\ H_z &= 0 \\ E_y &= 0 \\ H_x &= 0 \\ \partial_z E_x &= -\mu_0 \partial_t H_y \\ -\partial_z H_y &= \varepsilon_0 \partial_t E_x \end{aligned}$$

最初の 2 式は横波であることを示し、第 3,4 式は波に伴う電界と磁場の変動方向が直交していることを表している。最後の 2 つの方程式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \text{と} \frac{\partial}{\partial z} \text{の順序を入れ替えると、} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \text{を} -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \text{に置き換えて} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}$$

となるが、これらは早さが $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ の波動方程式である。

すなわち、マクスウェルの方程式より

$$E_x = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c_0} \right)$$

$$E_y = 0$$

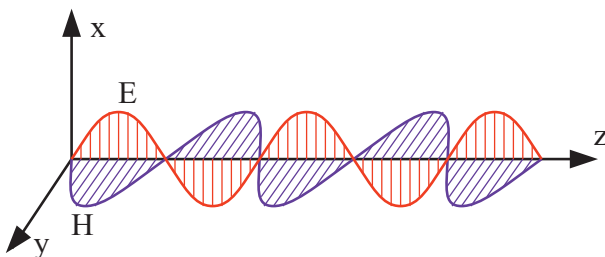
$$E_z = 0$$

$$H_x = 0$$

$$H_y = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c_0} \right)$$

$$H_z = 0$$

となる波＝「電磁波」の存在が予言される。この予言はマクスウェルのによって最初になされ、ヘルツによってその存在が確認された。ただし $\frac{H_0}{E_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ である。



光速

SI 単位系では、光速は 2.99792458×10^8 [m/s] と定義されている。真空中の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] も定義なので、真空中の誘電率 ε_0 [F/m] も一意的に決まってしまう。

3.3.5 ベクトル解析を応用した電磁波の方程式の導出

マクスウェルの方程式から波動方程式を導出するときに、まず平面波を仮定して導出した。ここでは、ベクトル解析の手法を用いて、一般の場合の波

動方程式を導出しよう。

真空中のマクスウェルの方程式は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.31a) \\ (3.31b) \\ (3.31c) \\ (3.31d) \end{array}$$

となる。まず、式 3.31c の両辺に $\vec{\nabla} \times$ を作用させると、

$$\vec{\nabla} \times \{ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \} + \vec{\nabla} \times \left\{ \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} = 0 \quad (3.32)$$

左辺第 1 項はベクトル解析の公式と真空であること ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$) より、 $-\nabla^2 \vec{E}$ になる。一方、式 3.31d を時間で微分して空間と時間の微分の順序を変えれば、第 2 項は $\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E}$ となる。以上により、

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.33)$$

が得られる。これは、波動方程式になっている。

3.3.6 電気双極子の振動による電磁波

正の電荷と負の電荷がそれぞれ、 $(0, 0, z_0 + \Delta \cos \omega t)$ と $(0, 0, -z_0 - \Delta \cos \omega t)$ にある。このときに放出される電磁波について考察しよう。

z 軸方向では、電界は常に z 方向を向いている。電荷の運動に伴う電流は z 軸方向に流れるから、磁場は z 軸の周りにできる。もし、電磁波が z 軸方向に伝搬すると仮定すれば、その進行方向と電界の向きが一致することになり、電磁波の条件を満たさない。従って、 z 軸方向に電磁波は伝搬しない。

一方、 x 軸方向に進む電磁波を仮定した場合、電界の向きは z 軸方向、磁場の向きは y 方向、そして仮定により、電磁波の進行方向は x 軸であるので、電磁波の存在条件を満たしている。よって、電磁波は x 軸方向に伝搬す

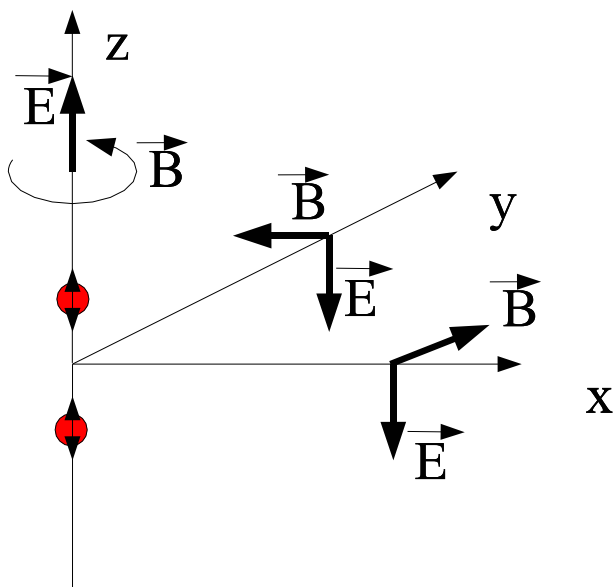


図 3.10 電気双極子の振動による電磁波

ることができる。なお、対称性により、 z 軸方向に垂直な方向には一様に電磁波は伝搬する。

電磁波はエネルギーを荷電粒子から無限速に運ぶので、荷電粒子の運動を継続するためにはエネルギーの供給が必要である。あるいは、荷電粒子に外力を与えて運動させないと、その運動はいつか止まってしまう。では、原子の中の電子の運動はどうだろうか？この疑問が量子力学を生んだ。

問題 3.3.5

電界の振幅が 0.1 Vm^{-1} の電磁波において、磁束密度の振幅はいくらか？
また、ポインティング・ベクトルの大きさはいくらか？

===== 解答 =====

$$\frac{H_0}{E_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

より、

$$\begin{aligned} H_0 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \\ &= \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} 0.1 \\ &= 2.7 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

となる。単位は [A/m] である。磁束密度は、

$$\begin{aligned} B_0 &= \mu_0 H_0 \\ &= 3.3 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

となる。単位は [T] である。また、ポインティングベクトルの大きさは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 &= 0.1 \cdot 2.7 \times 10^{-4} \\ &= 2.7 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

となる。単位は [W/m²] である。

問題 3.3.6

次のような z 軸方向に進む 2 つの電磁波（電界ベクトルは x 軸方向）がある。

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_2(z, t) &= E_0 \cos(-kz - \omega t) \end{aligned}$$

重ね合わせによって生じる電磁場はどのようなものか？

===== 解答 =====

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_1(z, t) + E_2(z, t) \\ &= E_0 (\cos(kz - \omega t) + \cos(-kz - \omega t)) \\ &= 2E_0 \cos kz \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(z, t) &= B_0 \cos(kz - \omega t) - B_0 \cos(-kz - \omega t) \\ &= 2B_0 \sin kz \sin \omega t \end{aligned}$$

となる。磁束の変化する向きは y 軸方向である。磁束密度の符号はポインティングベクトルが z 軸向きであることから決まる。

合成された波は定常波になっていることに注意。

問題 3.3.7

次の式を満たすベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r}, t)$ を導入しよう。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\partial_t \vec{A} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

このとき、電荷も電流もない真空中の Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{A} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} \end{aligned}$$

のように還元されることを示せ。

===== 解答 =====

真空中の Maxwell の方程式は、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

であった。それぞれ $\vec{A}$ を用いて検討しよう。

第1式の左辺は、 $\vec{A}$ を用いて書くと

$$\vec{\nabla} \cdot (-\varepsilon_0 \partial_t \vec{A}) = -\varepsilon_0 \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

となる。すなわち、第1式は $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ならば、成立する。

第2式の左辺は、 $\vec{A}$ を用いて書くと $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ となる。この式はベクトル演算の公式より、恒等的にゼロになる。言い替えると、 $\vec{A}$ を導入すると第2式は必要なくなる。

第3式は、 $\vec{A}$ を用いて書くと

$$\vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{A}) = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

となる。この式は恒等的に成立する。言い替えると、 $\vec{A}$ を導入すると第3式は必要なくなる。

第4式は、 $\vec{A}$ を用いて書くと

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \partial_t (-\varepsilon_0 \partial_t \vec{A})$$

となる。左辺は公式より変形できて、

$$\frac{1}{\mu_0} \left(-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right) = \partial_t (-\varepsilon_0 \partial_t \vec{A})$$

となる。ここで、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ から、最終的に、

$$\nabla^2 \vec{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A}$$

と等価になる。

3.4 物質中の電界と磁場

電磁場と物質の相互作用を考察する。電束密度と磁束密度を定義しなおすことによって、真空中と同じ形式の基本方程式が成立する。

3.4.1 誘電体

電界中に絶縁体を入れると、その表面に電荷が現れる。この現象を「誘電分極」と言い、その電荷を「分極電荷」と呼ぶ。簡単に誘電分極が起こる理由を説明しておこう。

誘電分極が起こる機構としては、大別して2種類ある。

1. 絶縁体の構成要素（原子や分子）が電気双極子を持っている場合。外部から電界が作用していないとき、この電気双極子は乱雑な方向を向いているために、巨視的にみると（物質全体としては）電気双極子は存在しないように見える。しかしながら、外部から電界が作用とすると、全体的に原子や分子の双極子が電界の方向を向き、外部からもその存在が明らかになる。
2. 絶縁体の構成要素（原子や分子）が電気双極子を持っていない場合。この場合は電界が作用していないとき、原子や分子を見ても電気双極子は存在しない。ところが、このような原子や分子を電界中におくと、負の電荷を持つ電子は電界の小さい方に引き寄せられ、正の電荷を持つ原子核は電界の大きいほうへ引き寄せられる。このために、正負の電荷の重心位置がずれることになる。すなわち、電気双極子が誘起されたことになる。

誘電体を入れたキャパシター

同型のキャパシターの一方には誘電体を入れ、もう一方は真空のままにしておく。この時、誘電体を入れたキャパシターの容量は真空のままのキャパシターに比べて、大きくになる。これは誘電体の分極電荷によって、電極間に生じる電場が実効的に小さくなるからである。

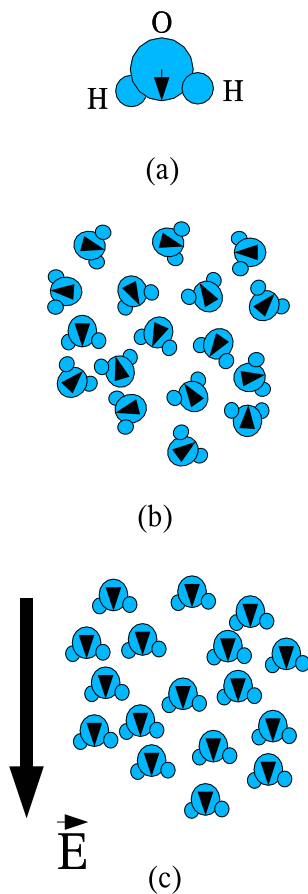


図 3.11 分極した分子と電界中の振る舞い。(a) 典型的な分極した分子である水分子の模式図。電子分布が非対称なので、電気双極子になっている。(b) 電界がかかっていない状態。(c) 電界がかかっている状態。

3.4.2 分極と電束密度

誘電分極を起こした絶縁体内から分極の方向に長さ ℓ 、断面積 S の円柱を切り出したと考える。この時、この円柱の断面に現れる電荷の密度が σ

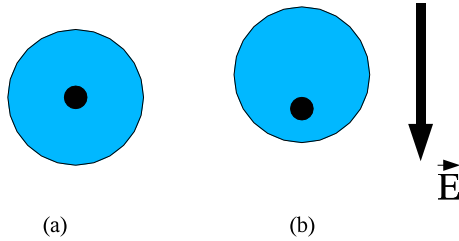


図 3.12 「原子」の電界中の振る舞い。(a) 電界がかかっていない状態。(b) 電界がかかっている状態。正電荷と負電荷の空間分布の重心がずれて、電気双極子モーメントを持っている。

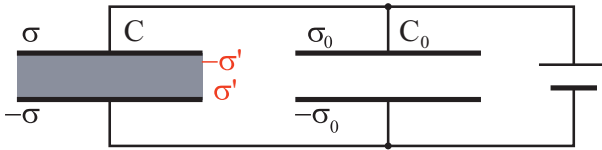


図 3.13 誘電体を入れたキャパシター。

になったと仮定する。正負の電荷の重心のズレを $\vec{u}$ 、また正の電荷の密度を ρ とすると、 $\sigma = \rho|\vec{u}|$ になる。ここで大きさが σSl で向きが分極の方向を持ったベクトルを考え、この円柱の「双極子モーメント」と呼ぼう。分極の強さを表すためには、単位体積あたりの「双極子モーメント」を用い、これを「誘電分極」、「電気分極」または「分極ベクトル」と呼ぶ。分極ベクトルは、

$$\vec{P} = (\rho \vec{u} Sl) / (Sl) = \rho \vec{u} \quad (3.34)$$

である。電界が位置の関数だったり、物質が一様でなかったりする場合には、 $\vec{P}$ は位置 $\vec{r}$ の関数のなることに注意。

誘電体中の閉曲面 S を考え、分極が生じた場合その曲面の内側から外側に動く電荷を考察する。先ほどの $\vec{u}$ を用いると、 $\int_S \rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$ となる。 $\vec{P}$ の定義により、この電荷は $\int_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$ となる。この閉局面 S 内の電荷は最初ゼロ

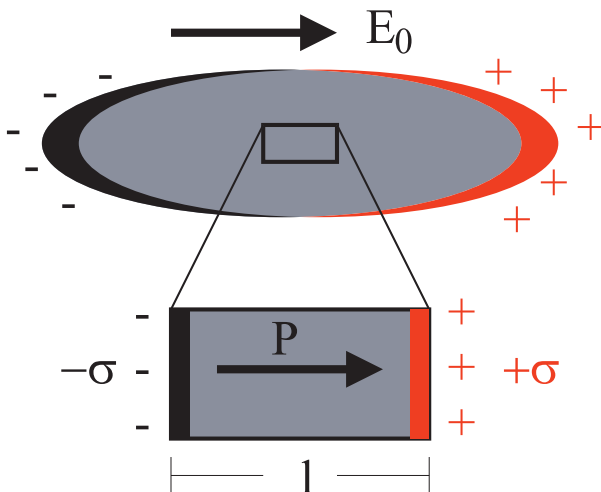


図 3.14 誘電分極と分極ベクトル。

であったので、分極が起こった後に残る電荷 Q_P は

$$Q_P = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (3.35)$$

となる。分極は正負の電荷の重心のズレ、または電気双極子を持った分子の向きがそろうことによって生じるので、分極電荷はかならず正負が組になって現れ、物質全体ではその和はゼロになる。それに対して分離できる通常の電荷を真電荷と呼ぶ。

式 3.35 に対してガウスの定理を適用すると、分極電荷の密度 $\rho_P(\vec{r})$ と分極ベクトル $\vec{P}$ の間の関係が得られる。

$$\rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (3.36)$$

物質中のガウスの法則では、分極電荷も考慮しないといけない。微分形で書くと、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \{ \rho(\vec{r}) + \rho_P(\vec{r}) \}$$

となる。 $\vec{P}$ を使って変形すると、

$$\vec{\nabla} \cdot \{\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})\} = \rho(\vec{r})$$

となる。物質中の電束密度ベクトルとして、

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

を定義すると、物質中のガウスの法則は、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (3.37)$$

となり、真空中と同じ形になる。

通常、分極は電界に比例する。また、多くの物質（等方性物質）では電場に比例するだけでなく、方向も一致する。すなわち、

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

となる。ここで、 χ_e をその誘電体の電気感受率と言う。 χ_e を使うと、

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi_e) \vec{E}$$

となり、電束密度は電界に比例することになる。そこで、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e \quad (3.38)$$

を定義して、その物質の誘電率という。当然、

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (3.39)$$

となる。また、真空の誘電率 ε_0 と ε の比を比誘電率と呼ぶ。

物質中の静電界の基本法則のまとめ

物質中の静電界の基本法則は、

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) & (3.40a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 & (3.40b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) & (3.40c) \end{cases}$$

にまとめられる。式 (c) は電束密度と電界の関係式を与える。

3.4.3 静電界の境界条件

電界の境界条件

電界に関する境界条件を考えるために、図 3.15 のように境界上の点 $\vec{r}_1$ をとる。

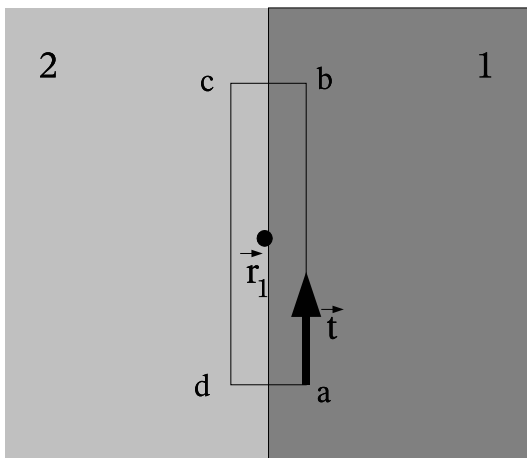


図 3.15 電界の境界条件

その周囲を囲む境界面にまたがった経路 $abcd$ を考えて、式 3.40b の積分形 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ を適用する。

$$\begin{aligned} & \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{ab} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{cd} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{bc} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{da} \vec{E} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

bc と da の経路はいくらでも小さくできるので、無視することにする。また、経路 ab と cd では $\vec{E}$ は一定と見なせるので、

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{E}_1 \cdot \vec{t} \Delta s - \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \Delta s \\
 &= \{ \vec{E}_1 \cdot \vec{t} - \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \} \Delta s \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\vec{t}$ は境界面に平行な単位ベクトルである。従って、

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \quad (3.41)$$

の関係が成り立たないといけなない。

電束密度の境界条件

電束密度に関する境界条件を考えるために、図 3.16 のように境界上の点 r_1 をとる。

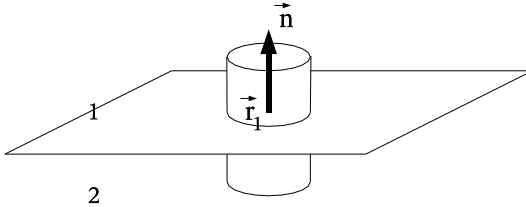


図 3.16 電束密度の境界条件

その点を含む境界面にまたがった円筒を考えて、式 3.40a の積分形 $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$ を適用する。ここで境界面上に真電荷はないとすれば、右辺はゼロである。円筒の高さを十分小さくすれば、側面を通過する電束はゼロに近づけることができる。従って、物質 1 側の上面 S_1 を通過する電束密度と物質 2 側の下面 S_2 を通過する電束密度だけを考えれば良い。それぞれは、

$$\begin{aligned}
 \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \{ \vec{D}_1 \cdot \vec{n} \} \Delta S \\
 \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= -\{ \vec{D}_2 \cdot \vec{n} \} \Delta S
 \end{aligned}$$

となる。この和がゼロになるのだから、

$$\{\vec{D}_1 \cdot \vec{n} - \vec{D}_2 \cdot \vec{n}\} \Delta S = 0$$

である。従って、

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n} \quad (3.42)$$

の関係が成り立たないといけない。

問題 3.4.1

分極の生じる第 1 の機構について考察する。分子を 2 こ「原子 A,B」が結合したものとする。2 原子の中心間の距離は 0.1 nm で、この「分子」の電気双極子モーメントの大きさは、 5×10^{-30} Cm であった。どの程度の電荷の移動が「原子 A,B」間にあっただろうか？

===== 解答 =====

双極子モーメントの定義より、移動した電荷を q 、移動距離を ℓ とすると、

$$\begin{aligned} p &= q\ell \\ 5 \times 10^{-30} &= q \cdot 0.1 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

となる。この式より、 q を解くと 5×10^{-20} [C] になる。電子の持つ電荷 1.60×10^{-19} と比較すると、約 30 % の電荷の移動があったことがわかる。

問題 3.4.2

分極の生じる第 2 の機構について考察する。原子を正電荷 $= q$ の点電荷と、それを中心とする半径 a の球内に一様な負電荷（合計は $-q$ ）からなると考えよう。ただし、負電荷の分布は変化しないとする。

1. 正の点電荷が負電荷の中心から長さ u だけずれたとき、正の点電荷にはどのような力が働くか？
2. この「原子」に一様な電界（その大きさは E ）をかけた。正電荷の位置と負電荷の中心の位置のズレはいくらになるか？正電荷と負電荷に作用する力のバランスを考慮して求めよ。

3. 分極率を求めよ。

===== 解答 =====

1. 分布した負電荷のつくる電界は、ガウスの定理より、

$$4\pi u^2 \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi u^3 \rho$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi a^3}$$

より、

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \vec{u}$$

となる。したがって、正の点電荷に作用する力は、

$$q\vec{E} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \vec{u}$$

となる。

2. 力のバランスを考えると、

$$q\vec{E}_{ext} - q\vec{E}(u) = 0$$

$\vec{E}_{ext}$ を x 軸の正の向きにとると、

$$qE_{ext} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} u$$

したがって、

$$qu = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{q} qE_{ext}$$

となる。

3. 仮想的な 1 原子の分極は

$$p = qu = \alpha E$$

である。したがって、 $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$ となる。

問題 3.4.3

半径 a の誘電体球に一樣な分極 $\vec{P}$ が生じた。球内部の電界を求めよう。
ただし、 $|\vec{u}| \ll a$ である。

1. 原点を中心とする半径 a の球内に一樣に分布する電荷（密度は ρ ）が球内の点 $\vec{r}$ に作る電界 $\vec{E}(\vec{r})$ を求める。
2. 中心が $\vec{u}/2$ の一樣な正電荷の球状の分布（半径 a 、電荷密度 ρ ）と中心が $-\vec{u}/2$ の一樣な負電荷の球状の分布（半径 a 、電荷密度 $-\rho$ ）の作る電界 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めよ。
3. $\vec{E}(\vec{r})$ を分極ベクトル $\vec{P}$ を用いて、表せ。

===== 解答 =====

1.

$$4\pi r^2 \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \frac{\vec{r}}{r}$$

より、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$$

となる。

2.

$$\begin{aligned} \vec{E}_+(\vec{r}) &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{u} \right) \\ \vec{E}_-(\vec{r}) &= \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} \left(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{u} \right) \end{aligned}$$

であるから、ベクトル和をとると、

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{u} \right) \\ &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{u} \end{aligned}$$

となる。

3.

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

となる。

問題 3.4.4

電気感受率の概算を行おう。電気双極子モーメント p を持つ分子が電界 $\vec{E}$ の中に置かれた場合、電気双極子が電界の方向を向く場合と逆向きになる場合のエネルギーの差は、 $2pE$ である。統計力学より、温度 T で熱振動する分子の平均のモーメントは $\bar{p} \sim p \frac{2pE}{k_B T} = \frac{2p^2}{k_B T} E$ である。ここで、 k_B はボルツマン定数である。単位体積中に分子が N 個あるとする。ただし、誘電体の分子による電界は小さいとして、外部からかけられる電界を分子も感じるものとして計算せよ。

1. 電気感受率は

$$\chi_e \sim \frac{2Np^2}{k_B T}$$

となることを示せ。

2. 温度が 300 K で、分子の電気双極子モーメントが 5×10^{-30} Cm のとき、 $\varepsilon/\varepsilon_0 - 1$ はどの程度か？分子の平均間隔は 0.5 nm である。また、 $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ JK⁻¹ である

===== 解答 =====

1. $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ で、 $\vec{P} = N \bar{p} = N \frac{2p^2}{k_B T} \vec{E}$ であるから、 $\chi_e = N \frac{2p^2}{k_B T}$ となる。

2.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 = \frac{\chi_e}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2Np^2}{k_B T} / \varepsilon_0 \\
 &= \frac{2(0.5 \times 10^{-9})^{-3} (5 \times 10^{-30})^2}{1.38 \times 10^{-23} \cdot 300} / \varepsilon_0 \\
 &\sim 11
 \end{aligned}$$

となる。

問題 3.4.5

厚さ 0.1 mm、比誘電率 2.3 の誘電体がある。容量 0.1 μF のコンデンサーを作るために必要な極板面積はいくらか？

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
 C &= \varepsilon' \varepsilon_0 \frac{S}{d} \\
 &= 2.3 \cdot 8.85 \times 10^{-12} \frac{S}{0.1 \times 10^{-3}} \\
 &= 0.1 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

より、 $S = 0.49 \text{ [m}^2\text{]}$ でなければならない。

問題 3.4.6

誘電率 ε の薄い誘電体板を電界中に置いた。電界と誘電体板の法線のなす角を θ として、誘起される分極電荷密度を求めよ。

===== 解答 =====

誘電体内の電界の法線成分を E'_n とすると、 $\vec{D} \cdot \vec{n}$ が連続であると言う境界条件は、

$$\varepsilon E'_n = \varepsilon_0 E \cos \theta$$

となる。誘電体表面の分極電荷密度は分極ベクトルの法線成分に等しいから、

$$\begin{aligned} \sigma_P &= P_n \\ &= \varepsilon E'_n - \varepsilon_0 E'_n \\ &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E \cos \theta \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ を用いていることに注意。

問題 3.4.7

誘電率 ε の一様な誘電体中に電界 $\vec{E}$ がある。空洞を作ったときの電界 $\vec{E}'$ の強さを求めよ。

1. 電界の方向に平行な細長い棒状の空洞。
2. 電界の方向に垂直な薄くて広い円盤状空洞。
3. 球状の空洞。

===== 解答 =====

1. 表面に誘起される表面分極電荷の大きさは一定であるが、空洞の長さはいくらでも長くすることができる。したがって、誘起された電荷による電界はゼロ、すなわち、電界の強さは同じになる。

2. $\vec{D} \cdot \vec{n}$ が連続であるという境界条件より、 $\vec{E}' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \vec{E}$ となる。
3. 真空中に誘電体球をおく場合を考えよう。誘電分極による電界は、 $-\vec{P}/3\varepsilon_0$ である。真空中の様な電界を $\vec{E}$ とすれば、誘電体中の電界 $\vec{E}'$ は以上 2 つのベクトルの和になり、

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

となる。一方、定義より、

$$\varepsilon \vec{E}' = \varepsilon_0 \vec{E}' + \vec{P}$$

であるから、

$$\vec{E}' = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \vec{E}$$

となる。

問題は真空と誘電体の役割を逆にすれば良いので、 ε と ε_0 を入れ換えて、

$$\vec{E}' = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \vec{E}$$

となる。

問題 3.4.8

平行平板キャパシターに誘電率 ε の誘電体をいれた。このキャパシターに蓄えられている電荷 Q_0 は一定である。

1. 誘電体がある場合とない場合の極板間の電界の様子を示し、容量の比を求めよ。
2. 極板間から誘電体を引き出すために必要な力はいくらか? 極板は 1 辺 L の正方形で辺に平行に誘電体を動かす。なお誘電体も 1 辺 L の正方形で、その厚さは極板間の距離 d に等しい。

===== 解答 =====

1. 図は省略。ただし、分極電荷のために、誘電体中（電極間）の電界は弱くなることを図示すれば良い。
容量比は $\varepsilon/\varepsilon_0$ で大きくなる。
2. 誘電体の位置を x とすると、

$$C = \frac{L}{d} ((L-x)\varepsilon + x\varepsilon_0)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{(\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x)L}$$

である。力は、

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial}{\partial x} U(x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{dQ^2}{L} (\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x)^{-2} (\varepsilon - \varepsilon_0)(-1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{L (\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x)^2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \\ &= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x} U(x) \end{aligned}$$

となる。

問題 3.4.9

誘電率 ε の誘電体球（半径 a ）を一様な電界 $\vec{E}_0$ の中においた。球に生じる電気双極子の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

誘電分極により、球の内部には反電場 $-\vec{P}/3\varepsilon_0$ が生じる。したがって、誘電体球内部の電界は、 $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{P}/3\varepsilon_0$ となる。一方、定義より、 $\varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ であるから、

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \vec{E}_0$$

となる。よって、球全体の双極子モーメントは、

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{3}a^3\vec{P} &= \frac{4\pi}{3}a^3\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E}_0 \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}a^3\vec{E}_0\end{aligned}$$

となる。

3.4.4 磁性体

物質が磁場の影響で磁気双極子を持つようになる現象のことを、物質の磁化と言う。単位体積当たりの双極子モーメントの和を磁化ベクトルと呼ぶ。誘電体の場合と同様に磁化の原因としては、2種類考えることができる。

1. 物質の構成要素（原子や分子）が磁気双極子を持っている場合。その磁気モーメントの起源は通常電子の持つ磁気モーメントである。外部から磁場が作用していない場合、この磁気双極子は乱雑な方向を向いているために、巨視的にみると（物質全体としては）双極子は存在しないように見える。しかしながら、外部から磁場が作用とすると、全体的に原子や分子の双極子が磁場の方向を向き、外部からもその存在が明らかになる。
2. 物質の構成要素（原子や分子）が磁気双極子を持っていない場合。磁場が作用していない場合は、原子や分子を見ても磁気双極子は存在しない。ところが、このような原子や分子を磁場中におくと、磁気双極子を持つようになる。しかしながら、この場合、生じる磁気モーメントは磁場と逆向きになる。

通常の物質は第1の機構が第2の機構に勝り、磁場をかけるとその方向に磁気モーメントがあらわれる。このような物質のことを常磁性を示す物質という。まれには、第2の機構しか働かない物質もあり、反磁性を示すという。

強磁性という性質を示す物質もある。例えば、鉄やニッケルである。この場合、磁場中において非常に大きな磁気モーメントを示す。これは、先の二つの機構とは異なった量子力学的な効果の現れである。この場合、磁区と呼ばれる領域で原子の磁気モーメントが磁場がない時にも揃っている。この磁区の大きさは光学顕微鏡で見ることができる程度であり、多数の原子を含んでいる。マクロな鉄やニッケルの固まりでは、磁区毎の磁気モーメントの向きはランダムなので、磁場がないときは外部に磁気モーメントは現れない。ところが、磁場をかけると磁区の磁気モーメントの向きが揃うので、外部に大きな磁気モーメントが現れる。永久磁石はこの磁区のモーメントが磁場のない状態でも揃うように工夫した物質である。

完全反磁性を示す超伝導体については、3年生の固体物理の講義で説明があるのでしよう。

3.4.5 物質中の静磁場の基本法則

長岡の電磁気学 II では、磁化電流を導入してアンペールの法則から物質中の静磁場の基本法則を「導出」している。この磁化電流の起源は曖昧なので、以下のように、静磁場の基本法則を考えることにする。

物質中では磁化が存在する場合もあるので、直接磁束密度と電流密度を結びつけることはできない。そこで、磁束密度 $\vec{B}$ から磁化 $\vec{M}$ の効果を差し引いた磁界 $\vec{H}(\vec{r})$ を

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r}) \quad (3.43)$$

と定義して、形式的に

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r})$$

が成立するようにする。ここで、 $\vec{j}(\vec{r})$ は磁化電流ではない「本当」の電流で

ある。^{*2}

強磁性体ではない通常の磁性体では、弱い磁場の下で磁化ベクトルはかけられた磁場に比例する。そこで、

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}) \quad (3.44)$$

と表し、磁化率 χ_m を定義する。磁束密度と磁界の間には

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \mu_0 \{1 + \chi_m\} \vec{H}(\vec{r}) \\ &= \mu \vec{H}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

という関係が成り立つ。ここで、 $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ を透磁率と言う。通常の物質では $\mu \approx \mu_0$ と考えて良いことがほとんどである。この点が誘電率 ε と大きく異なる。

静磁場の基本法則のまとめ

静磁場の基本法則は

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) & (3.46a) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 & (3.46b) \end{cases}$$

とまとめられる。

^{*2} この式は単位系として EB 対応を採用した場合である。EH 対応の場合には

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \{\vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r})\}$$

である。ここでは $\vec{M}$ の定義が異なっており、

$$\vec{M}(\text{EH}) = \mu_0 \vec{M}(\text{EB})$$

である。SI 単位系では EB 対応の $\vec{M}$ を用いるのが通常である。EH 対応と EB 対応についての詳細は文献 [3] を参考のこと。EB 対応を用いて講義を行うので、長岡の教科書と対比する場合は注意のこと。

3.4.6 静磁場の境界条件

物質中の静電界の境界条件を求めた方法と同様にして、

$$\vec{H}_1(\vec{r}) \cdot \vec{t} = \vec{H}_2(\vec{r}) \cdot \vec{t} \quad (3.47)$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot \vec{n} \quad (3.48)$$

が得られる。

問題 3.4.10

問題 4 で温度 300 K における電気感受率の大きさの程度を見積もった。同様にして、磁性体の磁気感受率率 μ を求め、真空の透磁率 μ_0 との比を求めよ。ただし、分子の磁気双極子モーメントを $8.0 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ 、分子間隔を 0.5 nm とする。

===== 解答 =====

磁束密度 B (単位は T) 中の磁気モーメント μ (単位は $\text{Am}^2 = \text{JT}^{-1}$) のもつエネルギーは μB である。従って、

$$\frac{2(0.5 \times 10^{-9})^{-3} (8 \times 10^{-24})^2}{1.38 \times 10^{-23} \cdot 300} \mu_0 = 3.1 \times 10^{-4}$$

問題 3.4.11

薄い平面板を面に垂直に一樣に磁化した板磁石がある。単位体積当たりの磁化の大きさは M である。板内部と外部における磁界と磁束密度を求めよ。ただし、対称性から板に対して平行な成分はゼロになることも説明せよ。

この問題は以下のように理解することができる。仮想的に磁荷（単極磁石）を考えると、この問題はキャパシターにおける電荷を磁荷に置き換えたものと同じである。コンデンサーの外部に電界は存在しないのと同じように、今の問題では板磁石の外には磁界は存在しない。

===== 解答 =====

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ である。もしも、 $\vec{B}$ に板に並行な成分が存在すると、 $\vec{M}$ も水平方向の成分を持つ必要がある。しかしながら、これは仮定に反する。したがって、垂直方向の成分のみを考察すれば良い。

板磁石の内部では $B_{in} = \mu_0(H_{in} + M)$ 、外部では $B_{out} = \mu_0 H_{out}$ である。また、境界条件は $B_{in} = B_{out}$ で、この値を B とする。

$H_{out} = \frac{1}{\mu_0} B$ と $H_{in} = \frac{1}{\mu_0} B - M$ が得られる。他に磁石は存在しないので $B = 0$ すると、

$$\begin{aligned} H_{out} &= 0 \\ H_{in} &= -M \end{aligned}$$

が得られる。

問題 3.4.12

一様な磁化ベクトル $\vec{M}$ (単位体積あたり) を持つ棒磁石を 2 本用意する。一つの磁石の N 極ともう一方の S 極を十分近づけた時、法線方向の磁束密度は連続であるので、隙間に生じる磁束密度 $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ となる。

1. 磁極の面積を S として、磁極間に働く力を求めよ。

===== 解答 =====

1. 磁石の間の空間に蓄えられている磁場のエネルギー $U(x)$ は、 x を磁石間の距離として、

$$U(x) = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S x$$

となる。これを x で偏微分すれば、力 F を求めることができる。したがって、

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial}{\partial x} U(x) \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} B^2 S \end{aligned}$$

となる。

問題 3.4.13

ある原子の磁気双極子モーメントは $9.5 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$ で、密度は $3 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ であった。すべての原子の磁気双極子モーメントが揃っている場合、この物質の磁化ベクトルはいくらになるか？

===== 解答 =====

$$\mu_0 9.5 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{28} = 3.6 \times 10^{-1}$$

単位は $[\text{T}](\text{Wb}/\text{m}^2)$ である。

問題 3.4.14

完全反磁性体の内部では、磁束密度はゼロである。このことと磁束に関する境界条件を考慮して、一様な磁界中に置かれた球形の完全反磁性体周辺の磁束密度の様子を図示せよ。

===== 解答 =====

球に垂直な磁束密度成分は存在しないことに注意して図を描くこと。

3.5 変動する電磁場と物質

3.5.1 物質中のマクスウェルの方程式

真空中と異なり、物質中では磁化電流や分極電荷の移動に関わる「電流」を考慮しないといけない。静磁場の基本法則について考察した場合と同様に、分極や磁化を取り入れた電束密度と磁界を次のように導入する。

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) & (3.49a) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) & (3.49b) \end{cases}$$

そして、以下のマクスウェルの方程式が物質中で成立するとして、議論を進める。

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) & (3.50a) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 & (3.50b) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 & (3.50c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \partial_t \vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) & (3.50d) \end{cases}$$

時間変動する電磁場を考える場合、静的な電磁場と違って物質の時間応答の遅れを考慮する必要がある。そのために以下の式が成り立たないこともある。

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, t) &= \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{M}(\vec{r}, t) &= \chi_m \vec{H}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

3.5.2 誘電体中の振動電界

誘電体中の振動電界の振る舞いを調べるために、誘電体をモデル化した原子の集合と考える。このモデル原子は、中心の質量の大きな原子核とそれにバネでつながれた電子の複合体と考える。原子核の質量は大きいので、電子の運動に比べて原子核の運動は無視できるとする。

バネ定数を k とすれば電界のない場合の運動方程式は、電子の変位を $\vec{u}$ として

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + k \vec{u} = \vec{0} \quad (3.51)$$

となる。電子は固有振動数 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ を持つことになる。ここに、振動電界 $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ をかけると、

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + k \vec{u}(t) = -e \vec{E}_0 \cos \omega t \quad (3.52)$$

となり、外力の加わった振動子の運動方程式と同じ形になる。交流回路で学んだ微分方程式の解法を用いて、 $\vec{u} = \vec{u}_0 \cos \omega t$ とおいて式変形すると、

$$(-m\omega^2 + k) \vec{u}(t) = -e \vec{E}_0 \cos \omega t$$

となる。従って

$$\vec{u} = \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} \quad (3.53)$$

となる。1 分子に z この電子があるとすれば、1 分子に生じる分極 $\vec{p}$ は、

$$\vec{p} = -ze \vec{u} \quad (3.54)$$

$$= \alpha(\omega) \vec{E} \quad (3.55)$$

ただし、

$$\alpha(\omega) = \frac{ze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.56)$$

で、これが分子の分極率である。ここで注目すべき点は振動電界 $\vec{E}$ の振動数 ω が電子の固有振動数 ω_0 に近いところで、分極が非常に大きくなる点である。

マクロな物質でも、外部から与えられる電界が分子にもそのまま作用すると考えると、(この近似は分極の効果が小さい時に正しい) 単位体積中の分子の数 N を式 3.55 にかけて、

$$\vec{P} = N \vec{p} = \chi_e \vec{E} \quad (3.57)$$

ただし、

$$\chi_e(\omega) = \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.58)$$

となる。 χ_e は電気感受率である。そして、誘電率も周波数依存性を持ち、

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.59)$$

となる。周波数 $\omega = \omega_0$ で関数は発散するが、これは電子の運動における抵抗の効果を考えていないからである。

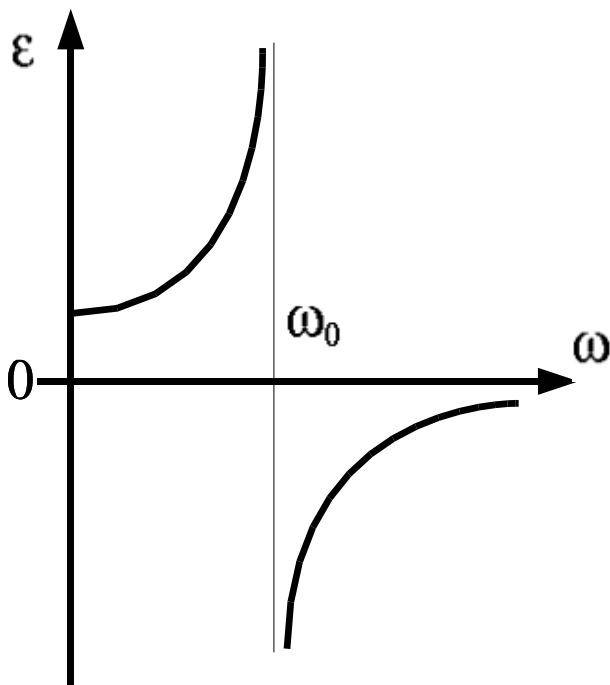


図 3.17 誘電率の周波数依存性（抵抗のない場合）

抵抗がある場合

電子の運動に速度に比例した抵抗がある場合を考える。電子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{u}}{dt} + k\vec{u} = -e\vec{E} \quad (3.60)$$

になる。ここで τ は緩和時間で、電界が急に变化した場合この程度の時間がたてば電子はその電界の変化に追随する。抵抗がない場合と同様に複素数を用いて、微分方程式を解くと、

$$\vec{u} = \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau)} \vec{E} \quad (3.61)$$

となる。誘電率は複素数になり、

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau)} \quad (3.62)$$

となる。誘電率を実数部と虚数部に分けると、

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(\omega) + i\varepsilon'(\omega) \quad (3.63)$$

ただし、

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (3.64)$$

$$\varepsilon'(\omega) = -\frac{Nze^2}{m} \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (3.65)$$

である。

3.5.3 エネルギーの散逸

誘電体中の電界の持つエネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon(\omega) + i\varepsilon'(\omega)) |\vec{E}|^2 \end{aligned}$$

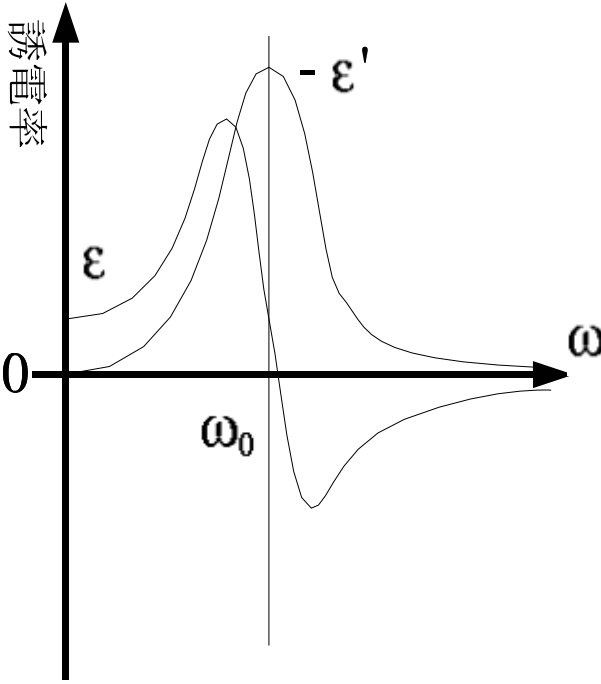


図 3.18 誘電率の周波数依存性（抵抗のある場合）

となってしまう。この虚数のエネルギーの意味を考えてみよう。

物理的に意味のある分極ベクトル $\vec{P}$ は複素数で表した分極ベクトル $\tilde{\vec{P}}$ の実数部である。

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \Re\{\tilde{\chi}_e(\omega)\tilde{\vec{E}}\} \\
 &= \Re\{[\chi_e(\omega) + i\chi'_e(\omega)][\vec{E}(t) + i\vec{E}'(t)]\} \\
 &= \chi_e(\omega)\vec{E}(t) - \chi'_e(\omega)\vec{E}'(t) \\
 &= \chi_e(\omega)\vec{E}_0 \cos \omega t - \chi'_e(\omega)\vec{E}_0 \sin \omega t
 \end{aligned}$$

分極電流は分極の時間微分で与えられるから、

$$\vec{i}_P(t) = -\omega\chi_e(\omega)\vec{E}_0 \sin \omega t - \omega\chi'_e(\omega)\vec{E}_0 \cos \omega t$$

となる。この分極電流は電界中を動いているわけだから、単位時間、単位体積当たり

$$\begin{aligned}\vec{i}_P(t) \cdot \vec{E}(t) &= -\omega\chi_e(\omega)E_0^2 \sin\omega t \cos\omega t \\ &\quad -\omega\chi'_e(\omega)E_0^2 \cos\omega t \cos\omega t\end{aligned}$$

のエネルギーを散逸する。第1項は時間平均を取るとゼロになる。第2項は時間平均をとると、

$$\langle \vec{i}_P(t) \cdot \vec{E}(t) \rangle_{\text{時間平均}} = -\frac{1}{2}\omega\chi'_e(\omega)E_0^2 \quad (3.66)$$

となる。先のモデルに従えば、 $\chi'_e < 0$ なので、電界のエネルギーが散逸されることが分かる。ミクロに見れば、電界によって電子が動く。その動きに対して抵抗力が働いて、エネルギーを散逸していることを意味している。

最初の虚数のエネルギーは電界のエネルギーの散逸が起ることを意味している。

問題 3.5.1

$$m\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \frac{m}{\tau}\frac{d\vec{u}}{dt} + k\vec{u} = -e\vec{E}$$

の定常解を求めよ。

===== 解答 =====

$d/dt \rightarrow i\omega$ と置き換えると、

$$-m\omega^2\vec{u} + i\omega\frac{m}{\tau}\vec{u} + k\vec{u} = -e\vec{E}$$

となる。したがって、 $\vec{u}$ について解くと、

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{-e\vec{E}}{m(-\omega^2 + i\omega/\tau + k/m)} \\ &= \frac{-e\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau)}\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\omega_0^2 = k/m$ に注意。

問題 3.5.2

問題 3.4.2 の分極のモデルを用いて、電子が振動する時の固有振動数を求めよ。ただし、原子の原子番号は Z 、電子一個の質量を m とする。また、 $Z = 6$ 、 $a = 0.07 \text{ nm}$ の場合の固有振動数を求めよ。

===== 解答 =====

$$q\vec{E} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{u}$$

より、上の式の k に相当する係数は、

$$\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{k/Zm} \\ &= \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m}} \\ &= \sqrt{\frac{6(1.60 \times 10^{-19})^2}{4\pi 8.85 \times 10^{-12} (0.07 \times 10^{-9})^3 9.1 \times 10^{-31}}} \\ &= 6.67 \times 10^{16} \end{aligned}$$

となる。単位は $[\text{Hz}]$ (あるいは、 $[\text{s}^{-1}]$) である。

問題 3.5.3

静電界の比誘電率が 4.5 の物質で、その中の電子の固有振動数が $1.04 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ の誘電体がある。振動数 $2.5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (赤い光) と $4.5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (青い) の光に対する比誘電率を求めよ。ただし、緩和時間は十分に長く誘電率の虚数部分は無視できると仮定する。

===== 解答 =====

虚数部分を無視すると、

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ &= \varepsilon_0 + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

である。 $\omega = 0$ のとき、 $\varepsilon/\varepsilon_0 = 4.5$ を用いると、

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{3.5}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

となる。

赤い光の場合 $\omega/\omega_0 = 0.240$ 、青い光の場合 $\omega/\omega_0 = 0.433$ であるから、そのときの比誘電率はそれぞれ、4.71 と 5.31 になる。

3.5.4 誘電体中の電磁波

電磁波の周波数が電子の運動の固有振動数より十分小さければ、真空中の誘電率や透磁率を物質中の値に置き換えてやれば良い。よって波動方程式は、

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.67)$$

となる。ただし、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (3.68)$$

である。また、真空中の光速との比

$$n = \frac{c}{v} \quad (3.69)$$

をその物質の絶対屈折率という。

物質 1, 2 がそれぞれ絶対屈折率を n_1, n_2 とするとき、 n_2/n_1 を物質 2 の 1 に対する相対屈折率という。

真空中ではすべての周波数の電磁波の速度は光速で一定であった。従って、任意の波形の波、すなわち異なった周波数の波の重ねあわせ、が真空中を伝搬するとき、その形は変化しない。ところが、物質中では周波数に応じてその電磁波の早さは異なる。図 3.19 参照。ここでは、分散がある場合とない場合の波（波束）の伝搬の例を図示している。具体的な波を表す式は、

$$f(t, x) = \sum_{i=-N}^N e^{-\left(\frac{i}{N}\right)^2} \sin \left(\left(k_0 - \frac{i}{N} \right) \left(x - \frac{\omega_0}{k_0} t \right) \right)$$

$$f_d(t, x) = \sum_{i=-N}^N e^{-\left(\frac{i}{N}\right)^2} \sin \left(\left(k_0 - \frac{i}{N} \right) \left(x - \frac{\omega_0}{k_0} \left(1 - \frac{i}{3N} \right) t \right) \right)$$

の通りである。図は $N = 100, x_0 = 2\pi, \omega_0 = 2\pi$ の場合を描いた。

従って、波の形が変化する場合がある。このような現象のことを波の分散という。虹も波の分散現象の現れである。

3.5.5 導体中の電磁波

誘電体中では、光速は周波数に応じて変化しても電磁波のエネルギーは誘電体によって吸収されないとして、電磁波の伝搬を取り扱った。導体中では、誘電体中と異なって、電磁波のエネルギーの導体による吸収が無視できなくなる。言い換えると、導体中を進む電磁波の振幅はだんだん減少する。

導体中の電磁波を考える場合、電流の効果を考慮しないといけない。その点が真空中と異なっている。

電荷はないが ($\rho = 0$)、電流はある導体中を伝わる波を考える。また、 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 、そして $\vec{B} = \mu \vec{H}$ としている。よって、マクスウェルの方程式は電界 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ だけで表せ、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu \partial_t \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{i} + \varepsilon \partial_t \vec{E} \end{aligned}$$

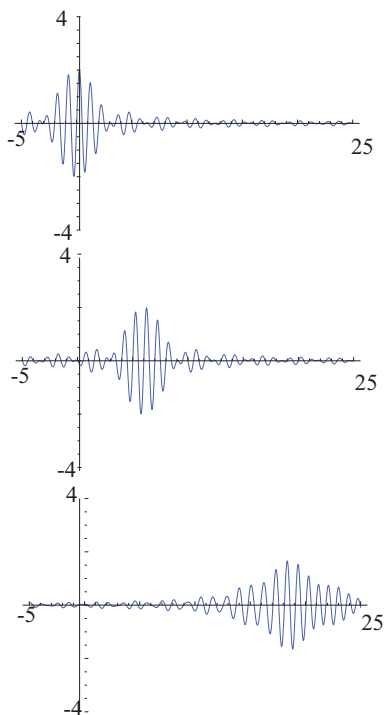


図 3.19 1 番上は $t = 0$ の場合である。2 番目は $t = 6$ で分散のない場合 ($f(t, x)$) で、3 番目は同じく $t = 6$ で分散がある (波長によって波の速さが異なる、 $f_d(t, x)$) 場合である。2 番目の図は単に 1 番目の図を平行移動しただけになっているが、3 番目の図は変形している。

となる。ここで z 方向に伝わる平面波を考えると、すべての量は z と t だけの関数であるから、マクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\implies \partial_z E_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \partial_t \vec{H} &\implies \begin{cases} -\partial_z E_y &= -\mu \partial_t H_x \\ \partial_z E_x &= -\mu \partial_t H_y \\ 0 &= -\mu \partial_t H_z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 &\implies \partial_z H_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{i} + \varepsilon \partial_t \vec{E} &\implies \begin{cases} -\partial_z H_y &= i_x + \varepsilon \partial_t E_x \\ \partial_z H_x &= i_y + \varepsilon \partial_t E_y \\ 0 &= i_z + \varepsilon \partial_t E_z \end{cases}\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\partial_A B = \frac{\partial B}{\partial A}$ と略記している。 z 方向に進む平面波を考えているので、 ∂_x や ∂_y を作用させると結果は必ずゼロになる。したがって、 $\partial_z E_z = 0$ が結論づけられる。しかも今は z 方向に進む波を考えているので、 E_z は定数でなければならないことが分かる。ここでは以後の計算を簡単にするためにゼロとする。同様にして $H_z = 0$ が結論できるので、電磁波は「横波」であることがわかる。

波動を表す式は $f(\vec{k} \cdot \vec{r} - t)$ のように表されることに注意。今の場合は、 $E_z(z - ct)$ となる。

ここで、 $\vec{E}$ の方向を x 方向にとると、定義より $E_y = 0$ である。電流 $\vec{i} = \sigma \vec{E}$ である。ただし、 σ は周波数依存性がないとして静電界の値を使うことにする。電界は x 方向にしか値を持たないので、 $i_y = i_z = 0$ が結論づけられる。

次に、 $E_y = 0$ と上記の方程式を合わせて、

$$\partial_t H_x = 0, \quad \partial_z H_x = 0$$

が得られる。すなわち、 $H_x = 0$ となり $\vec{H}$ は y 成分だけを持つ。

結局、マクスウェルの方程式は以下のように簡略できる。

$$\begin{aligned}E_z &= 0 \\ H_z &= 0 \\ E_y &= 0 \\ H_x &= 0 \\ \partial_z E_x &= -\mu \partial_t H_y \\ -\partial_z H_y &= i_x + \varepsilon \partial_t E_x\end{aligned}$$

最初の2式は横波であることを示し、第3,4式は波に伴う電界と磁場の変動方向が直交していることを表している。最後の2つの方程式より、

$$\begin{aligned}
 \partial_t(\partial_t E_x) &= -\frac{1}{\varepsilon} \partial_t \partial_z H_y - \frac{1}{\varepsilon} \partial_t i_x \\
 &\quad \text{第1項の}\partial_t\text{と}\partial_z\text{の順序を入れ替えると、} \\
 &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \partial_t H_y - \frac{1}{\varepsilon} \partial_t i_x \\
 &\quad \partial_t H_y \text{を} -\frac{1}{\mu} \partial_z E_x \text{に置き換えて} \\
 &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \partial_z^2 E_x - \frac{1}{\varepsilon} \partial_t i_x \\
 &\quad i_x \text{を} \sigma E_x \text{に置き換えて} \\
 &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \partial_z^2 E_x - \frac{\sigma}{\varepsilon} \partial_t E_x
 \end{aligned}$$

整理すると、

$$\partial_z^2 E_x - \varepsilon \mu \partial_t^2 E_x - \sigma \mu \partial_t E_x = 0 \quad (3.70)$$

となる。ここで、振動する電磁場を複素数で次のように表して、

$$\tilde{E}_x(z, t) = \tilde{E}(z) e^{i\omega t} \quad (3.71)$$

微分方程式を解くことにする。元の微分方程式は、

$$\partial_z^2 \tilde{E}(z) + (\varepsilon \mu \omega^2 - i \sigma \mu \omega) \tilde{E}(z) = 0 \quad (3.72)$$

となる。

もしも $\sigma = 0$ ならば、

$$\tilde{E}(z) = E_0 e^{-ikz} \quad (3.73)$$

が解になる。ただし、 $k = \pm \omega/v$ 、 $v = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ である。これを用いると、

$$E_x(z, t) = E_0 \cos k(z \mp vt) \quad (3.74)$$

となり、空間的に進む波を表していることがわかる。

導体中なので、 $\sigma \neq 0$ であるので、複素数の $\tilde{k}$ を許して $\tilde{E}(z) = E_0 e^{-i\tilde{k}z}$ において解を求めると、

$$[-\tilde{k}^2 + (\varepsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega)]E_0 = 0 \quad (3.75)$$

となる。 $E_0 \neq 0$ でないと意味がないので、係数がゼロでないといけない。従って、

$$\tilde{k}^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega \quad (3.76)$$

右辺の第 1 項と第 2 項の大きさを比較しよう。 $\sigma \sim 10^7 \text{ } [\Omega^{-1}\text{m}^{-1}]$ で、 $\varepsilon \sim 10^{-11} \text{ } [\text{F m}^{-1}]$ であるから、

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \sim 10^{18} \text{ } [\text{s}^{-1}] \quad (3.77)$$

である。このようにして、可視光 ($\omega \sim 10^{14}$) を考えたとしても第 1 項は第 2 項と比較して無視できることがわかった。従って、

$$\tilde{k}^2 \approx -i\sigma\mu\omega \quad (3.78)$$

あるいは、

$$\tilde{k} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega} \quad (3.79)$$

が得られる。結局、

$$E_x(z, t) = E_0 \cos\left(\frac{z}{\ell} - \omega t\right) e^{-z/\ell} \quad (3.80)$$

ただし、

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (3.81)$$

となる。この式は、導体中で進まず減衰する「波」を表している。

マイクロ波 ($\omega \sim 10^{10}$) の場合、 $\ell \sim \sqrt{\frac{2}{10^{-6} 10^7 10^{10}}} \sim 10^{-6} \text{ } [\text{m}]$ になる。マイクロ波の波長は cm 程度あるから、電磁波は導体中には全くと言って良いほど侵入できないことがわかる。

問題 3.5.4

問題 3.5.3 で取り扱った物質を考える。

1. それぞれの色における屈折率を求めよ。また、それぞれの光の物質中の光速を求めよ。

赤い光と青い光の速度差は、 $7.8 \times 10^6 [\text{m/s}]$ である。

2. まず、青い光のパルスを 1 ns、そして続いて赤い光のパルスを 1 ns の時間だけ、厚さ 2 m のこの物質に入射した。色と強度を無視して出てくる光のおおよその継続時間を求めよ。
3. まず、赤い光のパルスを 1 ns、そして続いて青い光のパルスを 1 ns の時間だけ、厚さ 2 m のこの物質に入射した。色と強度を無視して出てくる光のおおよその継続時間を求めよ。

ここで考えた原理を応用して、極超短パルス光が作られている。

===== 解答 =====

1. 屈折率は、 $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ だから、赤い光の屈折率は 2.17、青い光の屈折率は 2.30 になる。一方光速は、真空の光速を屈折率で割れば良いから、それぞれ、 $1.381 \times 10^8 [\text{m/s}]$ 、 $1.303 \times 10^8 [\text{m/s}]$ になる。

赤い光と青い光の速度差は、 $7.8 \times 10^6 [\text{m/s}]$ である。

2. 赤い光と青い光がこの物質を通過するために必要な時間はそれぞれ、 $2/1.382 \times 10^8 = 14.48 \times 10^{-9} [\text{s}]$ 、 $2/1.303 \times 10^8 = 15.35 \times 10^{-9} [\text{s}]$ である。

青い光を入射した時刻を $t = 0$ として、赤い光と青い光が出てくる時刻はそれぞれ $1+14.48 \sim 1+14.48+1 [\text{ns}]$ 、 $15.35 \sim 15.35+1 [\text{ns}]$ になる。結局光が出ている時間は、 $15.35 \sim 16.48 [\text{ns}]$ となり、その継続時間は約 $1.1 [\text{ns}]$ になる。

3. 赤い光を入射した時刻を $t = 0$ として、赤い光と青い光が出てくる時刻はそれぞれ $14.48 \sim 14.48 + 1[\text{ns}]$ 、 $1 + 15.35 \sim 1 + 15.35 + 1[\text{ns}]$ になる。結局光が出始めてから出終るまでの時間は、 $14.48 \sim 17.35[\text{ns}]$ となり、その間の時間は約 $2.9[\text{ns}]$ になる。

ここで考えた原理を応用して、極超短パルス光が作られている。

問題 3.5.5

電気伝導度の小さな物質があり、 $\omega \gg \sigma/\varepsilon$ が成り立つとする。導体内の電磁波の様子を調べよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}\tilde{k}^2 &= \varepsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega \\ &= \mu\varepsilon\omega^2\left(1 - i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\end{aligned}$$

と変形できるから、この問題では、

$$\tilde{k} \approx \sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - i\frac{\sigma}{2\varepsilon\omega}\right)\omega$$

と近似できる。したがって、この物質中の電磁波は振動しながら進むことができる。ただし、波数 k に小さいながらも虚数部分があるので、進みながら減衰する。

問題 3.5.6

導体内の電子は原子に束縛されていない。従って、その運動方程式としては、

$$m\partial_t \vec{v} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = -e\vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

が考えられる。これを解いて、 $\vec{i}(t) = -en\vec{v}(t)$ より、電流密度を求めよ。

===== 解答 =====

$d/dt \rightarrow i\omega$ の置き換えを行うことによって、

$$\tilde{\vec{v}} = \frac{-e}{m(1/\tau + i\omega)} \tilde{\vec{E}}$$

と解くことができる。電流 $\tilde{i}$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= -ne\tilde{\vec{v}} \\ &= \frac{ne^2}{m(1/\tau + i\omega)} \tilde{\vec{E}} \\ &= \frac{ne^2(1/\tau - i\omega)}{m(1/\tau^2 + \omega^2)} \tilde{\vec{E}} \\ &= \frac{ne^2(1/\tau - i\omega)}{m(1/\tau^2 + \omega^2)} \vec{E}_0(\cos \omega t + i \sin \omega t) \end{aligned}$$

となる。求めるべき電流密度はこの式の実数部分であるから、

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{i}) &= \Re\left(\frac{ne^2(1/\tau - i\omega)}{m(1/\tau^2 + \omega^2)} \vec{E}_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)\right) \\ &= \frac{ne^2\tau \vec{E}_0}{m(1 + \omega^2\tau^2)} \Re((1 - i\omega\tau)(\cos \omega t + i \sin \omega t)) \\ &= \frac{ne^2\tau}{m(1 + \omega^2\tau^2)} (\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t) \vec{E}_0 \\ &= \frac{ne^2\tau}{m} \left(\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \cos \omega t + \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \sin \omega t \right) \vec{E}_0 \end{aligned}$$

となる。

参考文献

- [1] 長岡洋介 「電磁気学 I,II」 岩波書店.
- [2] <http://homepage2.nifty.com/eman/electromag/contents.html>
- [3] EH 対応、EB 対応はそれぞれに意味がある。そのために、EB 対応、EH 対応を明確にせずに、多くの教科書が構成されているので注意する必要がある。また、最近では歴史的な経緯を無視して、 $\vec{B}$ を磁場と呼ぶ教科書もある。混乱しないように注意すること。EH 対応、EB 対応の整理については <http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/32denjk/010elc.html> や広島大学の山崎による monograph 「電磁気学における単位系」 <http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/metadb/up/81936204/Refunit43W.pdf> を参照のこと。
- [4] 数学の詳細については以下の参考書を推奨する。G. Arfken, *Mathematical Method for Physicist*, ACADEMIC PRESS. New York.