# 電磁気学II：理学科物理コース

Y. Kondo

2009 年9 月14 日

電磁気学I では巨視的な電場と磁場について学んだ。
電磁気学II では微視的な電磁場、時間変動する電磁場について学ぶ。また、真空中だけでなく様々な物質がある場合の電磁場も取り扱う。この講義で取り上げる物質の電磁気学的な性質は、誘電的な性質、磁性、電気伝導、回路である。これらの性質の理解は今日のエレクトロニクスの発展は導いた。関連して、電気回路やエレクトロニクスの初歩にも触れる。
本講義をより良く理解するために、電磁気学解法II を同時に履修することが必要である。電磁気学の問題を解くことを通じて、物理で必要な数学を身に付けることもできる。また、「エレクトロニクス」の講義も併せて受講することが望ましい。
この講義ノートは岩波書店の物理入門コース3,4「電磁気学I,II」をベースにしている。教科書を購入する場合は、これらの本を推薦する。
この講義では単なる知識ではなく、様々な局面に応用できる計算能力を養うことが大きな目標である。従って、自ら手を動かして計算する必要があり、受け身に講義を聴くだけでは意味がない。TV を見るように講義を「見る」つもりの学生には意味がないので履修登録を行わないことを勧める。

以下この講義に関して注意を挙げる。
. 出席70% 以下は定期試験の受験資格を失う。
. 遅刻、早退は欠席1/2 回分として扱う。
. 講義を実施する上で必要な教員の指示に従わない場合は退室を命ずる場合がある。その場合は欠席扱いとする。
. 定期試験の成績のみで評価を行う。
. 教科書は近藤のホームページにアップしてあるので、必要に応じて印刷すること。

# 第 1 章

# 物理数学

## 1.1 微分積分

### 1.1.1 極限

- 数列 $a_n$ がある一定の値 $\alpha$ に収束するとは

$$\forall \epsilon \ \exists n_0 \in \boldsymbol{N} \text{ s. t. } [n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon]$$

とできることである。ただし、$\boldsymbol{N}$ は自然数の集合である[*1]。

- $f(x)$ を実関数 、$x_0$ を実数とした場合、

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$$

であるとは、

$$\forall \epsilon \ \exists \delta \in \boldsymbol{R}$$
$$\text{s. t. } [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \epsilon]$$

とできることである。ただし、$\boldsymbol{R}$ は実数の集合である。

### 1.1.2 微分

微分は拡張された傾きの概念と考えることができる。

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- 物理でよく使われる関数の微分

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x$$
$$\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$$

- 重要な公式

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = (\frac{d}{dx} f(x)) g(x) + f(x)(\frac{d}{dx} g(x))$$
$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(\frac{d}{dx} f(x)) g(x) - f(x)(\frac{d}{dx} g(x))}{(g(x))^2}$$

$y = f(x), x = g(t) \Rightarrow y = f(g(t))$ である時、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

[*1] s. t. は such that を省略したものであり、A s. t. B とは、B を満たす A という意味である。

### 1.1.3 積分

定積分を以下のように定義する。

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{1 < i < n} f(a + \frac{b - a}{n} i) \frac{b - a}{n}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{a < x_i < b} f(x_i) \Delta x$$

$x_i = a + \dfrac{b - a}{n} i, \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$ である。

一方、不定積分は

$$F_a(\xi) = \int_a^\xi f(x) dx$$

と定義される。

### 1.1.4 偏微分 (偏導関数) : 多変数の関数への微分の拡張

簡単のために 2 変数の関数 $u = f(x, y)$ を考え、$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ を以下のように定義する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

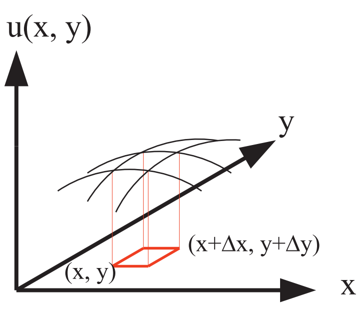


図 1.1

### 1.1.5　多重積分

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}\in V} f(\vec{r})dv &= \int_V f(\vec{r})dxdydz \\ &= \lim_{\Delta V\to 0}\sum f(\vec{r})\Delta V \\ &= \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\sum f(\vec{r})\Delta x\Delta y\Delta z\end{aligned}$$

## 1.2　ベクトルの基礎

### 1.2.1　3 次元ベクトル

図 1.2 のような直交した 3 つの軸に平行な 3 つの単位ベクトル $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ によって、任意の 3 次元ベクトルが

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

と表される。$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ をそれぞれ右手の人差指、中指、親指に対応させるとき右手系の座標系を選んだと言う。

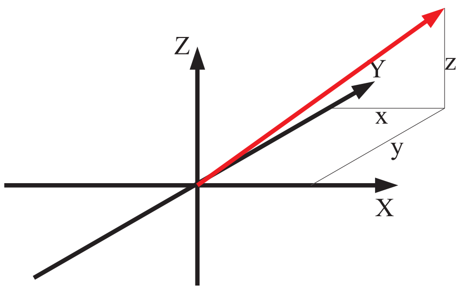


図 1.2　3 次元ベクトル

ベクトル $\vec{a}$ が位置ベクトルならば $a_x, a_y, a_z$ は長さの次元を持つ量であるし、力を表すベクトルならば各成分は力の次元を持つ量である。ベクトルの大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

によって表される。

### 1.2.2　基本演算

二つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ があり、その成分表示が

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

としよう。

- ベクトル和

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

- スカラー倍

$$c\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,a_x \\ c\,a_y \\ c\,a_z \end{pmatrix}$$

- 内積

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

注意：

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a} &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{b}\cdot\vec{a} \\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

- ベクトル積

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

注意：

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{a} &= \vec{0} \\ \vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{b}\times\vec{a} \\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}\end{aligned}$$

### 1.2.3　直線と平面を表すベクトル式

- 直線の式

$$\vec{r}(s) - \vec{r}_0 = \vec{v}\,s$$

- 平面の式

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$$

## 1.3　複素数

### 1.3.1　複素数

複素数は 2 乗すると $-1$ になる虚数単位 $i$ を導入して、

- $z = x + iy$ と定義される数のことである。ただし、$x, y$ は実数である。
- 複素数の大きさは $\sqrt{x^2 + y^2}$ で定義され、$\tan\theta = y/x$ は偏角と呼ばれる。
- $z$ の複素共役は $z^*$ と書かれ $z^* = x - iy$ である。
- 複素数を引数とする指数関数の微分は虚数を実数の定数と同様に扱って計算すれば良い。

### 1.3.2　複素数の基本的な性質

以下のような性質がある。

- $z$ が実数ならば、$z^* = z$
- $z$ が純虚数ならば、$z^* = -z$
- $(z^*)^* = z$
- $|z| = |z^*|$
- $z + z^* = 2\,\Re(z)$
- $z - z^* = 2i\,\Im(z)$
- $zz^* = |z^2|$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

ただし、$\Re, \Im$ はそれぞれ複素数の実数部分、虚数部分を取り出すことを意味する記号である。

### 1.3.3　複素平面

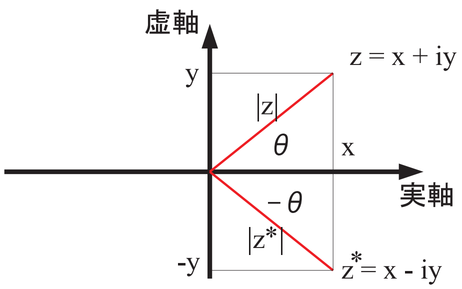


図 1.3　複素平面。

### 1.3.4　オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

## 1.4　ベクトルに対する微積分

### 1.4.1　ベクトルの微分

$$\frac{d\vec{a}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{a}(s+\Delta s) - \vec{a}(s)}{\Delta s}$$

以下の性質がある。$\phi$ はスカラー関数である。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\phi\vec{a}) &= \left(\frac{d}{ds}\phi\right)\vec{a} + \phi\left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right)\\
\frac{d}{ds}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right)\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\left(\frac{d}{ds}\vec{b}\right)\\
\frac{d}{ds}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) &= \left(\frac{d}{ds}\vec{a}\right)\times\vec{b} + \vec{a}\times\left(\frac{d}{ds}\vec{b}\right)
\end{aligned}$$

### 1.4.2　ベクトル場とベクトル演算子

- 勾配 $\mathrm{grad}\,\phi = \partial_x\phi\,\vec{i} + \partial_y\phi\,\vec{j} + \partial_z\phi\,\vec{k}$
- 発散 $\mathrm{div}\,\vec{a} = \partial_x\,a_x + \partial_y\,a_y + \partial_z\,a_z$
- 回転

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,\vec{a}\\
&= (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\vec{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\vec{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\vec{k}
\end{aligned}$$

ベクトル演算子（ナブラ）$\vec{\nabla} = \partial_x\,\vec{i} + \partial_y\,\vec{j} + \partial_z\,\vec{k}$ により、

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\,\phi &= \vec{\nabla}\phi\\
\mathrm{div}\,\vec{a} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a}\\
\mathrm{rot}\,\vec{a} &= \vec{\nabla}\times\vec{a}.
\end{aligned}$$

### 1.4.3　ガウスの定理

$$\int_S \vec{w}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{w}\,dv$$

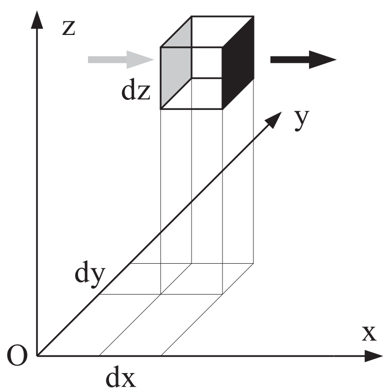


図 1.4　ガウスの定理

### 1.4.4　ストークスの定理

$$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{S}$$

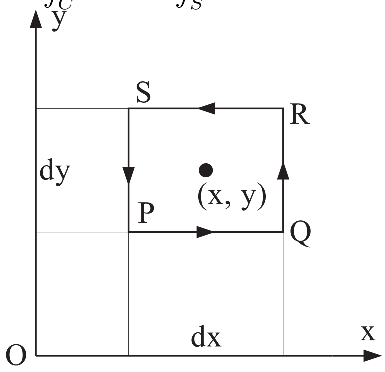


図 1.5　ストークスの定理 (a)

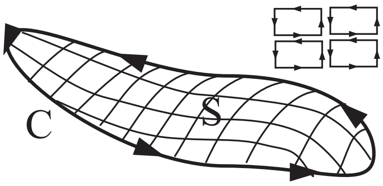


図 1.6　ストークスの定理 (b)

## 1.5　直交座標系とその応用

### 1.5.1　デカルト座標系

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- ラプラス方程式

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\psi = 0$$

### 1.5.2　極座標系

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i}\sin\theta\cos\phi + \vec{j}\sin\theta\sin\phi + \vec{k}\cos\theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{i}\cos\theta\cos\phi + \vec{j}\cos\theta\sin\phi - \vec{k}\sin\theta \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi \end{aligned}$$

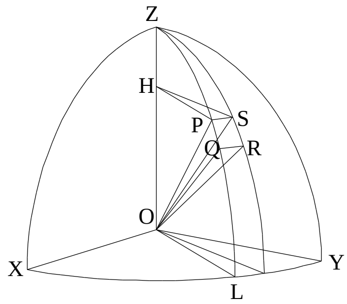


図 1.7　極座標

- ヤコビアン

$$dxdydz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}d\phi d\theta dr = r^2\sin\theta\, d\phi d\theta dr$$

一般には、

$$\prod_i^n dx_i = \frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\prod_j^n dy_j$$

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

- ラプラス方程式

  $\psi$ が $r$ だけの関数である場合は、ラプラス方程式は

$$\partial_r(r^2\partial_r\psi) = 0$$

### 1.5.3　円柱座標系

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi \\ \vec{e}_z &= \vec{k} \end{aligned}$$

- ヤコビアン

$$dxdydz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,z)}d\phi drdz = r\,d\phi drdz$$

- ラプラス方程式

  $\psi$ が $r$ だけの関数である場合は、ラプラス方程式は

$$\partial_r(r\partial_r\psi) = 0$$

# 第 2 章

# 電磁気学 I の復習とベクトル・ポテンシャル

## 2.1 クーロンの法則

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

ただし $\epsilon_0$ は「真空の誘電率」である。

## 2.2 電場

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

### 2.2.1 点電荷のつくる電場

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

### 2.2.2 電気力線

各点における接線がその点における電場 $\vec{E}$ の方向と一致するような曲線、すなわち「電気力線」、によって電場を視覚化することができる。

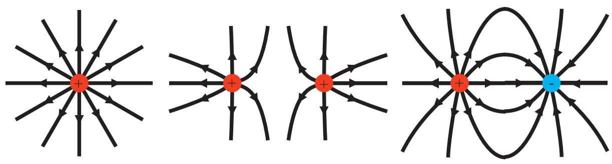


図 2.1

## 2.3 ガウスの法則

### 2.3.1 立体角

ある面 $dS$ を原点から見た時

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

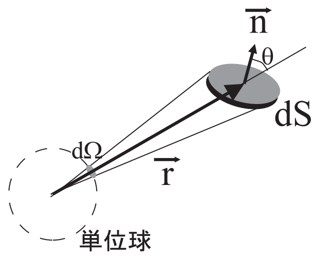


図 2.2

### 2.3.2 ガウスの法則

$$\epsilon_0\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} q：(q \text{ が } S \text{ の中にある時}) \\ 0：(q \text{ が } S \text{ の外にある時}) \end{cases}$$

## 2.4 電位

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

原点にある点電荷 $q$ によるポテンシャルは

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}.$$

$\phi(\vec{r}) =$ 一定 となる $\vec{r}$ は一つの曲面を作り、「等電位面」と呼ぶ。この等電位面に電気力線は直交する。電位の単位は「J/C」で「V」と略記し「ボルト」と呼ぶ。

## 2.5 導体

導体（ここでは、金属を考える）を電場中に置くと伝導電子が動き、片側の表面が正に、他の側が負に帯電する。このような現象を「静電誘導」と言う。静電誘導の結果、導体内の電場はゼロになる。すなわち、導体表面は等電位面になる。よって、導体のすぐ外側の電場は導体表面に垂直である。

導体表面においてガウスの法則を適用することによって、

$$\epsilon_0 E\Delta S = \sigma\Delta S$$

となる。よって、表面電荷密度 $\sigma$ と導体のすぐ外側の電場の間の関係

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}$$

が分る。ただし、$\vec{n}$ は表面に垂直な単位ベクトルである。

## 2.6 静電容量：キャパシター

$$Q = C\phi$$

### 2.6.1 キャパシターの接続

- 直列接続

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

- 並列接続

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

### 2.6.2 電束密度

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$$

## 2.7 電場のエネルギー

コンデンサーに蓄えられるエネルギーは

$$W = \int_0^q \phi dq = \int_0^q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

で、電場のエネルギーとして蓄えられている。その密度 $w$ は

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2\epsilon_0}D^2.$$

## 2.8 磁石と磁場

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m q'_m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

ただし、、$\mu_0$ は真空の「透磁率」と言う。この時の磁荷の単位を「ウェーバー（Wb=J/A)」と言う。

電荷の場合と同様に「磁場」を考えることができる。電場と同様に磁場の強さ「$\vec{H}$」をプローブ磁荷 $q_m$ に受ける力 $\vec{F} = q_m\vec{H}$ によって定義する。

### 2.8.1 磁場中の磁石

$$\vec{N} = \vec{p}_m \times \vec{H}$$

### 2.8.2 磁場に関するガウスの法則

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

## 2.9 ローレンツ力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

### 2.9.1 サイクロトロン運動

$$R = \frac{mv}{\mid q \mid B}, \qquad T = \frac{2\pi m}{\mid q \mid B}$$

### 2.9.2 フレミングの左手の法則

$$\vec{F} = \ell\vec{I}\times\vec{B}$$

## 2.10 ビオ-サバールの法則

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2}d\vec{s}\times\frac{\vec{r}}{r}$$

## 2.11 アンペールの法則

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{r} = \begin{cases} 0 & : \ C\text{が電流を囲まない時} \\ I & : \ C\text{が電流を右ネジの向きに一周する時} \\ -I & : \ C\text{が電流を右ネジの向きと反対向きに一周する時} \end{cases}$$

## 2.12 Maxwell の方程式

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$
$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$
$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{r} = \sum_i I_i$$

これらに、電磁誘導の法則（後出）を加わえて Maxwell の方程式と言う。

## 2.13　ベクトル・ポテンシャル

### 2.13.1　静電ポテンシャルとベクトル・ポテンシャル

静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ のように静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ によって表すことが可能である。このように表すことができるのは、$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ であることによっている[*1]。静電場を計算する場合、静電ポテンシャルをまず求めて、それから電場を計算する方が便利な場合が多い。

同様なことが静磁場にもある。ただし、静磁場の基本法則は

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{i}(\vec{r})$$

であるので、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

を考える。このように表すと式 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$ は自動的に満たされるので[*2]、2 番目の式のみを考えれば良いことになる。ただし、この時点では $\vec{A}(\vec{r})$ の存在は証明されていない。

### 2.13.2　ベクトル・ポテンシャルの任意性

静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を表す静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ に定数 $c$ を加えて、新しい静電ポテンシャル $\phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + c$ を作っても、元と同じ静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を表すことができる。

同様のことがベクトル・ポテンシャルの場合にもある。すなわち、任意のスカラー関数 $\chi(\vec{r})$ に対して $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi(\vec{r})) = 0$ であるから[*3]、

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r})$$

は、$\vec{A}$ と同じ磁場を作る。このようなベクトル・ポテンシャルの任意性のおかげで最も便利なベクトル・ポテンシャルを用いることが許される。

### 2.13.3　ベクトル・ポテンシャル

ベクトル・ポテンシャルが存在することを証明する。電流分布 $\vec{i}(\vec{r})$ から $\vec{A}(\vec{r})$ を決めることができれば、証明できたことになる。

式 2.1 に $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ を代入すると、

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\right) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})\right)$$

だから、$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ を仮定すると

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{i}(\vec{r})$$

が得られる。従って、

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

のように $\vec{A}(\vec{r})$ を求めることができる[*4]。

次にこのようにして求めた $\vec{A}(\vec{r})$ が $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ を満たすことを示せば証明は完了する。定義に従って、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{i}(\vec{r}')\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{i}(\vec{r}')\left(-\vec{\nabla}' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) dV'\end{aligned}$$

が得られる。ここで$\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ であるのに対して $\vec{\nabla}' = (\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})$とする。さらに、

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) = \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{i}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)$$

だから、

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) dV'\end{aligned}$$

となる。定常電流では電荷の保存則より $\vec{\nabla} \cdot \vec{i}(\vec{r}) = 0$ である。一方、第 2 項はガウスの定理により表面積分になり、十分大きな体積をとることによりその積分はゼロにすることができる。以上により、$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ が証明できた。

[*1] すべてのベクトル場は渦無し場と渦有り場の和として表すことができることを思い出すこと。

[*2] ベクトル演算の公式 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$ を思い出すこと。

[*3] ベクトル演算の公式を思い出すこと

[*4] ポアソン方程式

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})$$

の解は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

で与えられる。ベクトル・ポテンシャルの場合は各成分毎にポアソン方程式を解けば良い。