電磁気学：理学科物理コース

Y. Kondo

2013 年 7 月 6 日

電磁気学 I では真空中の静電場と静磁場について学び、電磁気学 II では時間変動する電磁場や物質中の電磁場について学ぶ。関連して、電気回路やエレクトロニクスの初歩にも言及している。

電磁気学 I、II をより良く理解するために、解法 I、II を同時に履修することが必要である。電磁気学の問題を解くことを通じて、物理で必要な数学を身に付けることもできる。また、「エレクトロニクス」の講義も併せて受講することが望ましい。

この講義ノートは岩波書店の物理入門コース 3,4「電磁気学 I,II」[1] をベースにしている。参考書を購入する場合は、これらの本を推薦する。ただし、単位系が異なっているので注意を要する [3]。

この講義では単なる知識ではなく、様々な局面に応用できる計算能力 [4] を養うことが大きな目標である。従って、自ら手を動かして計算する必要があり、受け身に講義を聴くだけでは意味がない。TV を見るように講義を「見る」つもりの学生には意味がないので履修登録を行わないことを勧める。

以下この講義に関して注意を挙げる。

- 遅刻、早退は欠席 1/2 回分として扱う。
- 講義を実施する上で必要な教員の指示に従わない場合は退室を命ずる場合がある。その場合は欠席扱いとする。
- 定期試験の成績のみで評価を行う。
- 教科書は近藤のホームページにアップしてあるので、必要に応じて印刷すること。

目次

第 1 章

物理数学

1.1　微分積分

1.1.1　極限

数列など、ある種の数学的対象をひとまとまりに並べて考えたものについての極限がしばしば考察される。数の列がある値に限りなく近づくとき、その値のことを数列の極限あるいは極限値といい、この数列は収束するという。

限りなく近づくという曖昧な表現を避けて、$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて収束を定義する。

数列 a_n がある一定の値 α に収束するとは

$$\forall\varepsilon\ \exists n_0\in\boldsymbol{N}\ \mathrm{s.\ t.}\ \ [n>n_0\Rightarrow|a_n-\alpha|<\varepsilon]$$

とできることである。ただし、$\boldsymbol{N}$ は自然数の集合である[*1]。

数学の記号を使わずに表現すると「どんなに小さな正の数 ε であっても、その ε に対して番号 n_0 を十分大きく定めれば、n_0 より大きい

[*1] s. t. は such that を省略したものであり、A s. t. B とは、B を満たす A という意味である。

番号 n に対する a_n は α から ε ほども離れない範囲に全部入るようにすることができる」となる。数学的な表現の簡潔さに注意。

物理学では数列ではなく関数を考える場合が多い。その場合に使えるように極限の概念を拡張しよう。

$f(x)$ を実関数 、x_0 を実数とした場合、

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$$

であるとは、

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon \; \exists \delta \in \boldsymbol{R} \\ \text{s. t.} \;\; [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon]\end{gathered}$$

とできることである。ただし、$\boldsymbol{R}$ は実数の集合である。

物理学ではほとんどの場合、いろいろな物理量を表す関数は収束する。別の言い方をすれば、そのような場合しか大学の初年度では考えない。

1.1.2　微分

微分は拡張された傾きの概念と考えることができる。すなわち、

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である。以下は高校で学習しているはずであるが良く復習しておくこと。

- 物理でよく使われる関数の微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} x^n &= n x^{n-1} \\ \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x \\ \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = 1/x$$

- 重要な公式
  -
$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x))$$
$$= (\frac{d}{dx}f(x))g(x) + f(x)(\frac{d}{dx}g(x))$$
  -
$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{(\frac{d}{dx}f(x))g(x) - f(x)(\frac{d}{dx}g(x))}{(g(x))^2}$$
  - $y = f(x),\, x = g(t) \Rightarrow y = f(g(t))$ である時、
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

1.1.3　積分

定積分を以下のように定義する。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{1<i<n} f(a + \frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{a<x_i<b} f(x_i)\Delta x$$

$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, \Delta x = \frac{b-a}{n}$ である。

一方、不定積分は

$$F_a(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx$$

と定義される。

$$
\begin{gathered}
F_a(\xi+\Delta\xi) = F_a(\xi) + f(\xi)\Delta\xi \\
\Downarrow \\
\frac{F_a(\xi+\Delta\xi) - F_a(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi) \\
\Downarrow \Delta\xi \to 0 \\
\frac{d}{d\xi}F_a(\xi) = f(\xi)
\end{gathered}
$$

すなわち、$\frac{d}{dx}F_a(x) = f(x)$ であり、積分が微分の逆演算であることが分かる。

注意：$\frac{d}{dx}(F_a(x) + c) = f(x)$、ただし c は任意定数。

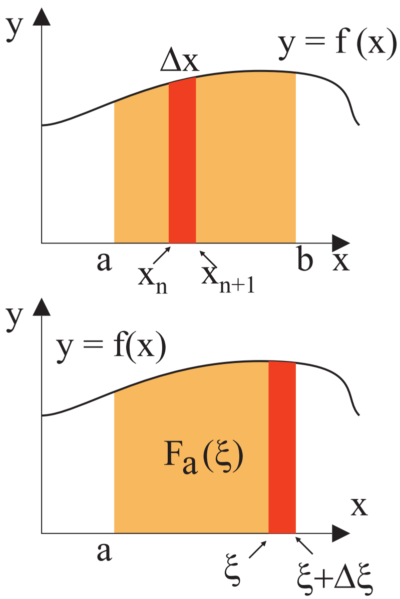

図 1.1

1.1.4 偏微分（偏導関数）：多変数の関数への微分の拡張

簡単のために 2 変数の関数 $u = f(x, y)$ を考え、$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\end{aligned}$$

$(x, y) \to (x + \Delta x, y + \Delta y)$ の時の u の変化を考える。

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) \\ &+ (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) \\ &\approx \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\end{aligned}$$

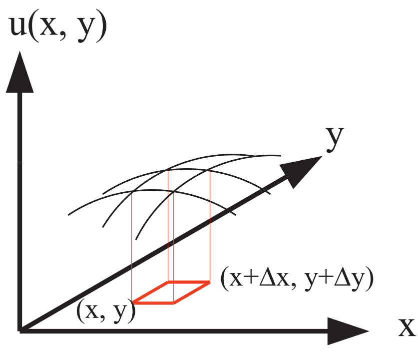

図 1.2

ここで $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ の極限を考え、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

とする。変数が 3 以上の場合も同様に定義する。

1.1.5　多重積分

空間に分布している電荷 $\rho(\vec{r})$ の総和を計算する場合がある。そのような場合に対応するために、一つ以上の変数であるスカラー関数 f （値がスカラー量の関数）を積分する場合について考えよう。ここでは、3 次元空間を考え、変数を $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の組とする。

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}\in V} f(\vec{r})dv &= \int_V f(\vec{r})dxdydz \\ &= \lim_{\Delta V\to 0}\sum f(\vec{r})\Delta V \\ &= \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\sum f(\vec{r})\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}$$

実際に計算する場合は、考えている問題の対称性（ある種の規則性）を考慮してできるだけ計算を簡単する。詳しくは座標軸に関するセクション 1.5 で議論する。

- 点対称の場合
  関数 $f(\vec{r}) = f(r)$ のように原点からの距離 r のみに依存する場合に、全空間の積分は
  $$\int f(\vec{r})dv = \int_0^\infty f(r)4\pi r^2 dr$$
  となる。$4\pi r^2 dr$ は半径 r で厚さが dr の球殻の体積である。
- 軸対称の場合
  関数 $f(\vec{r}) = f(r,z)$ のように z 軸からの距離 r と z 座標のみに依存す

る場合に、平面 $z = z_0$ での全積分は

$$\int_{z=z_0} f(\vec{r})dS = \int_0^\infty f(r, z_0)2\pi r dr$$

となる。$2\pi r dr$ は半径 r で幅が dr のリングの面積である。

は電磁気で良く出てくる。

問題 1.1.1

以下の計算を行え。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} &= \\
\lim_{x\to 0} 1 + x &= \\
\lim_{x\to 0} 1 + x^2 + x^3 &= \\
\lim_{x\to 0} x/x &= \\
\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3}{x} &=
\end{aligned}$$

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} &= 0 \\
\lim_{x\to 0} 1 + x &= 1 \\
\lim_{x\to 0} 1 + x^2 + x^3 &= 1 \\
\lim_{x\to 0} x/x &= 1 \\
\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3}{x} &= 1
\end{aligned}$$

問題 1.1.2

微分の定義に従って関数 $x^2, x^n, \sin x, a^x$ の微分を行え。定義に従って計算を行うとは、以下のような計算を行なうことである。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}\\ &= 1\end{aligned}$$

===== 解答 =====

- $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^2 &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{(x+\Delta)^2-x^2}{\Delta}\\ &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{x^2+2\Delta x+\Delta^2-x^2}{\Delta}\\ &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{2\Delta x+\Delta^2}{\Delta}\\ &= 2x\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}x^n\\ &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{(x^n+n\Delta x^{n-1}+c\Delta^2x^{n-2}+\ldots+\Delta^n)-x^n}{\Delta}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\Delta(cx^{n-2}+\ldots+\Delta^{n-1})\right)\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

  ここで c はある定数。

- $$\frac{d}{dx}\sin x$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\sin(x+\Delta) - \sin x}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{1}{2}\Delta)\sin\frac{\Delta}{2}}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \cos(x+\frac{1}{2}\Delta) \lim_{\Delta\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta}{\frac{1}{2}\Delta} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

ここで $\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x) = \cos x$ は明らかであろう。
$\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta}{\delta} = 1$ は以下のようにして証明する。$|\delta| \ll 1$ の場合図を描けば明らかなように $|\sin\delta| < |\delta| < |\tan\delta|$ である。従って

$$\cos\delta < |\sin\delta/\delta| < 1$$

を示すことができる。

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} 1 &= 1 \\
\lim_{\delta\to 0} \cos\delta &= 1
\end{aligned}$$

であるから、二つの間にある $|\sin\delta/\delta|$ も 1 に収束する。

•

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a^x &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{a^{x+\Delta} - a^x}{\Delta} \\
&= a^x \lim_{\Delta\to 0} \frac{a^{\Delta} - 1}{\Delta} \\
&= a^x \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^{\ln a\Delta} - 1}{\Delta} \\
&= a^x \ln a \lim_{\Delta\to 0} \frac{e^{\ln a\,\Delta} - 1}{\ln a\,\Delta} \\
&= a^x \ln a
\end{aligned}$$

特に $\lim_{\Delta\to 0}(a^{\Delta} - 1)/(\Delta) = 1$ となる a を自然対数の底 e と呼ぶ。
$e = 2.71828\ldots$ である。

問題 1.1.3

$\ln x$ の微分を求めよ。

===== 解答 =====

$y = e^x$ と $y = \ln x$ はお互いに逆関数の関係にある。よって、$x = \ln y$ $(y = e^x)$ を y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

ここで $x \to y, y \to x$ と置き換えることによって

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

が得られる。

問題 1.1.4

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ である。$1/r, r, r^2$ を x, y, z で偏微分せよ。

===== 解答 =====

一般の r^n について計算する。ただし、$n \neq 0$ を先に考察する。

$$\begin{aligned} \partial_x r^n &= \partial_r r^n \partial_x r \\ &= nr^{n-1}\partial_x(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ &= nr^{n-1}\partial_{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\partial_x(x^2+y^2+z^2) \\ &= nr^{n-1}\ 1/2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\ 2x \\ &= nr^{n-2}x \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \partial_y r^n &= nr^{n-2}y \\ \partial_z r^n &= nr^{n-2}z \end{aligned}$$

である。$n = 0$ の場合は被微分関数は定数なのでその偏微分はゼロである。

問題 1.1.5

1. 半径 1 の円の面積を計算せよ
2. 半径 1 の球の体積を求めよ。

ヒント：

それぞれ、

$$\int_{x^2+y^2<1} dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

$$\int_{x^2+y^2+z^2<1} dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

を計算すれば良い。

===== 解答 =====

解答は省略。

ただし、以下のように対称性を考慮すれば計算が簡単になる典型的な例である。円の場合は、

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2<1} dxdy &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 rdr \\ &= \int_0^1 2\pi rdr \\ &= \pi\end{aligned}$$

となり、球の場合は

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2+z^2<1} dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^1 r^2dr \\ &= \int_0^1 4\pi r^2dr \\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

となる。

1.2　ベクトルの基礎

1.2.1　3 次元ベクトル

3 次元空間中の位置、力、速度、加速度などを表すために必要な 3 次元ベクトルについて復習しよう。

図 1.3 のような直交した 3 つの軸に平行な 3 つの単位ベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ によって、任意の 3 次元ベクトルが

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{1.1}$$

と表されることは良く理解していることであろう[*2]。

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ をそれぞれ右手の人差指、中指、親指に対応させるとき右手系の座標系を選んだと言う。$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を数の組で

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

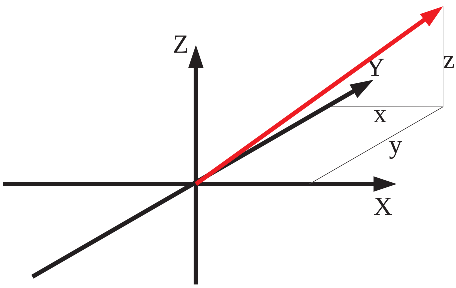

図 1.3　3 次元ベクトル

[*2] ここでは、数学的な整合性はあまり考えずに、3 つの数の組みで表現されるものをベクトルとする。本当はベクトルの持つべき性質を考えて、これらの数の組がその条件を満たすと捉えるべきである

と表すならば、ベクトル $\vec{a}$ は

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = {}^T(a_x, a_y, a_z)$$

と表すことができ、ベクトルの成分表示と言う。ベクトルをこのように表現すると線形代数を用いて様々なベクトルの計算を行うことができて便利である。なお、${}^T(a_x, a_y, a_z)$ の ^{T} は行列の転置（行と列を入れ替えること）することを意味する。明らかな場合は転置の記号を省略することもあるので注意すること。

ベクトル $\vec{a}$ が位置ベクトルならば a_x, a_y, a_z は長さの次元を持つ量であるし、力を表すベクトルならば各成分は力の次元を持つ量である。ベクトルの大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.2}$$

によって表される。

物理ではある物理量に対してよく使われる記号がある。例えば、位置ベクトルに対しては $\vec{r}$、力に対しては $\vec{F}$、速度に対しては $\vec{v}$ などである。また、ベクトル量とスカラー量を明確に区別するためにベクトルには必ず矢印 $\vec{}$ を用いる。

1.2.2　基本演算

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があり、その成分表示が

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

としよう。

ベクトルの和

ベクトルの和は

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

である。

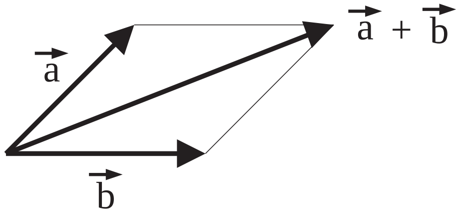

図 1.4　ベクトルの和。

ベクトルのスカラー倍

スカラー量 c によるベクトルのスカラー倍は

$$c \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,a_x \\ c\,a_y \\ c\,a_z \end{pmatrix}$$

である。

ベクトルのスカラー積

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のスカラー積（内積）は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

である。ここで θ は二つのベクトルの間の角度である。

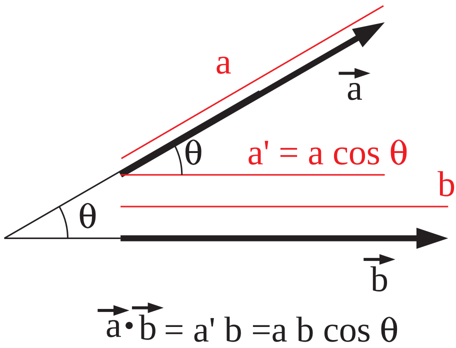

図 1.5　ベクトルのスカラー積（内積）。

特に、

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

であることに注意。また、以下の性質がある。

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{b}\cdot\vec{a}\\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\\ \frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) &= (\frac{d}{dt}\vec{a})\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot(\frac{d}{dt}\vec{b})\end{aligned}$$

座標軸に平行な単位ベクトルについては

$$\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1\\ \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

ベクトルのベクトル積

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のベクトル積（外積）は

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

である。ここで $|A|$ は行列 A の行列式である。ベクトル積の大きさは二つのベクトルによって作られる平行四辺形の面積になり、その方向は二つのベクトルと直交している。向きは $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で右手の人差し指、中指、親指に対応するように取る。

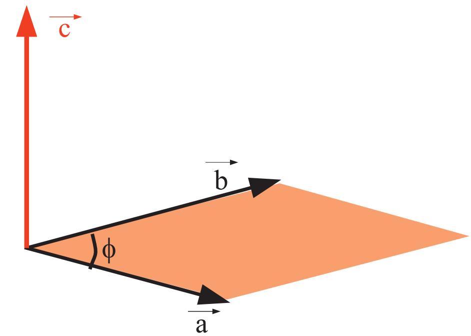

図 1.6　ベクトルのベクトル積（外積）。

特に、

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

であることに注意。また、以下の性質がある。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \left(\frac{d}{dt}\vec{a}\right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left(\frac{d}{dt}\vec{b}\right) \end{aligned}$$

座標軸に平行な単位ベクトルについては

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

が成り立つ。

1.2.3　直線と平面を表すベクトル式

直線の式

ある点 $\vec{r}_0$ を通り、ベクトル $\vec{v}$ に平行な直線上の点 $\vec{r}(s)$ は

$$\vec{r}(s)-\vec{r}_0=\vec{v}\,s$$

と表すことが出来る。ここで s はあるパラメータである。物理の場合、s として時間 t を取ることが多い。線上（曲線、直線を問わず）の点を指定するためには、パラメータを一つ指定すれば良いことに注意。

平面の式

ある点 $\vec{r}_0$ を通り、ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面上の点 $\vec{r}$ は

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$$

と表すことが出来る。この式はベクトル $\vec{r}-\vec{r}_0$ がベクトル $\vec{n}$ に直交していることを表しているに過ぎない。

問題 1.2.1

内積とベクトル積の性質を自ら計算して確認せよ。

===== 解答 =====

省略。

問題 1.2.2

ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が与えられている。

1. 次の計算を $i = 1 \sim 3$ について行え。

$$\vec{e_i}' = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \vec{e_i}$$

2. $\vec{e_i}'.\vec{e_j}'$（ただし、$i, j = 1, 2, 3$）を 9 通りすべて計算し、できるだけ簡単な形にせよ。
3. $\vec{e_i}' \times \vec{e_j}'$（ただし、$i, j = 1, 2, 3$）を 9 通りすべて計算し、できるだけ簡単な形にせよ。

===== 解答 =====

省略。

問題 1.2.3

真空中の位置 $\vec{r_i}$ に電荷 Q_i がある。ただし、$i = 1, 2$ を取る。電荷 Q_i に働いている静電気力 $\vec{F_i}$ をベクトルを用いて表せ。

===== 解答 =====

$$\vec{F_1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^3},$$
$$\vec{F_2} = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}$$

問題 1.2.4

位置 $\vec{r_0}$ に電荷 Q_0 がある。位置 $\vec{r}$ における電界 $\vec{E}(\vec{r})$ をベクトルによって表せ。

===== 解答 =====

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

問題 1.2.5

位置 $\vec{r}_i$ に電荷 Q_i がある。位置 $\vec{r}$ における電界 $\vec{E}(\vec{r})$ をベクトルによって表せ。

===== 解答 =====

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

このように電界に関して線形の性質（足し算ができる）があることに注意。電荷の分布 $\rho(\vec{r})$ の場合には上の和は積分に置き換えて

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}dv'$$

とすれば良い。

1.3　複素数

ここでは複素数の復習を行う。留数定理などは扱わない。

1.3.1　複素数

複素数は 2 乗すると -1 になる虚数単位 i を導入して、

- $z = x + iy$ と定義される数のことである。ただし、x, y は実数である。
- i を通常の数のように扱い実数で成り立っている演算規則に従うと考えて、複素数の和、差、積、除を定義する。ただし、i^2 が出てくれば、適宜 -1 に置き換える。

- 複素数の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ で定義され、$\tan\theta = y/x$ は偏角と呼ばれる。
- z の複素共役は z^* と書かれ $z^* = x - iy$ である。

1.3.2　複素数の基本的な性質

以下のような性質がある。

- z が実数ならば、$z^* = z$
- z が純虚数ならば、$z^* = -z$
- $(z^*)^* = z$
- $|z| = |z^*|$
- $z + z^* = 2\,\Re(z)$
- $z - z^* = 2i\,\Im(z)$
- $zz^* = |z|^2$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

ただし、$\Re, \Im$ はそれぞれ複素数の実数部分、虚数部分を取り出すことを意味する記号である。

1.3.3　複素平面

一つの複素数 $z = x + iy$ は 1 組の実数の組（順序対）(x, y) によって特徴付けることが可能である。この (x, y) を 2 次元平面上の点に対応させることによって、複素数を平面上の点と一対一に対応付けることが可能である。このように複素数に対応させた平面のことを複素平面と呼ぶ。

複素平面は抽象的に定義された複素数を直感的に理解する手助けになるものであり、有用である。

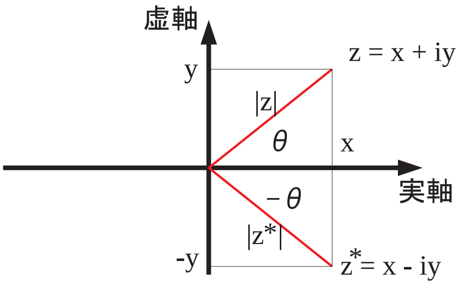

図 1.7 複素平面。

1.3.4 オイラーの公式

複素数を引数とする指数関数の微分は虚数を実数の定数と同様に扱って計算すれば良い。例えば、

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

である。従って、

$$\frac{d^n}{d\theta^n}e^{i\theta} = i^n e^{i\theta}$$

である。この関係式を用いれば、複素数を引数とする指数関数と三角関数の間の以下の関係式を証明できる。

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

問題 1.3.1

複素数の基本的な性質を確認せよ。

===== 解答 =====

裏面も使うこと。

問題 1.3.2

オイラーの公式を証明せよ。

===== 解答 =====

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[d^k e^{i\theta}/d\theta^k]_{\theta=0}}{k!}\, \theta^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\, \theta^k \\
&= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \ldots \\
&+ i(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}
$$

問題 1.3.3

オイラーの公式を用いて、以下の計算を行なえ。

ヒント：$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$

1. $\cos(\theta_1 + \theta_2)$
2. $\cos(\theta_1 - \theta_2)$
3. $\sin(\theta_1 + \theta_2)$
4. $\sin(\theta_1 - \theta_2)$

===== 解答 =====

$$
\begin{aligned}
&\cos(\theta_1 \pm \theta_2) + i\sin(\theta_1 \pm \theta_2) \\
&= e^{i(\theta_1 \pm \theta_2)} \\
&= e^{i\theta_1} e^{\pm i\theta_2} \\
&= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 \pm i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2)
\end{aligned}
$$

問題 1.3.4

1. 以下の微分方程式（y_0, k は定数）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = y_0 e^{ikx}$$

で $y = y_1 e^{ikx}$ が解になるように、定数 y_1 を定めよ。

2. 以下の微分方程式（y_0, ω は定数）

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + y = y_0 e^{i\omega t}$$

で $y = y_1 e^{i\omega t}$ が解となるように定数 y_1 を定めよ。

===== 解答 =====

1.

$$\begin{aligned} y_1(ik)^2 + y_1(ik) + y_1 &= y_0 \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{y_0}{-k^2 + ik + 1} \end{aligned}$$

2. y を x で偏微分してもゼロなので、

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{i\omega t} \\ \Rightarrow y_1 &= y_0 \end{aligned}$$

問題 1.3.5

以下の計算を行なえ。

1. $i^i =$
2. $\sqrt{i} =$

===== 解答 =====

1.

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$$

2.

$$\sqrt{i} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

1.4　ベクトルに対する微積分

ベクトルに対する微積分について復習する。

1.4.1　ベクトルの微分

あるパラメータ s の関数としてベクトル $\vec{a}(s)$ が与えられているとき、そのパラメータに対する微分は

$$\frac{d\vec{a}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{a}(s+\Delta s) - \vec{a}(s)}{\Delta s}$$

とする。物理ではパラメータとして時間 t を取ることが多い。

以下の性質がある。ϕ はスカラー関数である。

- $$\frac{d}{ds}\left(\phi\vec{a}\right) = \left(\frac{d}{ds}\phi\right)\vec{a} + \phi\left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right)$$
- $$\frac{d}{ds}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right)\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\left(\frac{d}{ds}\vec{b}\right)$$
- $$\frac{d}{ds}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right)\times\vec{b} + \vec{a}\times\left(\frac{d}{ds}\vec{b}\right)$$

1.4.2　ベクトル場とベクトル演算子

空間の各点 $\vec{r}$ にベクトル関数 $\vec{v}(\vec{r})$ を指定するとき、ベクトル場 $\vec{v}(\vec{r})$ が与えられたと言う。ベクトル場の例としては、流れ場や電場、磁場がある。ベクトル場に関連する微分演算子としては、

- 勾配
$$\mathrm{grad}\,\phi = \partial_x \phi\,\vec{i} + \partial_y \phi\,\vec{j} + \partial_z \phi\,\vec{k}$$
- 発散
$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \partial_x\, a_x + \partial_y\, a_y + \partial_z\, a_z$$
- 回転
$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\vec{a} \\ &= (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\vec{i} \\ &+ (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\vec{j} \\ &+ (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\vec{k} \end{aligned}$$

がある。これらはベクトル演算子（ナブラ）

$$\vec{\nabla} = \partial_x\,\vec{i} + \partial_y\,\vec{j} + \partial_z\,\vec{k}$$

を導入することによって、

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\,\phi &= \vec{\nabla}\phi \\ \mathrm{div}\,\vec{a} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a} \\ \mathrm{rot}\,\vec{a} &= \vec{\nabla}\times\vec{a} \end{aligned}$$

と簡便に表すことができる。ここではナブラのベクトル的な性質を強調するために、$\vec{\nabla}$ と表記している。多くの場合 ∇ と表記されているので、注意のこと[*3]。

[*3] $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ のことである。∂_y, ∂_z も同様である。

1.4.3　ガウスの定理

ガウスの定理とは、

$$\int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{w}\, dv$$

である。ここで S は空間中にとった閉曲面で、V はその閉曲面で囲まれた体積である。ただし、式を簡単にするために、S の微小要素の大きさにその微小要素の法線ベクトルを掛けたもの $\vec{n}dS$ を $d\vec{S}$ と表していることに注意すること。

今、微小体積 $dxdydz$ を考察する。具体的なイメージを掴むために、$\vec{w} = \rho\vec{v}$ と考えて流体の流れを考えよう。ここで、ρ と $\vec{v}$ は流体の密度とその速度である。

この微小体積に x 方向に沿って流出する流体の量を考える。図の灰色の面からこの微小体積に流入する流体の量は

$\rho(x,y,z)v_x(x,y,z)dydz\delta t = w_x(x,y,z)dydz\delta t$

である。一方、図の黒色の面から流れ出す流体の量は

$w_x(x+dx,y,z)dydz\delta t$

である。よって正味の流出量は

$(w_x(x+dx,y,z) - w_x(x,y,z))dydz\delta t = \dfrac{\partial w_x}{\partial x}dxdydz\delta t$

となる。同様に y 方向と z 方向にも考察を行い、それらを合計すると、この微小体積から δt の間に流出する流体の量は

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right)dxdydz\delta t = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}\, dxdydz\delta t$$

となる。

次に、空間に閉曲面 S とこの閉曲面に囲まれている空間の領域 V を考察する。V を微小体積の集まりと考えて、$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{w}\, dxdydz$ を考えよう。ある一つの微小体積のある面から流出する流体の量はその同じ面を共通に持つ隣の微小体積に流入する流体の量と同じである。結局、V 内のすべての微小体

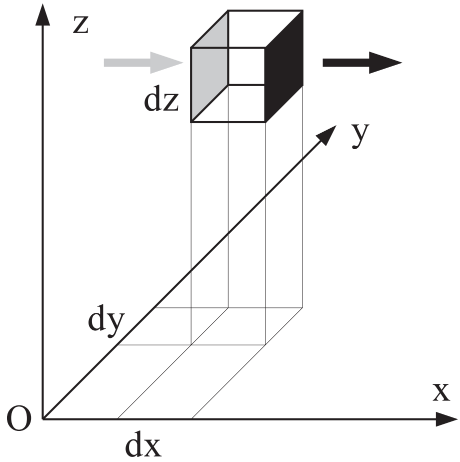

図 1.8　ガウスの定理

積の表面を通して流入出する流体の総和は、隣に微小体積を持たない微小体積に流入出する流体の量、すなわち閉曲面 S を通して流入出する流体の総和 $\int_S \vec{w} \cdot d\vec{S}$ になる。

1.4.4　ストークスの定理

あるベクトル $\vec{v}$ が与えられているとき、$\vec{\nabla} \times \vec{v}$ を考える。これを $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ と表記することもある。

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

の式が成り立つ。ここで、C は空間中の閉曲線で、S は閉曲線 C を縁とする曲面である。閉曲線のある点 $\vec{r}$ における接線ベクトル $\vec{t}(\vec{r})$ を導入して、$\vec{t}(\vec{r})ds = d\vec{s}$ と書いている。上の式を「ストークスの定理」と言う。

この定理は次のようにして証明される。図 1.9 のように微小な長方形 PQRS を考える。この長方形は流体の流れにさらされている。その流速を $\vec{v}$

とする。この長方形に沿って $\vec{v}\cdot d\vec{s}$ を計算すると、

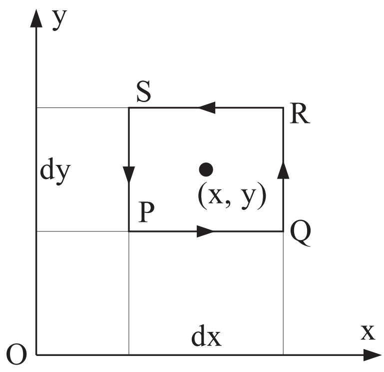

図 1.9　ストークスの定理 (a)

$$
\begin{aligned}
&\oint_{PQRS} \vec{v}\cdot d\vec{s} \\
=\;& v_x(x, y-\frac{dy}{2})dx \quad + \quad v_y(x+\frac{dx}{2}, y)dy \\
-\;& \underbrace{v_x(x, y+\frac{dy}{2})dx}_{-\frac{\partial v_x}{\partial y}dydx} \quad - \quad \underbrace{v_y(x-\frac{dx}{2}, y)dy}_{+\frac{\partial v_y}{\partial x}dxdy} \\
=\;& (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})dydx \\
=\;& (\vec{\nabla}\times\vec{v})_z\, dS
\end{aligned}
$$

となる。

次に閉曲線 C とそれを縁とするような曲面 S を考える。図 1.10 参照。この曲面を微小面積に分割して

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{S}$$

を求めよう。これは、上の議論を用いて微小面積のすべての縁について $\vec{v}\cdot d\vec{s}$ を計算しその総和を求めることによっても得られる。しかしながら、隣り合う微小面積の間でキャンセルする部分があるので、結局閉曲線 C に沿って $\vec{v}\cdot d\vec{s}$ を計算したもの、すなわち、$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s}$ と等しい。

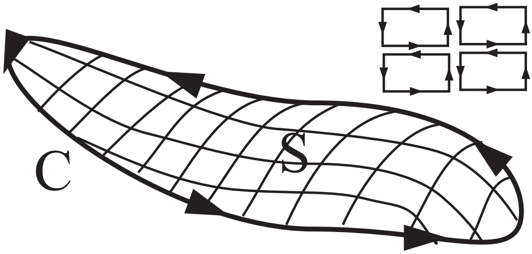

図 1.10　ストークスの定理 (b)

問題 1.4.1

ベクトルの微分の基本的な性質を証明せよ。

===== 解答 =====

問題 1.4.2

関数 $r, 1/r$ の勾配を求めよ。

===== 解答 =====

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$$
$$\vec{\nabla} r^{-1} = -r^{-2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

問題 1.4.3

ベクトル演算の公式を証明せよ。$\dfrac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ などと省略することがあるので注意のこと。

1. $\vec{\nabla} \cdot \{\vec{a} \times \vec{b}\} = \vec{b} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} - \vec{a} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{b}\}$
2. $\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} = 0$
3. $\vec{\nabla} \times \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} = -\vec{\nabla}^2 \vec{a} + \vec{\nabla}\{\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\}$

===== 解答 =====

1.

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla} \cdot \{\vec{a} \times \vec{b}\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{a} \times \vec{b})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{a} \times \vec{b})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{a} \times \vec{b})_z \\
&= \partial_x(a_y b_z - a_z b_y) + \partial_y(a_z b_x - a_x b_z) \\
&\quad + \partial_z(a_x b_y - a_y b_x) \\
&= b_x(\partial_y a_z - \partial_z a_y) + b_y(\partial_z a_x - \partial_x a_z) \\
&\quad + b_z(\partial_x a_y - \partial_y a_x) - a_x(\partial_y b_z - \partial_z b_y) \\
&\quad - a_y(\partial_z b_x - \partial_x b_z) - a_z(\partial_x b_y - \partial_y b_x) \\
&= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})
\end{aligned}$$

2.

$$\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_x\{\partial_y a_z - \partial_z a_y\} + \partial_y\{\partial_z a_x - \partial_x a_z\} \\
&\quad +\partial_z\{\partial_x a_y - \partial_y a_x\} \\
&= \partial_x\partial_y(a_z - a_z) + \partial_y\partial_z(a_x - a_x) \\
&\quad +\partial_z\partial_x(a_y - a_y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla} \times \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} \\
&= \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \partial_y a_z - \partial_z a_y \\ \partial_z a_x - \partial_x a_z \\ \partial_x a_y - \partial_y a_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_y\{\partial_x a_y - \partial_y a_x\} - \partial_z\{\partial_z a_x - \partial_x a_z\} \\ \partial_z\{\partial_y a_z - \partial_z a_y\} - \partial_x\{\partial_x a_y - \partial_y a_x\} \\ \partial_x\{\partial_z a_x - \partial_x a_z\} - \partial_y\{\partial_y a_z - \partial_z a_y\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\nabla^2 a_x + \partial_y\partial_x a_y + \partial_z\partial_x a_z + \partial_x\partial_x a_x \\ -\nabla^2 a_y + \partial_z\partial_y a_z + \partial_x\partial_y a_x + \partial_y\partial_y a_y \\ -\nabla^2 a_z + \partial_z\partial_y a_z + \partial_x\partial_y a_x + \partial_z\partial_z a_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\nabla^2 a_x + \partial_x\big(\partial_y a_y + \partial_z a_z + \partial_x a_x\big) \\ -\nabla^2 a_y + \partial_y\big(\partial_z a_z + \partial_x a_x + \partial_y a_y\big) \\ -\nabla^2 a_z + \partial_z\big(\partial_z a_z + \partial_x a_x + \partial_y a_y\big) \end{pmatrix} \\
&= -\nabla^2\vec{a} + \nabla\{\nabla \cdot \vec{a}\}
\end{aligned}
$$

1.5　直交座標系とその応用

座標系についての理解を深める。

1.5.1　デカルト座標系

直交した 3 つのベクトル $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ によって、任意の 3 次元空間の位置ベクトル $\vec{r}$ が

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

と表される。ここで、$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ をそれぞれ右手の人差指、中指、親指に対応させるとき右手系の座標系を選んだと言う。$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ を成分で表示する方法は既に述べた。

“直交した” ベクトルのとり方には他の選択もある。ここでは、極座標と円柱座標について考えよう。

1.5.2　極座標系

点対称な問題、例えば

原点に点電荷 q があり、その周囲の電界の様子を求める。

ような場合、次のような極座標系をとれば便利である。

空間上のある点 $\vec{r}$ を考える。これらの変数が他の変数 (r, θ, ϕ) によって、以下のように表されるとする。

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

この (r, θ, ϕ) を極座標と言う。直感的には、r, θ, ϕ はそれぞれ、原点からの距離、緯度、経度を表す変数である。

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ と同様なベクトルを定義しておくと、便利である。極座標の場合は、以下のように各点毎に異なった直交した 3 つのベクトルを定義しなければな

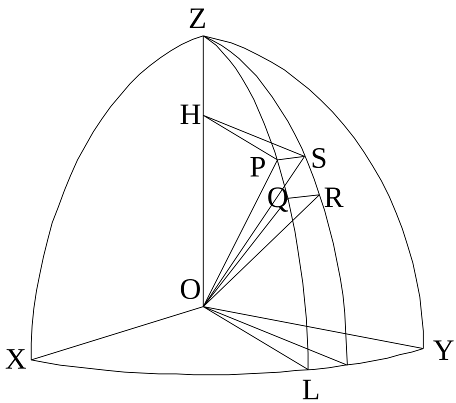

図 1.11　極座標

らない。

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{i}\sin\theta\cos\phi + \vec{j}\sin\theta\sin\phi + \vec{k}\cos\theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{i}\cos\theta\cos\phi + \vec{j}\cos\theta\sin\phi - \vec{k}\sin\theta \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi\end{aligned}$$

各点毎に 3 つの直交したベクトルを考えなければならないので、極座標は一見とっつきにくいかも分からない。しかしながら、極座標を用いることによって、問題が非常に簡単になる場合がある。

球の体積

半径 1 の球の体積 V は

$$V = \int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} dx\,dy\,dz \tag{1.5}$$

であるが、積分範囲を指定するために変数が相互に関連している。これでは、積分を行うことは困難である。そこで、この積分を極座標を用いて行う

ことを考えよう。

$$V = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \tag{1.6}$$

となり、積分を各変数ごとに独立に行うことができるようになり、計算は簡単になる。ただし、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2 \sin\theta \tag{1.7}$$

はヤコビアンである。ヤコビアンは一般に次のように表される。

$$\begin{gathered} \prod_i^n dx_i = \frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)} \prod_j^n dy_j \\ \frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \end{gathered} \tag{1.8}$$

また、熱力学の講義ノートも参照のこと。

ラプラス方程式

ラプラス方程式とは、

$$\vec{\nabla}^2 \psi = 0 \tag{1.9}$$

あるいは、

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_y^2)\psi = 0 \tag{1.10}$$

と表される方程式である。Maxwell の方程式の 1 番目の式（電荷の保存則）がこの形になっているので、電磁気学では非常に重要な方程式である。

$\vec{\nabla}$ は、

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\psi + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta}\psi + \vec{e}_\phi \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}\psi \tag{1.11}$$

となる。これは、点 (r, θ, ϕ) から、微小変化 dr を行ったときの点の移動距離は dr、微小変化 $d\theta$ を行ったときの点の移動距離は $r\,d\theta$、微小変化 $d\phi$ を行ったときの点の移動距離は $r\sin\theta\,d\phi$ であることから、推測できるだろう。証明は文献 [4] を参照のこと。

また、

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}^2\psi \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\partial_r(r^2\partial_r\psi) + \partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\psi) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi^2\psi\right)\end{aligned} \tag{1.12}$$

である。ψ が r だけの関数である場合は、ラプラス方程式は

$$\partial_r(r^2\partial_r\psi) = 0 \tag{1.13}$$

と非常に簡単になる。

1.5.3　円柱座標系

線対称な問題、例えば

> 原点を通る z 軸上に電荷密度 ρ で一様に分布した電荷があり、その周囲の電界の様子を求める。

ような場合、次のような円柱座標系をとれば便利である。

空間上のある点 $\vec{r}$ を考える。これらの変数が他の変数 (r, ϕ, z) によって、以下のように表されるとする。

$$x = r\cos\phi \tag{1.14}$$

$$y = r \sin\phi$$
$$z = z$$

この (r, ϕ, z) を円柱座標と言う。直感的には、円柱の表面の位置をどのように指定すれば良いかを考える。

$\vec{e_i}$ と同様なベクトルを定義しておくと、便利である。円柱座標の場合は、以下のように各点毎に異なった直交した 2 つのベクトルを新たに定義しなければならない。

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned} \tag{1.15}$$

円柱の体積

半径 1、高さ 1 の球の体積 V は

$$V = \int_0^1 dz \int_{x^2+y^2 \le 1} dx\, dy \tag{1.16}$$

であるが、積分範囲を指定するために変数が相互に関連している。これでは、積分を行うことは困難である。そこで、この積分を円柱座標を用いて行うことを考えよう。

$$V = \int_0^1 dz \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} \tag{1.17}$$

となり、積分を各変数ごとに独立に行うことができるようになり、計算は簡単になる。ただし、

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} = r \tag{1.18}$$

はヤコビアンである。

ラプラス方程式

円柱座標でのラプラス方程式を考えよう。

$\vec{\nabla}$ は、

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\psi + \vec{e}_\phi \frac{\partial}{r\partial \phi}\psi + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\psi \tag{1.19}$$

証明は文献 [4] を参照のこと。

また、

$$\vec{\nabla}^2\psi = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\psi) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2\psi + \partial_z^2\psi \tag{1.20}$$

である。ψ が r だけの関数である場合は、ラプラス方程式は

$$\partial_r(r\partial_r\psi) = 0 \tag{1.21}$$

と非常に簡単になる。

問題 1.5.1

極座標における単位ベクトルについて、以下の計算を行え。ただし、i, j は r, θ, ϕ である。

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

===== 解答 =====

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k$

ただし，δ_{ij} は $i=j$ の場合 $\delta_{ij}=1$ で，$i\neq j$ の場合 $\delta_{ij}=0$ となる関数である．また，$(i,j,k)=(r,\theta,\phi),(\theta,\phi,r),(\phi,r,\theta)$ の場合 $\varepsilon_{ijk}=1$ で，$(i,j,k)=(\theta,r,\phi),(r,\phi,\theta),(\phi,\theta,r)$ の場合 $\varepsilon_{ijk}=-1$ で，その他の場合は $\varepsilon_{ijk}=0$ である．

問題 1.5.2

円柱座標における単位ベクトルについて、以下の計算を行え。ただし、i,j は r,ϕ,z である。

1. $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$
2. $\vec{e}_i\times\vec{e}_j$

===== 解答 =====

1. $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$
2. $\vec{e}_i\times\vec{e}_j=\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k$

ただし，δ_{ij} は $i=j$ の場合 $\delta_{ij}=1$ で，$i\neq j$ の場合 $\delta_{ij}=0$ となる関数である．また，$(i,j,k)=(r,\phi,z),(\phi,z,r),(z,r,\phi)$ の場合 $\varepsilon_{ijk}=1$ で，$(i,j,k)=(r,\phi,z),(\phi,z,r),(z,r,\phi)$ の場合 $\varepsilon_{ijk}=-1$ で，その他の場合は $\varepsilon_{ijk}=0$ である．

問題 1.5.3

空間に以下のような式で表される電荷が分布している。全電荷を $\int \rho(\vec{r})dV$ を計算することによって求めよ。電荷の分布は原点に関して点対称であることに注意。

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 (r_0/r)^4$$

ただし、$r < r_0$ のときは電荷密度はゼロである。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
\int \rho(\vec{r})dV &= \int \rho_0 (r_0/r)^4 dV \\
&= \rho_0 \int_{r_0}^{\infty} 4\pi r^2 (r_0/r)^4 dr \\
&= 4\pi r_0^4 \rho_0 \int_{r_0}^{\infty} (1/r)^2 dr \\
&= 4\pi r_0^3 \rho_0
\end{aligned}$$

問題 1.5.4

極座標と円柱座標の場合に $\vec{\nabla}^2 \psi$ を計算せよ。ただし、極座標の場合は ψ が θ, ϕ に依存せず、円柱座標の場合には ψ が ϕ, z に依存しない場合を考えよ。

ヒント

極座標の場合、

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \Big(\sin\theta \partial_r (r^2 v_r) + r\partial_\theta (\sin\theta v_\theta) + r\partial_\phi v_\phi \Big)
\end{aligned} \tag{1.22}$$

である。また、円柱座標の場合、

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\partial_r(rv_r) + \frac{1}{r}\partial_\phi v_\phi + \partial_z v_z \tag{1.23}$$

である。

===== 解答 =====

1.

$$\vec{\nabla}^2\psi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi)$$

を計算する。ここで、ψ は動径方向のみの依存性を持つので、$\vec{\nabla}\psi$ は動径方向の成分しかもたない。すなわち、$\vec{\nabla}\psi = (\partial_r\psi)\vec{e}_r + 0\vec{e}_\theta + 0\vec{e}_\phi$ と表すことができる。従って、ヒントの式を使って、

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\partial_r(r^2\partial_r\psi) + r\partial_\theta(\sin\theta\, 0) + r\partial_\phi\, 0\Big)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\partial_r(r^2\partial_r\psi)\Big)\\
&= \frac{1}{r^2}\Big(\partial_r(r^2\partial_r\psi)\Big)
\end{aligned}$$

$r^2 \neq 0$ であるから，ラプラス方程式は $\partial_r(r^2\partial_r\psi) = 0$ と表される．

2. 同様に、与えられた条件から $\vec{\nabla}\psi = (\partial_r\psi)\vec{e}_r + 0\,\vec{e}_\phi + 0\,\vec{e}_k$ となるはずである。従って、ヒントの式を使って、

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2\psi &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi)\\
&= \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\psi) + \frac{1}{r}\partial_\phi\, 0 + \partial_z\, 0\\
&= \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\psi)
\end{aligned}$$

$r \neq 0$ であるから，ラプラス方程式は $\partial_r(r\partial_r\psi) = 0$ と表される．

1.6　近似計算

1.6.1　基本的な近似式

ある関数 $f(x)$ の $x=0$ の近傍でのテイラー展開は

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[d^k f(x)/dx^k]_{x=0}}{k!}\,x^k$$

である。ここで、x^i の項まで考慮し、x^{i+1} よりも冪の大きい項を無視する場合、x の i 次の項まで考えると言う。

問題 1.6.1

以下の近似計算を $x=0$ の近傍で x の 1 次まで求めよ。

1. $$(1+x)^{-1}$$

2. $$(1-x)^{-1}$$

3. $$(a-x)^{-1}$$

4. $$(1+x)^n$$

===== 解答 =====

1. $$(1+x)^{-1}\approx 1-x$$

2. $$(1-x)^{-1}\approx 1+x$$

3.

$$(a-x)^{-1} \approx \frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

4.

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

1.6.2　r に関わる近似式

原点のごく近傍 $\vec{r}\,'$ に存在する電荷から位置 $\vec{r}$ に存在する電荷への力を考える場合がある。その場合、この二つの電荷間の距離が必要であるが、以下のように近似すると便利な場合がある。

$$\begin{aligned}|\vec{r}-\vec{r}\,'| &= \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \\ &= \sqrt{|\vec{r}|^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'+|\vec{r}\,'|^2} \\ &\approx \sqrt{|\vec{r}|^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'} \\ &\approx |\vec{r}|\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{|\vec{r}|^2}\right) \qquad (1.24)\end{aligned}$$

一般に、

$$\begin{aligned}|\vec{r}-\vec{r}\,'|^n &\approx |\vec{r}|^n\left(1-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{|\vec{r}|^2}\right)^{n/2} \\ &\approx |\vec{r}|^n\left(1-n\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{|\vec{r}|^2}\right) \qquad (1.25)\end{aligned}$$

と近似できる。この近似式はよく使われる。

問題 1.6.2

以下の近似計算を行え。ただし、$|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$ とする。

$$|\vec{r}+\vec{r}\,'|^n-|\vec{r}-\vec{r}\,'|^n$$

===== 解答 =====

$$
\begin{aligned}
&|\vec{r}+\vec{r}'|^n - |\vec{r}-\vec{r}'|^n \\
&\approx |\vec{r}|^n \left(1 + n\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^2}\right) - |\vec{r}|^n \left(1 - n\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^2}\right) \\
&\approx 2n|\vec{r}|^{n-2}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)
\end{aligned}
$$

1.6.3 三角関数に関わる近似式

θ が小さい場合、

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta \tag{1.26}$$

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \tag{1.27}$$

と近似できる。ただし、θ は弧度法で測った角度である。

$\lim_{\delta\to 0} \frac{\sin\delta}{\delta} = 1$ は以下のようにして証明する。$|\delta| \ll 1$ の場合図を描けば明らかなように $|\sin\delta| < |\delta| < |\tan\delta|$ である。従って

$$\cos\delta < |\sin\delta/\delta| < 1$$

である。

$$\lim_{\delta\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{\delta\to 0} \cos\delta = 1$$

であるから、二つの間にある $|\sin\delta/\delta|$ も 1 に収束する。

問題 1.6.3

以下の近似式を証明せよ。ただし、θ に関しては 1 次まで取る。

1. $\cos\theta \approx 1$
2. $\tan\theta \approx \theta$

===== 解答 =====

1. 次の問題を見よ。
2. $\sin\theta \approx \theta$ を $\cos\theta$ で割ることによって証明する。

問題 1.6.4

$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の近似式を $\theta \ll 1$ の場合に、θ の 2 次の項まで求めよ。

$=====$ 解答 $=====$

テーラー展開を使って証明すれば良い。