第 1 章

物理数学

1.1　微分積分

問題 1.1.1

以下の計算を行え。

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} &= \\
\lim_{x\to 0} 1 + x &= \\
\lim_{x\to 0} 1 + x^2 + x^3 &= \\
\lim_{x\to 0} x/x &= \\
\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3}{x} &=
\end{aligned}
$$

問題 1.1.2

微分の定義に従って関数 $x^2, x^n, \sin x, a^x$ の微分を行え。定義に従って計算を行うとは、以下のような計算を行なうことである。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

===== 解答 =====

- $$\frac{d}{dx}x^2$$

- $$\frac{d}{dx}x^n$$

- $$\frac{d}{dx}\sin x$$

- $$\frac{d}{dx}a^x =$$

問題 1.1.3

$\ln x$ の微分を求めよ。

問題 1.1.4

$\vec{r} = {}^{T}(x, y, z)$ である。$1/r, r, r^2$ を x, y, z で偏微分せよ。

問題 1.1.5

1. 半径 1 の円の面積を計算せよ
2. 半径 1 の球の体積を求めよ。

ヒント：

それぞれ、

$$\int_{x^2+y^2<1} dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

$$\int_{x^2+y^2+z^2<1} dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

を計算すれば良い。

1.2　ベクトルの基礎

問題 1.2.1

内積とベクトル積の性質を自ら計算して確認せよ。

===== 解答 =====

裏面も使うこと。

2

問題 1.2.2

ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が与えられている。

1. 次の計算を $i = 1 \sim 3$ について行え。
$$\vec{e'_i} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \vec{e}_i$$
2. $\vec{e'_i}.\vec{e'_j}$（ただし、$i, j = 1, 2, 3$）を 9 通りすべて計算し、できるだけ簡単な形にせよ。
3. $\vec{e'_i} \times \vec{e'_j}$（ただし、$i, j = 1, 2, 3$）を 9 通りすべて計算し、できるだけ簡単な形にせよ。

===== 解答 =====

裏面も使うこと。

問題 1.2.3

真空中の位置 $\vec{r}_i$ に電荷 Q_i がある。ただし、$i = 1, 2$ を取る。電荷 Q_i に働いている静電気力 $\vec{F}_i$ をベクトルを用いて表せ。

===== 解答 =====

問題 1.2.4

位置 $\vec{r}_0$ に電荷 Q_0 がある。位置 $\vec{r}$ における電界 $\vec{E}(\vec{r})$ をベクトルによって表せ。

===== 解答 =====

問題 1.2.5

位置 $\vec{r}_i$ に電荷 Q_i がある。位置 $\vec{r}$ における電界 $\vec{E}(\vec{r})$ をベクトルによって表せ。

===== 解答 =====

1.3　複素数

問題 1.3.1

複素数の基本的な性質を確認せよ。

===== 解答 =====

裏面も使うこと。

問題 1.3.2

オイラーの公式を証明せよ。

===== 解答 =====

問題 1.3.3

オイラーの公式を用いて、以下の計算を行なえ。

ヒント：$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$

1. $\cos(\theta_1+\theta_2)$
2. $\cos(\theta_1-\theta_2)$
3. $\sin(\theta_1+\theta_2)$
4. $\sin(\theta_1-\theta_2)$

===== 解答 =====

問題 1.3.4

1. 以下の微分方程式（y_0, k は定数）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = y_0 e^{ikx}$$

で $y = y_1 e^{ikx}$ が解になるように、定数 y_1 を定めよ。

2. 以下の微分方程式（y_0, ω は定数）

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + y = y_0 e^{i\omega t}$$

で $y = y_1 e^{i\omega t}$ が解となるように定数 y_1 を定めよ。

===== 解答 =====

問題 1.3.5

以下の計算を行なえ。

1. $i^i =$
2. $\sqrt{i} =$

===== 解答 =====

1.4　ベクトルに対する微積分

問題 1.4.1

ベクトルの微分の基本的な性質を証明せよ。

===== 解答 =====

3

問題 1.4.2

関数 $r, 1/r$ の勾配を求めよ。

===== 解答 =====

問題 1.4.3

ベクトル演算の公式を証明せよ。$\dfrac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ などと省略することがあるので注意のこと。

1. $\vec{\nabla} \cdot \{\vec{a} \times \vec{b}\} = \vec{b} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} - \vec{a} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{b}\}$
2. $\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} = 0$
3. $\vec{\nabla} \times \{\vec{\nabla} \times \vec{a}\} = -\nabla^2 \vec{a} + \vec{\nabla}\{\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\}$

===== 解答 =====

1.5　直交座標系とその応用

問題 1.5.1

極座標における単位ベクトルについて、以下の計算を行え。ただし、i, j は r, θ, ϕ である。

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

===== 解答 =====

問題 1.5.2

円柱座標における単位ベクトルについて、以下の計算を行え。ただし、i, j は r, ϕ, z である。

1. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
2. $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

===== 解答 =====

問題 1.5.3

空間に以下のような式で表される電荷が分布している。全電荷を $\int \rho(\vec{r})dV$ を計算することによって求めよ。電荷の分布は原点に関して点対称であることに注意。

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0(r_0/r)^4$$

ただし、$r < r_0$ のときは電荷密度はゼロである。

===== 解答 =====

2.

問題 1.5.4

極座標と円柱座標の場合に $\vec{\nabla}^2\psi$ を計算せよ。ただし、極座標の場合は ψ が θ, ϕ に依存せず、円柱座標の場合には ψ が ϕ, z に依存しない場合を考えよ。

ヒント

極座標の場合、

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \quad (1.1) \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\partial_r(r^2v_r) + r\partial_\theta(\sin\theta v_\theta) + r\partial_\phi v_\phi\Big) \end{aligned}$$

である。また、円柱座標の場合、

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\partial_r(rv_r) + \frac{1}{r}\partial_\phi v_\phi + \partial_z v_z \quad (1.2)$$

である。

===== 解答 =====

1.

4

第 2 章

電磁気学 I の復習とベクトル・ポテンシャル

ここでは前期の電磁気学 I の復習を行い、新たにベクトル・ポテンシャルについて学ぶ。今後は既に復習した物理数学を活用して講義を進めるので、物理数学の復習を行っておくこと。

2.1　クーロンの法則

2.2　電場

2.3　ガウスの法則

問題 2.3.1

半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ（正）で電荷が分布している場合の電場を求めよ。

===== 解答 =====

===== 解答 =====

問題 2.3.1 より、

2.4　電位

問題 2.4.1

半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ（正）で電荷が分布している場合の電位を求めよ。

2.5　導体

2.6　静電容量：キャパシター

問題 2.6.1

半径 a の導体球の静電容量を求めよ。問題 2.4.1 と静電容量の定義から考えれば良い。

===== 解答 =====

問題 2.6.2

平行平板コンデンサーの静電容量を求めよ。ただし、極板の面積を S、間隔を d とする。端を除けば、極板には一様な電荷 σ が誘起されており、電場は極板に垂直であると考えても良いことを用いる。

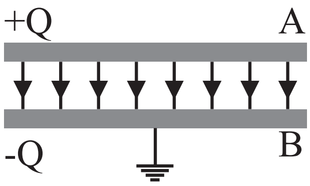


図 2.3

===== 解答 =====

2.7　電場のエネルギー

2.8　磁石と磁場

2.9　ローレンツ力

2.10　ビオ-サバールの法則

問題 2.10.1

無限に長い（$(0,0,-\infty) \to (0,0,\infty)$）直線電流による磁場を考える。導線には強さ I の電流が流れている。直線電流の微小部分 $dz\,\vec{k}$ が点 $(a,0,0)$ に作る微小磁場 $d\vec{H}$ は

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2}(dz\,\vec{k}) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

となる。ただし、$\vec{k}$ は z 方向の単位ベクトルである。これを積分することによって、磁場を求めよ。

===== 解答 =====

5

2.11 アンペールの法則

問題 2.11.1

無限に長い断面が半径 R の円形の導線に電流 I が流れている場合の磁場を以下の手順に従って求めよ。

1. 電流密度 $i(\vec{r})$ を求めよ。
2. ビオ-サバールの法則より磁力線には動径方向の成分がないことを説明せよ。
3. アンペールの法則より磁場の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

2.11.1 Maxwell の方程式

2.12 ベクトル・ポテンシャル

問題 2.12.1

以下のベクトル・ポテンシャルが作る磁場を計算せよ。

1. $\vec{A}_1 = (-By, 0, 0,)$
2. $\vec{A}_2 = (0, Bx, 0)$
3. $\vec{A}_3 = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$

===== 解答 =====

どのベクトル・ポテンシャルでも同じ磁場を与える。

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_i = (0, 0, B)$$

問題 2.12.2

非常に長い線分上を流れる電流 I が点 $\vec{r}$ につくるベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ を求めよ。線分は $(0, 0, -\ell)$ から $(0, 0, \ell)$ で、$\ell \gg r$ とする。また、このベクトル・ポテンシャルから得られる磁場を計算せよ。

ヒント：

$$\frac{d}{dx} \log\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

===== 解答 =====

となる。ここで、ℓ は定数としてその微分はゼロとしている。

問題 2.12.3

非常に大きな半径 R の円盤上に電荷が一様に分布している（面電荷密度は ρ_0）。最初円盤の中心は原点にあり、やがて x 方向に速さ v_0 で動き始めた。ただし、円盤は常に xy 面上にある。動き始めた瞬間を考えよう。

1. 円盤が動くことによって電流が生じる。その面電流密度を求めよ。
2. 円盤が動くことによって生じるベクトル・ポテンシャルを求めよ。ただし、点 $\vec{r}$（$r \ll R$、$z > 0$）の点について調べれば良い。
3. 求めたベクトル・ポテンシャルから磁場を求めよ。

===== 解答 =====

問題 2.12.4

ベクトル・ポテンシャルを用いてビオ-サバールの法則を導出せよ。

===== 解答 =====

6

第 3 章

電磁気学 II

3.1 電磁誘導

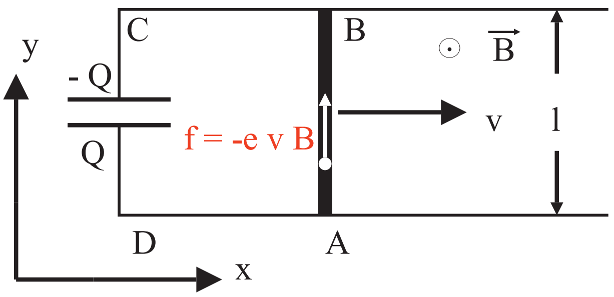


図 3.1 ローレンツ力による起電力。

問題 3.1.1

直径 10 cm、2000 回巻のコイルを地球磁場（5×10^{-5} T の中で毎秒 15 回の早さで回転させた。コイルに生じる起電力を求めよ。ただし、回転の軸はコイルの中心軸とは直交している。

===== 解答 =====

問題 3.1.2

電流 I が z 軸方向に流れている。z-x 面に平行な小さな 1 巻コイル（面積は S）を一定の早さ v で電流から遠ざけた。コイルに生じる起電力を求めよ。x-y 面に平行なコイルの場合はどうなるか？

===== 解答 =====

問題 3.1.3

Fig. 3.1 でキャパシターの代わりに抵抗 R を接続した。（その抵抗以外の導線の抵抗は無視できるとする。）

1. 回路に流れる電流と消費される電力を求めよ。
2. 辺 AB に働く力とその力による仕事率を求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.1.4

直径 5 cm、長さ 20 cm、2000 回巻のコイルの自己インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.1.5

半径 $a_1, a_2 (a_2 > a_1)$ の 2 本の金属管により、同軸ケーブルを作った。一端には抵抗 R を、他端には電源をつなぎ電流 I を流した。

1. アンペールの法則を用いて、同軸ケーブルの内外に生じる磁界を求めよ。
2. 長さが ℓ の場合、この同軸ケーブルの自己インダクタンスを求めよ。磁束が貫く面積は $\ell \times (a_2 - a_1)$ である。

===== 解答 =====

問題 3.1.6

2 つの細長いコイルがある。それぞれの単位長さ当たりの巻数は n_1, n_2、長さは ℓ_1, ℓ_2、断面積は S_1, S_2 である。コイル 1 の中にコイル 2 を重ねた場合（$S_1 > S_2$）、コイル 1 と 2 の間の相互インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.1.7

2 つの回路がある。回路 1 のインダクタンスを L、回路 1 と回路 2 の間の相互インダクタンスを M とする。回路 1 に変動する起電力 $\phi_1(t)$ をかけた時に回路 2 に生じる電圧 $\phi_2(t)$ を求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.1.8

半径 a_1, a_2 の円形回路が、同一平面上に中心を同じくして置かれている。ただし、$a_1 \gg a_2$ である。

1. 円形回路（半径 a）に電流 I が流れている。その回路の中心の磁束密度をビオ・サバールの法則を用いて計算せよ。
   ヒント：$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds$ を計算する。ただし、
   - $\vec{r}' = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$
   - $\vec{t}(\vec{r}') = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$
   - $\vec{r} = (0, 0, 0)$
   - $ds = a d\theta$

   として θ を 0 から 2π まで積分する。
2. 回路 1 に電流 I_1 を流した時に回路 2 を貫く磁束から相互インダクタンスを求めよ。
3. 円形回路（半径 a）に電流 I が流れている。その回路は xy 平面上にあるとして、x 軸上の十分遠方にある点での磁束密度を計算せよ。
   ヒント：小問 1 と同様に計算する。ただし、$\vec{r} = (x, 0, 0)$ で、$x \gg a$ であることに注意。また、近似式 $(1+x)^n \approx 1 + nx, \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ （ただし、$x \ll 1$）を用いこと。
4. 回路 2 に電流 I_2 を流した時に回路 1 を貫く磁束から相互インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

3.2　回路

問題 3.2.1

インダクタンスが 1 H のコイルに 1 A の電流が流れているときの磁場のエネルギーを容量 0.1 μF のキャパシターの電界のエネルギーに変換した。キャパシターに現れる電圧はいくらか?

===== 解答 =====

問題 3.2.2

インダクタンス L の超伝導コイルに電流 I が流れていた。ところが、わずかな残留抵抗 R のために、コイルの電流は徐々に減少した。電流の時間変化を微分方程式を解くことによって求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ における電流を I_0 とする。さらに、コイルの電流がゼロになるまでに、抵抗 R で発生するジュール熱を計算せよ。また、それを、初めに蓄えられていた静磁場のエネルギーと比較せよ。

===== 解答 =====

問題 3.2.3

問題 3.1.5 の場合、金属管の間に生じる静磁場のエネルギーを求めよ。それと先に計算した L から求めた回路のエネルギー $\dfrac{1}{2}LI^2$ を比較せよ。

===== 解答 =====

問題 3.2.4

自己インダクタンスが L_1, L_2 で相互インダクタンスが M の 2 つの回路がある。

1. 回路 1 にのみ電流 I_1 を流したときに回路に蓄えられるエネルギー U_1 はいくらか?
2. コイル 1 の電流を一定に保ちながら、コイル 2 に電流を流し始める。コイル 2 の電流が I になったときに、コイル 1,2 を貫く磁束はいくらか?
3. 誘導起電力 ϕ_2 に抗してコイル 2 の電流を 0 から I_2 まで増加するのに必要な仕事 U_2 はいくらか？
4. コイル 2 の電流が 0 から I_2 まで変化する間、誘導起電力 ϕ_1 に抗してコイル 1 の電流を I_1 に維持するために必要な仕事 U_3 はいくらか。
5. U_1, U_2, U_3 の合計を求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.2.5

以下の回路において抵抗がゼロの場合を考える。

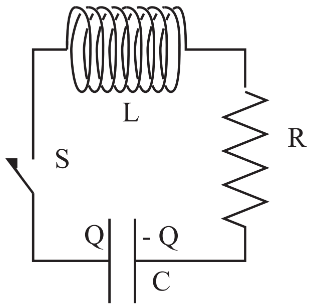


図 3.2　電気振動

1. キャパシターに蓄えられる最大のエネルギーを求めよ。そのときのコイルに蓄えられているエネルギーはいくらか?
2. コイルに蓄えられる最大のエネルギーを求めよ。そのときのキャパシターに蓄えられているエネルギーはいくらか?

===== 解答 =====

問題 3.2.6

キャパシター C、抵抗 R、スイッチ S が直列回路を構成している。最初キャパシターには電荷 Q_0 が蓄えられていた。

1. スイッチを閉じた後のキャパシターの電圧、抵抗に流れる電流を求めよ。
2. 抵抗 R で発生するジュール熱と最初キャパシター C に蓄えられていたエネルギーを比較せよ。

===== 解答 =====

問題 3.3.2

銅と石英ガラスに、振動電界がかかっている。伝導電流と変位電流の比を求めよ。ただし、銅の電気伝導度 (σ) は $5.8 \times 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$、石英ガラスのそれは $10^{-15}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ とする。

ただし，変位電流と伝導電流の大きさの比は

$$\frac{\epsilon_0 \omega E_0}{\sigma E_0} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma}$$

である。

1. 振動数 $50\ \mathrm{s}^{-1}$ の場合。
2. 振動数 $10^{10}\ \mathrm{s}^{-1}$ の場合。

===== 解答 =====

3.3 マクスウェルの方程式と電磁波

問題 3.3.1

振幅 E_0、周波数 $f = \omega/2\pi$ の振動電界がある。変位電流密度の最大値を求めよ。

1. $E_0 = 1\ \mu\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$、$f = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ の電波の場合。
2. $E_0 = 2 \times 10^6 \mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$、$f = 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$ のレーザー光の場合。

===== 解答 =====

9

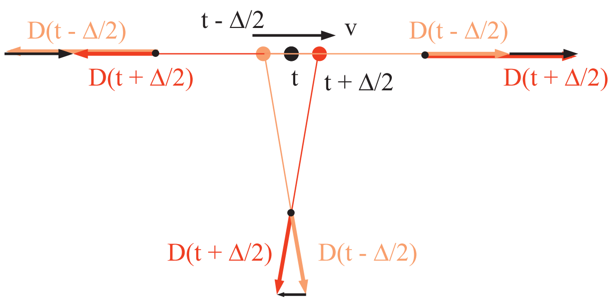


図 3.3　運動している荷電粒子による電束電流の考察

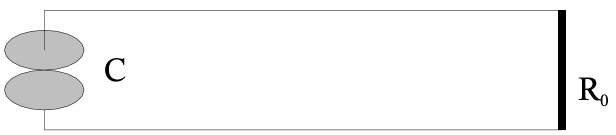
問題 3.3.3

早さ v で右向きに運動している荷電粒子による変位電流を図を用いて考察せよ。変位電流の概略はどのように表されるか?また、進行方向に垂直で荷電粒子を含む平面の磁場はどのようになるか?

===== 解答 =====

問題 3.3.4

半径 R の円形の平行平板キャパシターに最初電荷 Q_0 が蓄えられていた。外部に回路（具体的には、抵抗 R_0）をつなぎ、時刻 t に電流 $I(t)$ が流れたとする。準備とし



て、時刻 t における回路の電流 $I(t)$ を求めよう。微分方程式

$$\frac{Q(t)}{C} = R_0 I(t)$$

を解けば良い。ただし、

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

であることに注意。答えは

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

となる。ここで、$\tau = RC$、I_0 は時刻 $t = 0$ における電流である。

1. 極板間に生じる変位電流密度を求めよ。
2. 極板間に生じる磁束密度を求めよ。
3. 極板間に生じるポインティング・ベクトルを求めよ。
4. 極板間に生じるポインティング・ベクトルにより、極板間から抜け出す電磁場のエネルギーを求めよ。極板間の距離を D とする。
5. 抵抗 R_0 は長さ ℓ の抵抗線である。キャパシターとこの抵抗をつなぐ導線の抵抗は無視できるとして、抵抗線の周囲のポインティング・ベクトルを求めよ。ただし、抵抗線の長さ ℓ に対して十分近くの様子を考察する。
6. 抵抗のない導線の周囲にできるポインティング・ベクトルは、導線から十分遠方でゼロになることを示せ。
7. エネルギー保存の観点から、回路全体の周囲のポインティング・ベクトルの振る舞いを考察せよ。

===== 解答 =====

問題 3.3.5

電界の振幅が 0.1 Vm^{-1} の電磁波において、磁束密度の振幅はいくらか? また、ポインティング・ベクトルの大きさはいくらか?

===== 解答 =====

問題 3.3.6

次のような z 軸方向に進む 2 つの電磁波（電界ベクトルは x 軸方向）がある。

$$E_1(z,t) = E_0\cos(kz - \omega t)$$
$$E_2(z,t) = E_0\cos(-kz - \omega t)$$

重ね合わせによって生じる電磁場はどのようなものか?

===== 解答 =====

10

問題 3.3.7

次の式を満たすベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r},t)$ を導入しよう。

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

このとき、電荷も電流もない真空中の Maxwell 方程式は

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$
$$\nabla^2 \vec{A} = \epsilon_0 \mu_0 \, \partial_t^2 \vec{A}$$

のように還元されることを示せ。

===== 解答 =====

3.4 物質中の電界と磁場

問題 3.4.1

分極の生じる第 1 の機構について考察する。分子を 2 こ「原子 A,B」が結合したものと考える。2 原子の中心間の距離は 0.1 nm で、この「分子」の電気双極子モーメントの大きさは、5×10^{-30} Cm であった。どの程度の電荷の移動が「原子 A,B」間にあっただろうか?

===== 解答 =====

問題 3.4.2

分極の生じる第 2 の機構について考察する。原子を正電荷 $= q$ の点電荷と、それを中心とする半径 a の球内に一様な負電荷（合計は $-q$）からなると考えよう。ただし、負電荷の分布は変化しないと考える。

1. 正の点電荷が負電荷の中心から長さ u だけずれたとき、正の点電荷にはどのような力が働くか?
2. この「原子」に一様な電界（その大きさは E）をかけた。正電荷の位置と負電荷の中心の位置のズレはいくらになるか？正電荷と負電荷に作用する力のバランスを考慮して求めよ。
3. 分極率を求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.4.3

半径 a の誘電体球に一様な分極 $\vec{P}$ が生じた。球内部の電界を求めよう。ただし、$|\vec{u}| \ll a$ である。

1. 原点を中心とする半径 a の球内に一様に分布する電荷（密度は ρ）が球内の点 $\vec{r}$ に作る電界 $\vec{E}(\vec{r})$ を求める。
2. 中心が $\vec{u}/2$ の一様な正電荷の球状の分布（半径 a、電荷密度 ρ）と中心が $-\vec{u}/2$ の一様な負電荷の球状の分布（半径 a、電荷密度 $-\rho$）の作る電界 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めよ。
3. $\vec{E}(\vec{r})$ を分極ベクトル $\vec{P}$ を用いて、表せ。

===== 解答 =====

問題 3.4.4

電気感受率の概算を行おう。電気双極子モーメント p を持つ分子が電界 $\vec{E}$ の中に置かれた場合、電気双極子が電界の方向を向く場合と逆向きになる場合のエネルギーの差は、$2pE$ である。統計力学より、温度 T で熱振動する分子の平均のモーメントは $\bar{p} \sim p\dfrac{2pE}{k_BT} = \dfrac{2p^2}{k_BT}E$ である。ここで、k_B はボルツマン定数である。単位体積中に分子が N こあるとする。ただし、誘電体の分子による電界は小さいとして、外部からかけられる電界を分子も感じるものとして計算せよ。

1. 電気感受率は
$$\chi_e \sim \frac{2Np^2}{k_BT}$$
となることを示せ。
2. 温度が 300 K で、分子の電気双極子モーメントが 5×10^{-30} Cm のとき、$\epsilon/\epsilon_0 - 1$ はどの程度か？分子の平均間隔は 0.5 nm である。また、$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ JK^{-1} である

===== 解答 =====

問題 3.4.5

厚さ 0.1 mm、比誘電率 2.3 の誘電体がある。容量 0.1 μF のコンデンサーを作るために必要な極板面積はいくらか?

===== 解答 =====

問題 3.4.6

誘電率 ϵ の薄い誘電体板を電界中に置いた。電界と誘電体板の法線のなす角を θ として、誘起される分極電荷密度を求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.4.7

誘電率 ϵ の一様な誘電体中に電界 $\vec{E}$ がある。空洞を作ったときの電界 $\vec{E}'$ の強さを求めよ。

1. 電界の方向に平行な細長い棒状の空洞。
2. 電界の方向に垂直な薄くて広い円盤状空洞。
3. 球状の空洞。

===== 解答 =====

問題 3.4.8

平行平板キャパシターに誘電率 ϵ の誘電体をいれた。このキャパシターに蓄えられている電荷 Q_0 は一定である。

1. 誘電体がある場合とない場合の極板間の電界の様子を示し、容量の比を求めよ。
2. 極板間から誘電体を引き出すために必要な力はいくらか?極板は 1 辺 L の正方形で辺に平行に誘電体を動かす。なお誘電体も 1 辺 L の正方形で、その厚さは極板間の距離 d に等しい。

===== 解答 =====

問題 3.4.9

誘電率 ϵ の誘電体球（半径 a）を一様な電界 $\vec{E}_0$ の中においた。球に生じる電気双極子の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.4.10

問題 4 で温度 300 K における電気感受率の大きさの程度を見積もった。同様にして、磁性体の磁気感受率率 μ を求め、真空の透磁率 μ_0 との比を求めよ。ただし、分子の磁気双極子モーメントを 8.0×10^{-24} A·m^2、分子間隔を 0.5 nm とする。

===== 解答 =====

問題 3.4.11

薄い平面板を面に垂直に一様に磁化した板磁石がある。単位体積当たりの磁化の大きさは M である。板内部と外部における磁界と磁束密度を求めよ。ただし、対称性から板に対して平行な成分はゼロになることも説明せよ。

この問題は以下のように理解することができる。仮想的に磁荷（単極磁石）を考えると、この問題はキャパシターにおける電荷を磁荷に置き換えたものと同じである。コンデンサーの外部に電界は存在しないのと同じように、今の問題では板磁石の外には磁界は存在しない。

===== 解答 =====

問題 3.4.12

一様な磁化ベクトル $\vec{M}$（単位体積あたり）を持つ棒磁石を 2 本用意する。一つの磁石の N 極ともう一方の S 極を十分近づけた時、法線方向の磁束密度は連続であるので、隙間に生じる磁束密度 $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ となる。

1. 磁極の面積を S として、磁極間に働く力を求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.4.13

ある原子の磁気双極子モーメントは 9.5×10^{-24} JT^{-1} で、密度は 3×10^{28} m^{-3} であった。すべての原子の磁気双極子モーメントが揃っている場合、この物質の磁化ベクトルはいくらになるか?

===== 解答 =====

問題 3.4.14

完全反磁性体の内部では、磁束密度はゼロである。このことと磁束に関する境界条件を考慮して、一様な磁界中に置かれた球形の完全反磁性体周辺の磁束密度の様子を図示せよ。

===== 解答 =====

12

3.5　変動する電磁場と物質

問題 3.5.1

$$m\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}+\frac{m}{\tau}\frac{d\vec{u}}{dt}+k\vec{u}=-e\vec{E}$$

の定常解を求めよ.

===== 解答 =====

問題 3.5.2

問題 3.4.2 の分極のモデルを用いて、電子が振動する時の固有振動数を求めよ。ただし、原子の原子番号は Z、電子一個の質量を m とする。また、$Z=6$、$a=0.07$ nm の場合の固有振動数を求めよ。

===== 解答 =====

問題 3.5.3

静電界の比誘電率が 4.5 の物質で、その中の電子の固有振動数が 1.04×10^{16} s^{-1} の誘電体がある。振動数 2.5×10^{15} s^{-1}（赤い光）と 4.5×10^{15} s^{-1}（青い）の光に対する比誘電率を求めよ。ただし、緩和時間は十分に長く誘電率の虚数部分は無視できると仮定する。

===== 解答 =====

問題 3.5.4

問題 3.5.3 で取り扱った物質を考える。

1. それぞれの色における屈折率を求めよ。また、それぞれの光の物質中の光速を求めよ。

赤い光と青い光の速度差は、7.8×10^6[m/s] である。

2. まず、青い光のパルスを 1 ns、そして続いて赤い光のパルスを 1 ns の時間だけ、厚さ 2 m のこの物質に入射した。色と強度を無視して出てくる光のおおよその継続時間を求めよ。
3. まず、赤い光のパルスを 1 ns、そして続いて青い光のパルスを 1 ns の時間だけ、厚さ 2 m のこの物質に入射した。色と強度を無視して出てくる光のおおよその継続時間を求めよ。

ここで考えた原理を応用して、極超短パルス光が作られている。

===== 解答 =====

問題 3.5.5

電気伝導度の小さな物質があり、$\omega \gg \sigma/\epsilon$ が成り立つとする。導体内の電磁波の様子を調べよ。

===== 解答 =====

問題 3.5.6

導体内の電子は原子に束縛されていない。従って、その運動方程式としては、

$$m\partial_t \vec{v} + \frac{m}{\tau}\vec{v} = -e\vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

が考えられる。これを解いて、$\vec{i}(t) = -en\vec{v}(t)$ より、電流密度を求めよ。

===== 解答 =====