

第 3 章

電磁気学 II

3.1 電磁誘導

3.1.1 閉回路を貫く磁束による起電力

閉回路を貫く時間的に変動する磁束を $\Phi(t)$ とした場合、その閉回路には

$$\phi_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1)$$

の起電力が生じる。その閉回路を貫く磁束は磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ を用いて、

$$\Phi = \int_S \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \quad (3.2)$$

と表される。負号の意味は「電磁誘導によって生じる起電力によって電流が流れた場合、その電流の作る磁場は起電力の原因となった磁束の変化を減らす方向に生じる」ことを意味している。このことを特に「レンツの法則」と言うこともある。

ここで S は閉回路を境界とする任意の曲面である。 $\vec{n}(\vec{r})$ は回路の向きを決めておき、その向きに回転する右ネジの進む向きを正とするようなその曲面に対する法線ベクトルである。

ここで、 Φ は曲面の取り方に依存しないことを証明しておこう。まず、閉

回路を境界とする任意の二つの曲面 S_1, S_2 を考え、それらを貫く磁束をそれぞれ Φ_1, Φ_2 とする。

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_{S_1} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \\ \Phi_2 &= \int_{S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS\end{aligned}\quad (3.3)$$

二つの曲面をあわせたもの S は閉曲面になるので、ガウスの法則により、

$$\int_{S_1+S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS = 0 \quad (3.4)$$

である。ここで、曲面 S_1, S_2 を独立に考えた場合の法線の向きと二つを組み合わせて閉曲面を作ったときの法線の向きに注意すると、

$$\begin{aligned}& \int_{S_1+S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \\ &= \int_{S_1} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS - \int_{S_2} \{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})\} dS \\ &= \Phi_1 - \Phi_2\end{aligned}$$

以上により、

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (3.5)$$

となり、曲面 S の取り方に依存しないことが証明された。

3.1.2 運動の相対性

閉回路を貫く時間変動する磁束を作るには、閉回路の近くで磁石を動かせばよい。しかしながら、磁石を動かすのではなく閉回路を動かしても閉回路を貫く磁束は時間変動することになる。

ここで、ニュートン力学が相互に等速運動している観測者に対して同じように成り立つことを思い出そう。磁石と閉回路の例は、力学だけではなくす

すべての自然法則が等速運動している観測者に対して同じように成り立つことを示唆するものである。

このように相互に等速運動している観測者はすべて自然法則の前に平等であり、これらの観測者に対して自然法則は同じ形に表されなければならないという思想を物理学では受け入れている。これを相対性の原理という。

3.1.3 電磁誘導とローレンツ力

一様な z 方向の磁場 $(0, 0, B)$ 中に垂直に長方形の回路を置く。その一辺 AB (長さ l) を早さ v で x 方向に動かす時を考える。導線には自由電子が存在し、それにはローレンツ力が作用する。このローレンツ力によって自由電子は y 方向に動かされ、 B の方にたまる。この荷電粒子の分布の不均衡によって $A \rightarrow B$ の向きの電界 E が生じる。この電界による電子に作用する力とローレンツ力が打ち消しあうと電子の移動はとまる。

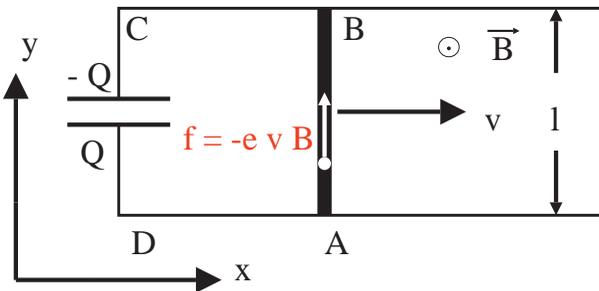


図 3.1 ローレンツ力による起電力。

すなわち、

$$E \cdot (-e) = \frac{V_A - V_B}{l} \cdot (-e) = vB \cdot (-e)$$

となる。このように辺 AB を動かす時に、仮想的な電界 E' が生じその電界によって自由電子が動いたと考えることもできる。その仮想的な電界による

AB間の電圧は vBl である。すなわち、「導線を動かすことによって、起電力が生じる」と考えることができる。この起電力の原因はミクロに見ると自由電子に作用するローレンツ力である。

この場合に閉回路に生じる起電力は vBl であり、 $vl = dS/dt$ (S は閉回路の面積) なので、式 3.1 が成り立っている。

3.1.4 電磁誘導の法則の微分形

閉回路に生じる起電力は電界の定義により、閉回路に沿った電場を積分したものである。式で表すと、

$$\phi_{em} = \oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} \quad (3.6)$$

となる。さらに電界は閉回路の有無によらず、存在することを考えると上の式の C を単なる閉じた経路を表すものとしてもよいと考えられる。

式 3.1 より、

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (3.7)$$

となる。左辺にはストークスの定理を適用し、右辺の積分と時間微分の順序を変えれば、

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (3.8)$$

となる。曲面 S は任意であるから、両辺は積分の中も等しいはずである。すなわち、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

でないといけない。以上により、電磁誘導の法則の微分形が得られた。

3.1.5 インダクタンス

相互インダクタンス

2つのコイル1,2があって、コイル1に流れる電流 I_1 によって生じる磁場によってコイル2にも磁束 Φ_2 が貫く。 Φ_2 は電流 I_1 に比例する。その比例係数を M とすると、 $\Phi_2 = MI_1$ と表すことができる。

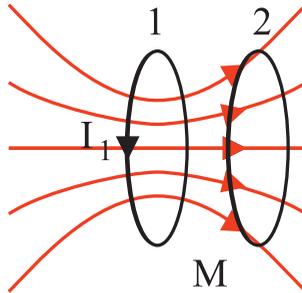


図 3.2 相互誘導現象。

ここで、 I_1 が時間的に変化する場合、 Φ_2 も時間的に変化する。この変化によってコイル2に誘導起電力 V_2 が生じる。

$$V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

この現象を「相互誘導」と呼び、この比例係数 M を「相互インダクタンス」と言う。

ここでは、電流の変化がゆっくりで各瞬間の磁場の大きさはその時のコイルに流れる電流と同じ大きさの定常電流によって生じる磁場の大きさと等しいと仮定している。このような電流を準定常電流という。

自己インダクタンス

相互誘導と似た現象がコイル一つだけでも起こる。コイルのある部分を流れる電流によって生じた磁束がコイルの他の部分を貫き、そのために誘導起電力が生じる。この現象をコイルが一つだけで起こるので「自己誘導」と言う。誘起される起電力 V はコイルに流れる電流を I として、

$$V = -L \frac{dI}{dt}$$

となり、 L を「自己インダクタンス」と言う。インダクタンスの単位は「ヘンリー」で $H(= \frac{V \cdot s}{A})$ と表記する。

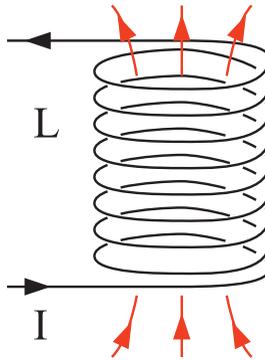


図 3.3 自己誘導現象

非常に長いソレノイドの自己インダクタンス

単位長さ当たりの巻数 n 、長さ l 、断面積 S のコイルの自己インダクタンスは以下のように計算される。コイルに電流 I を流した場合、コイル内部に生じる磁束密度は、

$$B = \mu_0 n I$$

である。コイルの一卷をつらぬく磁束は BS 、コイルの巻数は nl だから、コイル全体を貫く磁束は

$$\Phi = nlBS = \mu_0 n^2 \ell SI$$

となる。従って、自己インダクタンスは定義より、

$$L = \mu_0 n^2 \ell S \quad (3.10)$$

となる。

過渡応答

図のような回路を考える。スイッチを閉じて（電流が流れ始めて）からしばらくはコイルの自己誘導による起電力 $-L \frac{dI}{dt}$ により、抵抗 R にかかる電圧は電池の電圧 V より小さくなる。数式で表すと、

$$V - L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t)$$

となる。この微分方程式を解けば、

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

となる。ここで、 $\tau = L/R$ をこの回路の「時定数」と言う。

問題 3.1.1

直径 10 cm、2000 回巻のコイルを地球磁場 (5×10^{-5} T) の中で毎秒 15 回の早さで回転させた。コイルに生じる起電力を求めよ。ただし、回転の軸はコイルの中心軸とは直交している。

===== 解答 =====

適当に回転角の位相を決めると、

$$\Phi = 2000 \cdot \pi \cdot 0.05^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot 5 \times 10^{-5}$$

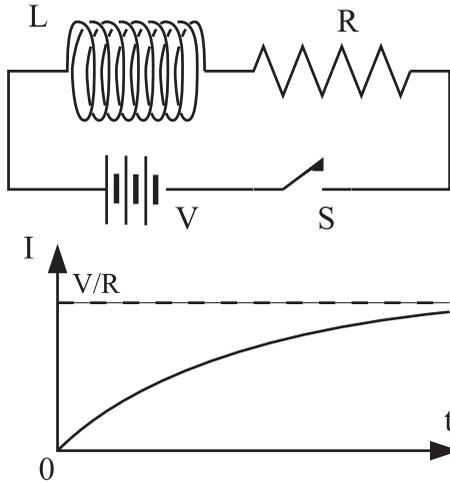


図 3.4 過渡応答

であるから、微分を行うと、

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi}{dt} &= -2000 \cdot \pi 0.05^2 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{1/15}t\right) \cdot 5 \times 10^{-5} \\ &= -7.4 \times 10^{-2} \cos(30\pi t) \end{aligned}$$

となる。単位は [V] である。

問題 3.1.2

電流 I が z 軸方向に流れている。 z - x 面に平行な小さな 1 巻コイル (面積は S) を一定の早さ v で電流から遠ざけた。コイルに生じる起電力を求めよ。 x - y 面に平行なコイルの場合はどうなるか？

===== 解答 =====

z - x 面に平行なコイルの場合、電流によって生じる磁束はコイルと直交す

るので、その大きさだけを考えると、

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r(t)} S$$

となる。だから、生じる起電力の大きさ ϕ_{em} は、

$$\begin{aligned} \phi_{em} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d\Phi}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I S}{2\pi r^2} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I S}{2\pi r^2} v \end{aligned}$$

と計算できる。

一方、x-y 面に平行なコイルの場合、電流によって生じる磁束はコイルの面と平行である。従って、コイルを貫く磁束はゼロであり、誘導起電力は生じない。

問題 3.1.3

Fig. 3.1 でキャパシターの代わりに抵抗 R を接続した。(その抵抗以外の導線の抵抗は無視できるとする。)

1. 回路に流れる電流と消費される電力を求めよ。
2. 辺 AB に働く力とその力による仕事率を求めよ。

===== 解答 =====

- 1.

$$\begin{aligned} \phi_{em} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv \\ I &= \frac{|\phi_{em}|}{R} = \frac{Blv}{R} \end{aligned}$$

したがって、ジュール熱は、

$$I^2 R = \left(\frac{Blv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

となる。

2.

$$f = IB\ell = \frac{Blv}{R} B\ell = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

したがって、仕事率は

$$fv = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

となり、ジュール熱の大きさと等しくなる。

問題 3.1.4

直径 5 cm、長さ 20 cm、2000 回巻のコイルの自己インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 n^2 \ell S \\ &= \mu_0 \frac{2000^2}{\ell^2} \ell \pi r^2 \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \frac{2000^2}{0.2^2} 0.2\pi 0.025^2 \\ &= 4.9 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

単位は [H] である。

問題 3.1.5

半径 $a_1, a_2 (a_2 > a_1)$ の 2 本の金属管により、同軸ケーブルを作った。一端には抵抗 R を、他端には電源をつなぎ電流 I を流した。

1. アンペールの法則を用いて、同軸ケーブルの内外に生じる磁界を求めよ。
2. 長さが ℓ の場合、この同軸ケーブルの自己インダクタンスを求めよ。磁束が貫く面積は $\ell \times (a_2 - a_1)$ である。

===== 解答 =====

1. 中心導体を中心として半径 r ($a_1 < r < a_2$) の円を経路として、アンペールの法則を適用する。このとき、

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

であるから、

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

となる。 $r > a_2$ の場合には、正味の電流はないので、 $B(r) = 0$ となる。

2. 回路を貫く磁束は、

$$\begin{aligned} \Phi &= \ell \int_{a_1}^{a_2} B(r) dr \\ &= \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1) \end{aligned}$$

定義より、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1)$$

となる。

問題 3.1.6

2つの細長いコイルがある。それぞれの単位長さ当たりの巻数は n_1, n_2 、長さは l_1, l_2 、断面積は S_1, S_2 である。コイル1の中にコイル2を重ねた場合 ($S_1 > S_2$)、コイル1と2の間の相互インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

コイル1による磁束密度は、 $B = \mu_0 n_1 I_1$ である。一方、コイル2を貫く磁束は

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= n_2 l_2 B S_2 \\ &= \mu_0 n_1 n_2 l_2 S_2 I_1\end{aligned}$$

である。したがって、定義より、

$$M = \mu_0 n_1 n_2 l_2 S_2$$

となる。

問題 3.1.7

2つの回路がある。回路1のインダクタンスを L 、回路1と回路2の間の相互インダクタンスを M とする。回路1に変動する起電力 $\phi_1(t)$ をかけた時に回路2に生じる電圧 $\phi_2(t)$ を求めよ。

===== 解答 =====

回路1に流れる電流を I_1 とすると、

$$\begin{aligned}\phi_1(t) - L \frac{dI_1}{dt} &= 0 \\ \phi_2(t) &= -M \frac{dI_1}{dt}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\phi_1(t)$ はコイルの誘導起電力を打ち消していることに注意。したがって、

$$\phi_1(t)/\phi_2(t) = -L/M$$

となる。

問題 3.1.8

半径 a_1, a_2 の円形回路が、同一平面上に中心を同じくして置かれている。ただし、 $a_1 \gg a_2$ である。

1. 円形回路（半径 a ）に電流 I が流れている。その回路の中心の磁束密度をビオ・サバルの法則を用いて計算せよ。

ヒント： $\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0 I \vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds$ を計算する。ただし、

- $\vec{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$
- $\vec{t}(\vec{r}') = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- $\vec{r} = (0, 0, 0)$
- $ds = a d\theta$

として θ を 0 から 2π まで積分する。

2. 回路 1 に電流 I_1 を流した時に回路 2 を貫く磁束から相互インダクタンスを求めよ。
3. 円形回路（半径 a ）に電流 I が流れている。その回路は xy 平面上にあるとして、 x 軸上の十分遠方にある点での磁束密度を計算せよ。

ヒント：小問 1 と同様に計算する。ただし、 $\vec{r} = (x, 0, 0)$ で、 $x \gg a$ であることに注意。また、近似式 $(1+x)^n \approx 1+nx$, $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ （ただし、 $x \ll 1$ ）を用いこと。

4. 回路 2 に電流 I_2 を流した時に回路 1 を貫く磁束から相互インダクタンスを求めよ。

===== 解答 =====

1. 円形回路の中心を原点にとると、

$$\begin{aligned} & \vec{B}(\vec{0}) \\ &= \int \frac{\mu_0 I \vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)}{\left(\sqrt{(-a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2}\right)^3} I a d\theta$$

であるから、 z 方向以外の成分はゼロになる。以下 z 方向の成分 $B_z(\vec{r})$ のみを考察する。積分範囲は $0 \sim 2\pi$ である。

$$\begin{aligned} B_z(\vec{0}) &= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a}{a^3} I a d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} 2\pi \\ &= \frac{\mu_0}{2a} I \end{aligned}$$

2. コイル 1 による中心の磁束密度は、

$$B = \frac{\mu_0}{2a_1} I_1$$

である。したがって、コイル 2 を貫く磁束は

$$\begin{aligned} \phi_2 &= BS \\ &= \frac{\mu_0}{2a_1} I_1 \pi a_2^2 \end{aligned}$$

したがって、定義により、

$$M = \frac{\pi\mu_0 a_2^2}{2a_1}$$

となる。

3. 点 $(x, 0, 0)$ (ただし、 $x \gg a$) における磁束密度を考える。

$$\vec{B}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (x - a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)}{\left(\sqrt{(x - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}\right)^3} I a d\theta
\end{aligned}$$

であるから、 z 方向以外の成分はゼロになる。以下 z 方向の成分 $B_z(\vec{r})$ のみを考察する。積分範囲は $0 \sim 2\pi$ である。

$$\begin{aligned}
&B_z(\vec{r}) \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a - x \cos \theta}{\left(\sqrt{(x - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}\right)^3} I a d\theta \\
&\quad \text{since } \frac{1}{(1-x)^n} \approx 1 + nx \text{ when } x \ll 1 \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(a - x \cos \theta) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2ax \cos \theta}{x^2 + a^2}\right)}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} I a d\theta \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a - x \cos \theta + 3 \frac{a^2 x \cos \theta}{x^2 + a^2} - 3 \frac{ax^2 \cos^2 \theta}{x^2 + a^2}}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} I a d\theta \\
&\quad \text{since } \int \cos^{2n+1} \theta d\theta = 0 \\
&= \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a - 3 \frac{ax^2 \cos^2 \theta}{x^2 + a^2}}{(\sqrt{x^2 + a^2})^3} I a d\theta \\
&\quad \text{since } x \gg a \\
&= \int \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{a - \frac{3}{2}a}{x^3} d\theta \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi a^2 I}{x^3} \\
&= -\frac{\mu_0}{4} \frac{a^2 I}{x^3}
\end{aligned}$$

4.

$$\Phi_1 = \int_0^{a_1} B_z(\vec{r}) 2\pi r dr$$

$$= - \int_{a_1}^{\infty} B_z(\vec{r}) 2\pi r dr - \int_{\text{semi-sphere}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

ここで、 $r \rightarrow \infty$ のとき $|\vec{B}(\vec{r})| \approx B(r_0) \frac{r_0^3}{r^3}$ 、 $\int_{\text{semi-sphere}} ds = 4\pi r^2$ であるから、第2項はゼロになる。

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \int_{a_1}^{\infty} B_z(\vec{r}) 2\pi r dr \\ &= - \int_{a_1}^{\infty} \left(-\frac{\mu_0 a_2^2 I}{4 r^3} \right) 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi \mu_0 a_2^2 I}{2} \int_{a_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\pi \mu_0 a_2^2}{2a_1} I \end{aligned}$$

したがって、定義より $M = \frac{\pi \mu_0 a_2^2}{2a_1}$ となり、同じ結果を与える。

3.1.6 相互インダクタンスの相反定理

コイル1に電流を流してコイル2に生じる起電力から得られる相互インダクタンスとコイル2に電流を流してコイル1に生じる起電力から得られる相互インダクタンスは等しいことが知られている。これを相互インダクタンスの相反定理といい、以下のようにして証明される。

コイル1に流れる電流 I_1 によって作られる磁束密度はベクトルポテンシャルを用いて、

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \end{aligned}$$

と表される。コイル2を貫く磁束は

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{S_2} \{\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})\} \cdot d\vec{S} \\
 &= \oint_{C_2} \vec{A}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{s}_2
 \end{aligned}$$

である。最後の式変形にはストークスの定理を用いた。次に、 $\vec{A}(\vec{r})$ の表式を代入すると、

$$\Phi_2 = \oint_{C_2} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (3.11)$$

となる。従って、コイル 1 に電流を流した時の相互インダクタンスは

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (3.12)$$

となる。コイル 2 に電流を流した場合の相互インダクタンス L_{12} も同様に計算できて、それは上記の式の $C_1, C_2, d\vec{s}_1, d\vec{s}_2$ および \vec{r}_1, \vec{r}_2 を入れ替えたものになる。入れ替えても結果は同じなのはあきらかである。以上により、相互インダクタンスの相反定理は証明できた。

3.1.7 静磁場のエネルギー

静電界のエネルギーが単位体積当たり、

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (3.13)$$

と表されたように、静磁場のエネルギーも単位体積あたり、

$$\begin{aligned}
 u_m &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\
 &= \frac{\mu_0}{2} H^2
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

と表される。

コイルの中の静磁場のエネルギー

非常に長いソレノイドの内部の磁場に蓄えられる静磁場のエネルギーを計算することによって、式 3.14 を確かめて見よう。ただし、コイルの電気抵抗は無視できるものとする。

電流 $I(t)$ は $t = 0$ に $I(0) = 0$ 、 $t = t_1$ に $I(t_1) = I$ になったとする。この間電流は増加しているので、コイルの電流増を妨げるように自己誘導起電力が生じる。これに逆らって電流を流すためには外部から電位差 $\phi(t)$

$$\phi(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

をかけないといけない。この電位差の下で電荷 $I(t)\Delta t$ が移動するから、電源のする仕事は

$$\Delta W = \phi(t)I(t)\Delta t$$

となる。時刻 $t = 0$ から t_1 までにコイルにされた仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{t_1} \phi(t)I(t) dt \\ &= L \int_0^{t_1} \frac{dI(t)}{dt} I(t) dt \\ &= \frac{1}{2} LI^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、式 3.10 を L に代入すると、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \ell S I^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V I^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 V \end{aligned}$$

となる。ここで、 $V = \ell S$ 、 $B = \mu_0 n I$ を用いた。これで、先に示した静磁場の単位体積当たりのエネルギーが式 3.14 で与えられることが確かめられた。

3.2 回路

直流回路を拡張して、時間的に変動する電流が流れている回路を考える。

3.2.1 交流回路

時間的に $V(t) = V_0 \cos \omega t$ で振動する起電力を「交流起電力」と言う。ここで、 ω は「角周波数」、 $f = \omega/2\pi$ を「周波数」と言う。以下に抵抗 R 、コイル L 、そしてキャパシター C に流れる交流電流を考える。

抵抗

各瞬間毎にオームの法則が成り立つから、回路に流れる電流 $I(t)$ は $V(t) = V_0 \cos \omega t = RI(t)$ である。よって、

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$$

となる。

コイル

交流起電力とコイルの自己誘導起電力を足し合わせるとゼロになるので、 $V(t) - L \frac{dI}{dt} = V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$ となる。よって、

$$I(t) = \frac{V_0}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

となる。

キャパシター

交流起電力とキャパシターの両端の電圧を加えるとゼロになるので、 $V(t) - Q/C = 0$ である。よって、

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 &= C \frac{dV}{dt} \\
 &= C \frac{dV_0 \cos \omega t}{dt} \\
 &= V_0 \omega C \cos(\omega t + \pi/2)
 \end{aligned}$$

となる。

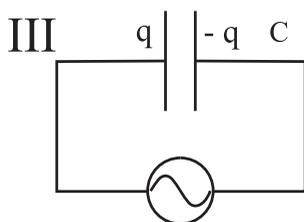
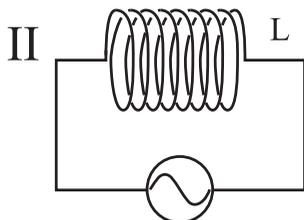
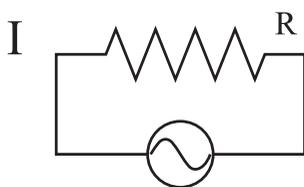


図 3.5 交流回路

実効値

抵抗 R に交流電圧 $V(t) = V_0 \cos \omega t$ をかけた場合、消費される電力 $V^2(t)/R$ の時間平均は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{V^2(t)}{R} \right\rangle_{\text{時間平均}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t dt \\ &= \frac{V_0^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \end{aligned}$$

になる。 T は周期である。「実効値」 $V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ を考えると消費される電力は $\frac{V_e^2}{R}$ と表され、直流の場合と同様になるので便利である。同様に電流の実効値 $I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ を考えることもできる。

コイルやキャパシターに交流電圧がかかる場合、そこに流れる電流の「位相」は電圧の位相と異なっている。コイルの場合は電流の位相は電圧の位相より $\pi/2$ だけ進んでいる。一方、キャパシターの場合は電流の位相は電圧の位相より $\pi/2$ だけ遅れている。このように電圧と電流の位相 ϕ が異なっている場合、その位相差の余弦 ($\cos \phi$) を「力率」と言う。交流回路で消費される電力は電圧と電流の実効値と力率を用いて、 $I_e V_e \cos \phi$ と表すことができる。特にコイルだけ、またはキャパシターだけしかない回路では力率はゼロであり、電力は消費されない。

3.2.2 電気振動

下図の回路でキャパシター C に電荷 Q_0 を蓄えた後、スイッチ S を閉じる。この時、回路に流れる電流を $I(t)$ とすると、 $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ である。ここで $Q(t)$ は各瞬間においてキャパシターに蓄えられている電荷である。

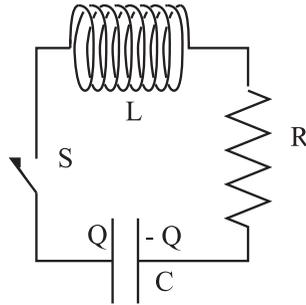


図 3.6 電気振動

回路を一周する時の起電力の総和は

$$\begin{aligned} 0 &= L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \\ &= L \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \end{aligned}$$

である。

特に $R = 0$ の場合は

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q(t)$$

となるから、電荷 $Q(t)$ は

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

の単振動を行う。また、抵抗がゼロでない場合の解は

$$Q(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \delta)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

であり、減衰振動を行う。ここで、液体中の単振り子と比較するとコイルが「慣性」の、キャパシターが「復元力」の役を担っていることが分かる。抵抗はもちろん「抵抗」の役である。

問題 3.2.1

インダクタンスが 1 H のコイルに 1 A の電流が流れているときの磁場のエネルギーを容量 0.1 μF のキャパシターの電界のエネルギーに変換した。キャパシターに現れる電圧はいくらか？

===== 解答 =====

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 1$$

$$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}0.1 \times 10^{-6}V^2$$

より、 $V = \sqrt{10^7} = 3.16 \times 10^3$ [V] になる。

問題 3.2.2

インダクタンス L の超伝導コイルに電流 I が流れていた。ところが、わずかな残留抵抗 R のために、コイルの電流は徐々に減少した。電流の時間変化を微分方程式を解くことによって求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ における電流を I_0 とする。さらに、コイルの電流がゼロになるまでに、抵抗 R で発生するジュール熱を計算せよ。また、それを、初めに蓄えられていた静磁場のエネルギーと比較せよ。

===== 解答 =====

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0$$

だから、

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

となる。積分することによって、

$$I(t) = I_0 e^{-t/T}$$

となる。ただし、 $T = L/R$ である。

抵抗で発生するジュール熱は、各瞬間におけるジュール熱を積分すれば良いので、

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{\infty} RI^2 dt \\
 &= \int_0^{\infty} RI_0^2 e^{-2t/T} dt \\
 &= RI_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2t/T} dt \\
 &= RI_0^2 \left[-\frac{T}{2} e^{-2t/T} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{2} RTI_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} LI_0^2
 \end{aligned}$$

となる。最初コイルに蓄えられていた磁場のエネルギーと等しいことに注意すること。

問題 3.2.3

問題 3.1.5 の場合、金属管の間に生じる静磁場のエネルギーを求めよ。それと先に計算した L から求めた回路のエネルギー $\frac{1}{2}LI^2$ を比較せよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\ell}{2\mu_0} \int_{a_1}^{a_2} B^2(r) 2\pi r dr \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2 \ell}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{r} dr \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1)
 \end{aligned}$$

である。一方、 $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \log(a_2/a_1)$ であったから、 $U = \frac{1}{2}LI^2$ は、磁場の持つエネルギーと等しい。

問題 3.2.4

自己インダクタンスが L_1, L_2 で相互インダクタンスが M の 2 つの回路がある。

1. 回路 1 にのみ電流 I_1 を流したときに回路に蓄えられるエネルギー U_1 はいくらか?
2. コイル 1 の電流を一定に保ちながら、コイル 2 に電流を流し始める。コイル 2 の電流が I になったときに、コイル 1, 2 を貫く磁束はいくらか?
3. 誘導起電力 ϕ_2 に抗してコイル 2 の電流を 0 から I_2 まで増加するのに必要な仕事 U_2 はいくらか?
4. コイル 2 の電流が 0 から I_2 まで変化する間、誘導起電力 ϕ_1 に抗してコイル 1 の電流を I_1 に維持するために必要な仕事 U_3 はいくらか?
5. U_1, U_2, U_3 の合計を求めよ。

===== 解答 =====

1.

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

2.

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1 I_1 + M I \\ \Phi_2 &= L_2 I + M I_1\end{aligned}$$

3.

$$\phi_2 = -L_2 \frac{dI}{dt}$$

だから、

$$U_2 = - \int_0^T \phi_2 I dt$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^T -L_2 \frac{dI}{dt} I dt \\
 &= \int_0^{I_2} L_2 I dI \\
 &= \frac{1}{2} L_2 I_2^2
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 U_3 &= - \int_0^T \phi_1 I_1 dt \\
 &= - \int_0^T -M \frac{dI}{dt} I_1 dt \\
 &= M I_1 \int_0^{I_2} dI \\
 &= M I_1 I_2
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 U_1 + U_2 + U_3 &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \\
 &= \frac{1}{2} (I_1, I_2) \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

問題 3.2.5

以下の回路において抵抗がゼロの場合を考える。

1. キャパシターに蓄えられる最大のエネルギーを求めよ。そのときのコイルに蓄えられているエネルギーはいくらか?
2. コイルに蓄えられる最大のエネルギーを求めよ。そのときのキャパシターに蓄えられているエネルギーはいくらか?

===== 解答 =====

1.

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

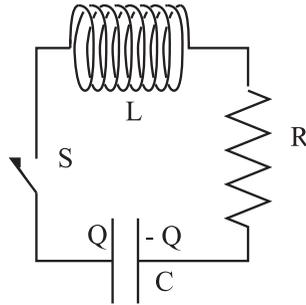


図 3.7 電気振動

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \frac{dQ}{dt} \\
 &= -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \\
 &= I_0 \sin(\omega_0 t + \delta)
 \end{aligned}$$

であるから、 $\omega_0 t + \delta = n\pi$ の時に、コンデンサーに蓄えられているエネルギーは最大 $\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ になる。このとき、コイルの電流はゼロであるから、コイルに蓄えられているエネルギーはゼロである。

2. 同様に考えると、 $\omega_0 t + \delta = \pi/2 + n\pi$ の時に、コンデンサーの電圧はゼロになり、コイルに流れる電流は最大になるので、そのとき

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} L I_0^2 &= \frac{1}{2} L (\omega_0 Q_0)^2 \\
 &= \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} L \frac{1}{LC} Q_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}
 \end{aligned}$$

となる。

問題 3.2.6

キャパシター C 、抵抗 R 、スイッチ S が直列回路を構成している。最初キャパシターには電荷 Q_0 が蓄えられていた。

1. スイッチを閉じた後のキャパシターの電圧、抵抗に流れる電流を求めよ。
2. 抵抗 R で発生するジュール熱と最初キャパシター C に蓄えられていたエネルギーを比較せよ。

===== 解答 =====

1.

$$\frac{Q}{C} + RI = 0$$

だから、

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

となる。この微分方程式を解けば、

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/T}$$

ただし、 $T = CR$ である。キャパシターに現れる電圧は Q/C 、抵抗に流れる電流は $-\frac{Q_0}{T} e^{-t/T}$ である。

2.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} RI^2 dt &= R \left(\frac{Q_0}{T} \right)^2 \int_0^{\infty} -e^{-2t/T} dt \\ &= R \left(\frac{Q_0}{T} \right)^2 \left[-\frac{T}{2} e^{-2t/T} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} R \frac{Q_0^2}{T} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \end{aligned}$$

となり、最初キャパシターに蓄えられていたエネルギーに等しい。

3.2.3 複素インピーダンス

サブセクション 3.2.1 で示したように回路にコイルやキャパシターがある場合は微分方程式を解けば、回路の振る舞いを知ることができる。しかしながら、微分方程式を解くのは大変なので以下のような考えに従って複素インピーダンスを導入すると便利である。

交流起電力が

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.15)$$

と与えられている場合を考える。この起電力によって生じる電流や電荷も同じ振動数で振動するであろう。従って、

$$\begin{cases} I(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta) & (3.16a) \\ Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \gamma) & (3.16b) \end{cases}$$

となる。位相は異なる可能性があることに注意。そして、次のような複素数の関数を作る。

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(t) = \phi_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = \tilde{\phi}_0 e^{i\omega t} & (3.17a) \\ \tilde{\phi}_0 = \phi_0 e^{i\alpha} & (3.17b) \\ \tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \beta)} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t} & (3.17c) \\ \tilde{I}_0 = I_0 e^{i\beta} & (3.17d) \\ \tilde{Q}(t) = Q_0 e^{i(\omega t + \gamma)} = \tilde{Q}_0 e^{i\omega t} & (3.17e) \\ \tilde{Q}_0 = Q_0 e^{i\gamma} & (3.17f) \end{cases}$$

これらの関数の実数部は物理的に意味がある式に一致する。これらの関数が解くべき微分方程式を満たしていると仮定しよう。例えば、

$$L \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + R\tilde{I}(t) + \frac{\tilde{Q}}{C} = \tilde{\phi}(t)$$

などである。ここで、実数部と虚数部に分けると、

$$\left\{L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q}{C}\right\} + i\left\{L \frac{dI'(t)}{dt} + RI'(t) + \frac{Q'}{C}\right\} \\ = \phi(t) + i\phi'(t)$$

となる。 L, R, C はすべて実数だから $\{ \}$ の中は実数であり、右辺と左辺でそれぞれの実数部と虚数部が等しくないといけない。従って、まず複素数の関数を用いて問題を解いた後、その実数部分のみを取り出せば物理的に意味のある解を得ることができる。

強制振動の解

微分方程式

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q}{C} = \phi(t) \quad (3.18)$$

を解いてみよう。これは、図 3.6 に交流起電力を直列に入れた回路の振る舞いを決定する微分方程式である。

$$\frac{d\tilde{Q}(t)}{dt} = i\omega\tilde{Q}_0 e^{i\omega t} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$$

であるから、 $i\omega\tilde{Q} = \tilde{I}$ となる。同様に、 $\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = i\omega\tilde{I}_0 e^{i\omega t}$ になるので、解くべき微分方程式は

$$i\omega L\tilde{I} + R\tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{i\omega C} = \tilde{\phi}$$

となる。すべての項に共通な $e^{i\omega t}$ は落としている。もう少し式変形して、

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{Z}} \quad (3.19)$$

$$\tilde{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (3.20)$$

が得られる。

R が小さい場合、 ω を変化させるとある特定の周波数で $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ となる。このとき、 \tilde{Z} は小さな値になり、大きな電流が流れることになる。これは、振動子の共鳴と同じ現象である。式 3.20 の括弧の中がゼロになる周波数を共鳴周波数 ω_0 と呼び、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.21)$$

である。

\tilde{Z} のことをインピーダンスと呼び、これを用いると交流回路でも直流回路に適用できたキルヒホッフの法則のような様々な解法が適用できるようになる。

3.3 マクスウェルの方程式と電磁波

3.3.1 変位電流

交流回路にキャパシターが入っている場合を考えよう。キャパシター以外の部分ではアンペールの法則が成立する。ところが、キャパシターの電極間では通常の電流（伝導電流）は流れておらず、伝導電流だけを考えるのならば、アンペールの法則が成立しない。

ここで電流の概念を拡張して、「変位電流」を導入する。変位電流の密度は $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ で与えられる。ここで、 D は電束密度である。

平行平板コンデンサーの変位電流

平行平板コンデンサー（面積 S 、間隔 d ）の場合を考えよう。このキャパシターに電荷 Q が蓄えられている場合に、回路に流れる電流は $I = -\frac{dQ}{dt}$ である。符号は図の x 方向を基準に考える。一方、電極間の電束密度の大きさは $D = -\frac{Q}{S}$ であるから、電流を電束密度で表すと、 $I = S \frac{\partial D}{\partial t}$ となる。すなわち、キャパシターの極板間の仮想的な電流の密度は $I/S = \frac{\partial D}{\partial t}$

である。

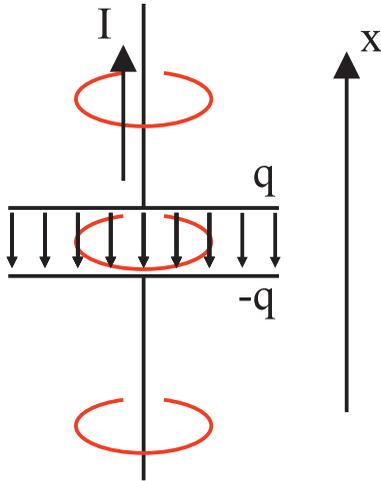


図 3.8 変位電流

アンペールの法則の拡張

直流電流によって生じる磁場を与える法則として、アンペールの法則

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{i}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (3.22)$$

があった。変位電流も含めて、変動する電流と磁場の関係を与えるものとして、アンペールの法則を

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \left\{ \vec{i}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{S} \quad (3.23)$$

のように拡張する。

また、上の式の微分形はストークスの定理を適用して、

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left\{ \vec{i}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial E(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} \quad (3.24)$$

と得られる。

準定常電流

3.1.5 において定常電流の考えを導入した時、変位電流に対する考察は全くされていなかった。ここで、準定常電流の準定常の意味を考えて見よう。

交流回路における通常の電流と変位電流の大きさを比較してみよう。導体内部での電界が

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin \omega t$$

と時間変化すると仮定する。通常の電流の密度は電気伝導度を σ として、

$$\vec{i}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}_0 \sin \omega t$$

となる。一方、変位電流の密度は、

$$\vec{i}_d(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega \vec{E}_0 \cos \omega t$$

となる。変位電流が通常の電流に対して無視できる条件は、

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sim 10^{18} \text{ s}^{-1}$$

となる。従って、周波数がよほど高くない限り、準定常電流を仮定し変位電流を無視しても問題ない。

問題 3.3.1

振幅 E_0 、周波数 $f = \omega/2\pi$ の振動電界がある。変位電流密度の最大値を求めよ。

1. $E_0 = 1 \mu\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ 、 $f = 10^6 \text{ s}^{-1}$ の電波の場合。
2. $E_0 = 2 \times 10^6 \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ 、 $f = 10^{15} \text{ s}^{-1}$ のレーザー光の場合。

===== 解答 =====

変位電流は以下の式で求めることができる。

$$\begin{aligned}\vec{i}_d &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0 \cos \omega t \\ &= -\varepsilon_0 \omega \vec{E}_0 \sin \omega t\end{aligned}$$

1.

$$(8.85 \times 10^{-12})(2\pi \times 10^6)(1 \times 10^{-6}) = 5.6 \times 10^{-11}$$

となる。単位は [A] である。

2. 同様に、

$$(8.85 \times 10^{-12})(2\pi \times 10^{15})(2.0 \times 10^6) = 1.1 \times 10^{11}$$

となる。単位は [A] である。

問題 3.3.2

銅と石英ガラスに、振動電界がかかっている。伝導電流と変位電流の比を求めよ。ただし、銅の電気伝導度 (σ) は $5.8 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ 、石英ガラスのそれは $10^{-15} \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ とする。

ただし、変位電流と伝導電流の大きさの比は

$$\frac{\varepsilon_0 \omega E_0}{\sigma E_0} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$$

である。

1. 振動数 50 s^{-1} の場合。
2. 振動数 10^{10} s^{-1} の場合。

===== 解答 =====

1. 銅の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 50}{5.8 \times 10^7} = 4.8 \times 10^{-17}$$

石英の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 50}{10^{-15}} = 2.8 \times 10^6$$

2. 銅の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 10^{10}}{5.8 \times 10^7} = 9.6 \times 10^{-9}$$

石英の場合、

$$\frac{8.85 \times 10^{-12} 2\pi 10^{10}}{10^{-15}} = 5.6 \times 10^{14}$$

石英の場合、変位電流が支配的になることに注意。

問題 3.3.3

早さ v で右向きに運動している荷電粒子による変位電流を図を用いて考察せよ。変位電流の概略はどのように表されるか? また、進行方向に垂直で荷電粒子を含む平面の磁場はどのようになるか?

===== 解答 =====

時刻 $t = t - \Delta/2$ の荷電粒子の位置とそれによる電場をオレンジ色で、時刻 $t = t + \Delta/2$ の荷電粒子の位置とそれによる電場を赤色で表すと図のようになる。

変位電流はその定義に戻って考えれば、図より明らかである。また、磁場は変位電流の様子が分かれば、明らかであろう。

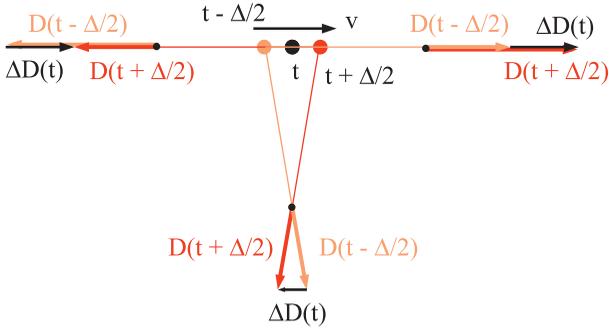


図 3.9 運動している荷電粒子による電束電流の考察

3.3.2 マクスウェルの方程式

積分形

基本法則を整理しよう。

- ガウスの法則： $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\text{S 中にある真電荷})$
- 電磁誘導： $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- 磁気に関する法則： $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
この法則は電荷の場合のガウスの法則に対応。
- アンペールの法則： $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \sum_j I_j + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

以上4つの式をまとめて、マクスウェルの方程式と言う。これらに

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} & (3.25a) \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} & (3.25b) \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} & (3.25c) \end{cases}$$

を組み合わせれば、電磁氣的現象を統一的に説明することができる。

微分形

物理現象を近接作用の観点から理解しようとしたとき、物理法則を微分形で表現したほうが理解しやすい。マクスウェルの方程式の微分形は、ガウスの定理とストークスの定理を用いると、先のマクスウェルの方程式を次のような微分形で表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.26a) \\ (3.26b) \\ (3.26c) \\ (3.26d) \end{array}$$

式 3.26d の両辺の発散をとると、左辺は恒等的にゼロになる。

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{H}\}}_{=0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ここに、時間微分と空間微分を入れ替えて式 3.26a を代入すると、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.27)$$

となる。この式は電荷が保存されることを意味している。すなわち、電荷密度が変化するときには、それに見合った電流が流れ込んでいることを示している。

変数と式の数

マクスウェルの方程式にあらわれる変数は、電界と磁場の x, y, z 方向の成分で計 6 こである。一方、マクスウェルの方程式は成分に分解すると、計 8 こあるようにみえる。この点について考察しよう。

式 3.26d の両辺の発散をとると、左辺は恒等的にゼロになる。

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{H}\}}_{=0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

次に、式 3.27 を用いて、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{i}$ を消去し、 $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ は $\partial/\partial t$ と $\vec{\nabla} \cdot$ の順序を入れ替えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho(\vec{r}, t)\} = 0$$

となる。言い換えると、ある関数 $F(\vec{r})$ を用いて、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho(\vec{r}, t) = F(\vec{r})$$

となる。これは、初期条件として、式 3.26a が成立するならば、その後電磁場が変化しても、常に式 3.26a が成立することを意味している。よって、式 3.26a は式の数と変数の数を検討するときに、考えなくてよい。同様のことが式 3.26b にも成立するので、変数 6 に対して式が 6 こあることになる。

3.3.3 電磁場のエネルギー

式 3.26d と \vec{E} 、式 3.26c と \vec{H} の内積をとると、

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\} &= 0 \\ \vec{E} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} &= \vec{E} \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

2つの式の差をとると、

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{E}\} - \vec{E} \cdot \{\vec{\nabla} \times \vec{H}\} \\ = -\vec{E} \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right\}}_{u(\vec{r}, t)} \quad (3.28)$$

と、

$$\vec{H} \cdot \{ \vec{\nabla} \times \vec{E} \} - \vec{E} \cdot \{ \vec{\nabla} \times \vec{H} \} = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\{ \vec{E} \times \vec{H} \}}_{\vec{S}(\vec{r}, t)} \quad (3.29)$$

を用いると、

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) = -\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) \quad (3.30)$$

となる。

各項の意味を考えてみよう。静電界のエネルギー密度は $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ で、静磁場のエネルギー密度は $\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$ (式 3.14 参照) で表された。これらの式が時間変動する電界、磁場にも適用できると考えると、 u は電界と磁場、すなわち電磁場のエネルギー密度を表していることになる。

右辺の $\vec{E} \cdot \vec{i}$ は単位体積中の荷電粒子が電界から受ける単位時間当たりの仕事である。ローレンツ力は荷電粒子の運動方向と垂直に作用するので、磁場は荷電粒子に仕事をしないことを考えると、右辺は単位体積中の荷電粒子が電磁場から受ける単位時間当たりの仕事になる。電磁場から考えるとそれだけのエネルギーが電磁場から、なくなっていくことを示している。

\vec{S} の意味を考えるに当たって、式 3.30 と式 3.27 の類似性に注目しよう。式 3.30 の u, \vec{S} と式 3.27 と ρ, \vec{i} が対応している。そのように考えると、 \vec{S} は電磁場のエネルギーの流れに相当することがわかる。この式を導きだした人の名前をとって、このベクトルはポインティング・ベクトル (Poynting vector) と呼ばれている*1。

*1 電磁場の単位体積当たりの運動量は \vec{S}/c^2 によって表される。詳しくは参考文献 [2] を見ること。

問題 3.3.4

半径 R の円形の平行平板キャパシターに最初電荷 Q_0 が蓄えられていた。外部に回路（具体的には、抵抗 R_0 ）をつなぎ、時刻 t に電流 $I(t)$ が流れたとする。準備として、時刻 t における回路の電流 $I(t)$ を求めよう。微分方



程式

$$\frac{Q(t)}{C} = R_0 I(t)$$

を解けば良い。ただし、

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

であることに注意。答えは

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

となる。ここで、 $\tau = RC$ 、 I_0 は時刻 $t = 0$ における電流である。

1. 極板間に生じる変位電流密度を求めよ。
2. 極板間に生じる磁束密度を求めよ。
3. 極板間に生じるポインティング・ベクトルを求めよ。
4. 極板間に生じるポインティング・ベクトルにより、極板間から抜け出す電磁場のエネルギーを求めよ。極板間の距離を D とする。
5. 抵抗 R_0 は長さ l の抵抗線である。キャパシターとこの抵抗をつなぐ導線の抵抗は無視できるとして、抵抗線の周囲のポインティング・ベクトルを求めよ。ただし、抵抗線の長さ l に対して十分近くの様子を考察する。

6. 抵抗のない導線の周囲にできるポインティング・ベクトルは、導線から十分遠方でゼロになることを示せ。
7. エネルギー保存の観点から、回路全体の周囲のポインティング・ベクトルの振る舞いを考察せよ。

===== 解答 =====

1. 変位電流の密度は $I(t)/\pi R^2$ となる。
2. アンペールの法則より、

$$\mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I(t) = 2\pi r B(r, t)$$

となるから、

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I(t)$$

となる。

3. 電界は面に垂直で大きさは

$$\frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2}$$

一方、磁束密度は円周方向に大きさ

$$\frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I(t)$$

である。したがって、ポインティング・ベクトルの向きは放射状外向きになって、その大きさは、

$$\begin{aligned} \frac{r}{2\pi R^2} I(t) \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi R^2} &= -\frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{r}{(\pi R^2)^2} Q(t) \frac{dQ(t)}{dt} \\ &= -\frac{1}{4\varepsilon_0} \frac{r}{(\pi R^2)^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $Q(t)$ は時間の増加に伴って減少する関数だから、全体としては正になっていることに注意。

4. 極板間から抜け出すエネルギーを計算するために、円周方向と極板方向に積分すると、

$$\begin{aligned} & D \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4\varepsilon_0} \frac{R}{(\pi R^2)^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} R d\theta \\ &= -D \frac{1}{4\varepsilon_0} \frac{R}{(\pi R^2)^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} R 2\pi \\ &= -D \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\pi R^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} \end{aligned}$$

となる。極板方向の積分は長さ D をかけることに対応する。ここで計算した量は単位時間あたりにエネルギーが抜け出す割合になっていることに注意すること。したがって、時刻 $t = 0$ から $t = \infty$ までに抜け出すエネルギーを求めるためには、時間に関して積分を行わないといけない。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty -D \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\pi R^2} \frac{dQ^2(t)}{dt} dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{D}{\varepsilon_0 \pi R^2} \int_0^\infty \frac{dQ^2(t)}{dt} dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{C} \int_0^\infty dQ^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2(0)}{C} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $C = \varepsilon_0 \pi R^2 / D$ を用いている。

5. 導線の周囲の磁場はアンペールの法則より、

$$B(r, t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t)$$

である。一方、電界は導線に沿って生じている。導線のすぐ外側の電界も導線に対して並行になっていると期待される。また、電界の大きさは、

$$E(r, t) = \frac{R_0 I(t)}{\ell}$$

となる。ポインティングベクトルの大きさ S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\mu_0} E(r, t) B(r, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{R_0 I(t)}{\ell} \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \end{aligned}$$

となる。また、その向きは導線に向かって入って来る向きになっている。

導線全体で単位時間に入って来るエネルギーを求めるために、積分を行うと

$$\begin{aligned} \int S d\ell r d\theta &= \int \frac{1}{\mu_0} E(r, t) B(r, t) d\ell r d\theta \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{R_0 I(t)}{\ell} \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \ell r 2\pi \\ &= R_0 I^2(t) \end{aligned}$$

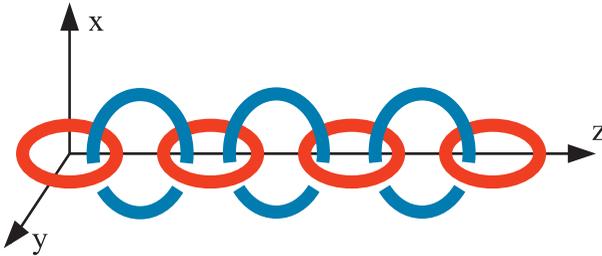
となる。

6. 抵抗が存在しないので、導線に沿って電界は生じない。電界が存在しなければ、ポインティングベクトルもゼロである。
7. コンデンサーの極板の間から抜け出したポインティングベクトルが空間を通過して、抵抗に戻って来るようになっている。

3.3.4 電磁波

微分形のマクスウェルの方程式の3番目の式 3.26c より、磁場が変化すると電場が発生する。この発生した電場がさらに時間変化すると、今度は同じく4番目の式 3.26d より磁場が発生する。するとまた、電場が発生し、...と空間中を伝わる波 = 「電磁波」が生じる。

電荷も電流もない真空中を伝わる波を考える。これらの条件を数式で表すと、 $\rho = 0$ 、 $\vec{i} = \vec{0}$ 、 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ 、そして $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ である。よって、マクス



ウェルの方程式は電界 \vec{E} と磁場 \vec{H} だけで表せ、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

となる。ここで z 方向に伝わる平面波を考えると、すべての量は z と t だけの関数であるから、マクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\implies \partial_z E_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \partial_t \vec{H} &\implies \begin{cases} -\partial_z E_y &= -\mu_0 \partial_t H_x \\ \partial_z E_x &= -\mu_0 \partial_t H_y \\ 0 &= -\mu_0 \partial_t H_z \end{cases} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 &\implies \partial_z H_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &\implies \begin{cases} -\partial_z H_y &= \varepsilon_0 \partial_t E_x \\ \partial_z H_x &= \varepsilon_0 \partial_t E_y \\ 0 &= \varepsilon_0 \partial_t E_z \end{cases}\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\partial_A B = \frac{\partial B}{\partial A}$ と略記している。 $\partial_z E_z = 0$ 、 $\partial_t E_z = 0$ より、 E_z は z にも t にもよらない定数である。ここでは静電場は考慮していないので、 $E_z = 0$ と結論づけることができる。同様にして $H_z = 0$ が結論できるので、電磁波は「横波」であることがわかる。

ここで、 \vec{E} の方向を x 方向にとると、定義より $E_y = 0$ である。この $E_y = 0$ と上記の方程式を合わせて、

$$\partial_t H_x = 0, \quad \partial_z H_x = 0$$

が得られる。すなわち、 $H_x = 0$ となり \vec{H} は y 成分だけを持つ。

結局、マクスウェルの方程式は以下のように簡略できる。

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \\ H_z &= 0 \\ E_y &= 0 \\ H_x &= 0 \\ \partial_z E_x &= -\mu_0 \partial_t H_y \\ -\partial_z H_y &= \varepsilon_0 \partial_t E_x \end{aligned}$$

最初の2式は横波であることを示し、第3,4式は波に伴う電界と磁場の変動方向が直交していることを表している。最後の2つの方程式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ &\frac{\partial}{\partial t} \text{と} \frac{\partial}{\partial z} \text{の順序を入れ替えると、} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ &\frac{\partial H_y}{\partial t} \text{を} -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \text{に置き換えて} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}$$

となるが、これらは早さが $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ の波動方程式である。

すなわち、マクスウェルの方程式より

$$E_x = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c_0} \right)$$

$$E_y = 0$$

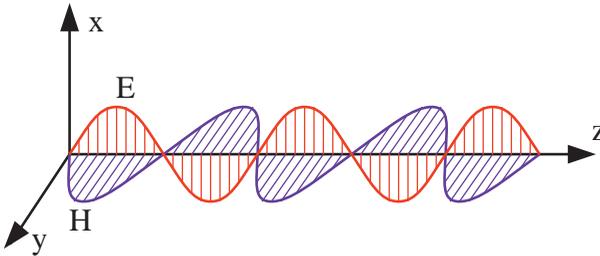
$$E_z = 0$$

$$H_x = 0$$

$$H_y = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c_0} \right)$$

$$H_z = 0$$

となる波＝「電磁波」の存在が予言される。この予言はマクスウェルのよって最初になされ、ヘルツによってその存在が確認された。ただし $\frac{H_0}{E_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ である。



光速

SI 単位系では、光速は 2.99792458×10^8 [m/s] と定義されている。真空中の透磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] も定義なので、真空中の誘電率 ϵ_0 [F/m] も一意的に決まってしまう。

3.3.5 ベクトル解析を応用した電磁波の方程式の導出

マクスウェルの方程式から波動方程式を導出するときに、まず平面波を仮定して導出した。ここでは、ベクトル解析の手法を用いて、一般の場合の波

動方程式を導出しよう。

真空中のマクスウェルの方程式は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.31a) \\ (3.31b) \\ (3.31c) \\ (3.31d) \end{array}$$

となる。まず、式 3.31c の両辺に $\vec{\nabla} \times$ を作用させると、

$$\vec{\nabla} \times \{ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \} + \vec{\nabla} \times \left\{ \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} = 0 \quad (3.32)$$

左辺第 1 項はベクトル解析の公式と真空であること ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$) より、 $-\nabla^2 \vec{E}$ になる。一方、式 3.31d を時間で微分して空間と時間の微分の順序を変えれば、第 2 項は $\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E}$ となる。以上により、

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.33)$$

が得られる。これは、波動方程式になっている。

3.3.6 電気双極子の振動による電磁波

正の電荷と負の電荷がそれぞれ、 $(0, 0, z_0 + \Delta \cos \omega t)$ と $(0, 0, -z_0 - \Delta \cos \omega t)$ にある。このときに放出される電磁波について考察しよう。

z 軸方向では、電界は常に z 方向を向いている。電荷の運動に伴う電流は z 軸方向に流れるから、磁場は z 軸の周りにできる。もし、電磁波が z 軸方向に伝搬すると仮定すれば、その進行方向と電界の向きが一致することになり、電磁波の条件を満たさない。従って、 z 軸方向に電磁波は伝搬しない。

一方、 x 軸方向に進む電磁波を仮定した場合、電界の向きは z 軸方向、磁場の向きは y 方向、そして仮定により、電磁波の進行方向は x 軸であるので、電磁波の存在条件を満たしている。よって、電磁波は x 軸方向に伝搬す

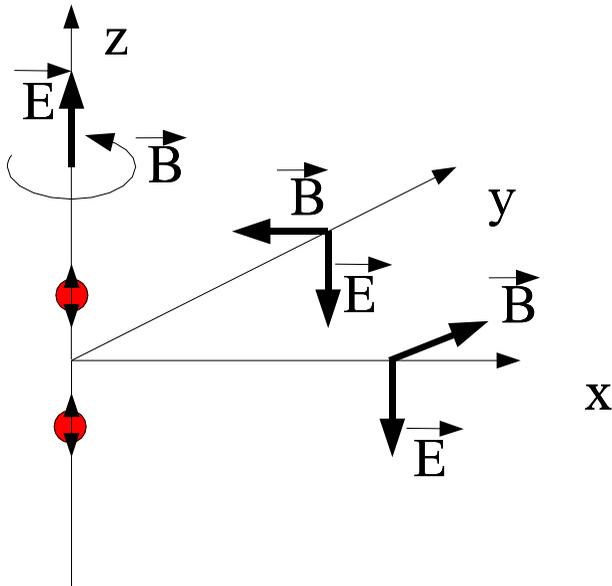


図 3.10 電気双極子の振動による電磁波

ることができる。なお、対称性により、 z 軸方向に垂直な方向には一様に電磁波は伝搬する。

電磁波はエネルギーを荷電粒子から無限速に運ぶので、荷電粒子の運動を継続するためにはエネルギーの供給が必要である。あるいは、荷電粒子に外力を与えて運動させないと、その運動はいつか止まってしまう。では、原子の中の電子の運動はどうだろうか？この疑問が量子力学を生んだ。

問題 3.3.5

電界の振幅が 0.1 Vm^{-1} の電磁波において、磁束密度の振幅はいくらか？また、ポインティング・ベクトルの大きさはいくらか？

===== 解答 =====

$$\frac{H_0}{E_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

より、

$$\begin{aligned} H_0 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \\ &= \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} 0.1 \\ &= 2.7 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

となる。単位は [A/m] である。磁束密度は、

$$\begin{aligned} B_0 &= \mu_0 H_0 \\ &= 3.3 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

となる。単位は [T] である。また、ポインティングベクトルの大きさは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 &= 0.1 \cdot 2.7 \times 10^{-4} \\ &= 2.7 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

となる。単位は [W/m²] である。

問題 3.3.6

次のような z 軸方向に進む 2 つの電磁波（電界ベクトルは x 軸方向）がある。

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_2(z, t) &= E_0 \cos(-kz - \omega t) \end{aligned}$$

重ね合わせによって生じる電磁場はどのようなものか？

===== 解答 =====

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_1(z, t) + E_2(z, t) \\ &= E_0 (\cos(kz - \omega t) + \cos(-kz - \omega t)) \\ &= 2E_0 \cos kz \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(z, t) &= B_0 \cos(kz - \omega t) - B_0 \cos(-kz - \omega t) \\ &= 2B_0 \sin kz \sin \omega t \end{aligned}$$

となる。磁束の変化する向きは y 軸方向である。磁束密度の符号はポインティングベクトルが z 軸向きであることから決まる。

合成された波は定常波になっていることに注意。

問題 3.3.7

次の式を満たすベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r}, t)$ を導入しよう。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\partial_t \vec{A} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

このとき、電荷も電流もない真空中の Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{A} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} \end{aligned}$$

のように還元されることを示せ。

===== 解答 =====

真空中の Maxwell の方程式は、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

であった。それぞれ \vec{A} を用いて検討しよう。

第1式の左辺は、 \vec{A} を用いて書くと

$$\vec{\nabla} \cdot (-\varepsilon_0 \partial_t \vec{A}) = -\varepsilon_0 \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

となる。すなわち、第1式は $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ならば、成立する。

第2式の左辺は、 \vec{A} を用いて書くと $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ となる。この式はベクトル演算の公式より、恒等的にゼロになる。言い替えると、 \vec{A} を導入すると第2式は必要なくなる。

第3式は、 \vec{A} を用いて書くと

$$\vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{A}) = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

となる。この式は恒等的に成立する。言い替えると、 \vec{A} を導入すると第3式は必要なくなる。

第4式は、 \vec{A} を用いて書くと

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \partial_t (-\varepsilon_0 \partial_t \vec{A})$$

となる。左辺は公式より変形できて、

$$\frac{1}{\mu_0} \left(-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right) = \partial_t (-\varepsilon_0 \partial_t \vec{A})$$

となる。ここで、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ から、最終的に、

$$\nabla^2 \vec{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A}$$

と等価になる。

3.4 物質中の電界と磁場

電磁場と物質の相互作用を考察する。電束密度と磁束密度を定義しなおすことによって、真空中と同じ形式の基本方程式が成立する。

3.4.1 誘電体

電界中に絶縁体を入れると、その表面に電荷が現れる。この現象を「誘電分極」と言い、その電荷を「分極電荷」と呼ぶ。簡単に誘電分極が起こる理由を説明しておこう。

誘電分極が起こる機構としては、大別して2種類ある。

1. 絶縁体の構成要素（原子や分子）が電気双極子を持っている場合。外部から電界が作用していないとき、この電気双極子は乱雑な方向を向いているために、巨視的にみると（物質全体としては）電気双極子は存在しないように見える。しかしながら、外部から電界が作用とすると、全体的に原子や分子の双極子が電界の方向を向き、外部からもその存在が明らかになる。
2. 絶縁体の構成要素（原子や分子）が電気双極子を持っていない場合。この場合は電界が作用していないとき、原子や分子を見ても電気双極子は存在しない。ところが、このような原子や分子を電界中におくと、負の電荷を持つ電子は電界の小さい方に引き寄せられ、正の電荷を持つ原子核は電界の大きいほうへ引き寄せられる。このために、正負の電荷の重心位置がずれることになる。すなわち、電気双極子が誘起されたことになる。

誘電体を入れたキャパシター

同型のキャパシターの一方には誘電体を入れ、もう一方は真空のままにしておく。この時、誘電体を入れたキャパシターの容量は真空のままのキャパシターに比べて、大きくになる。これは誘電体の分極電荷によって、電極間に生じる電場が実効的に小さくなるからである。

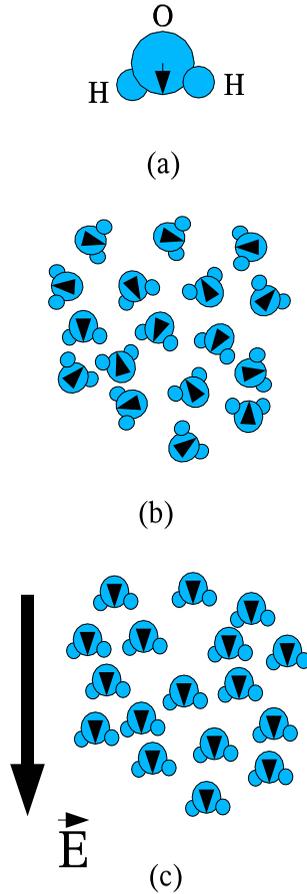


図 3.11 分極した分子と電界中の振る舞い。(a) 典型的な分極した分子である水分子の模式図。電子分布が非対称なので、電気双極子になっている。(b) 電界がかかっていない状態。(c) 電界がかかっている状態。

3.4.2 分極と電束密度

誘電分極を起こした絶縁体内から分極の方向に長さ ℓ 、断面積 S の円柱を切り出したと考える。この時、この円柱の断面に現れる電荷の密度が σ

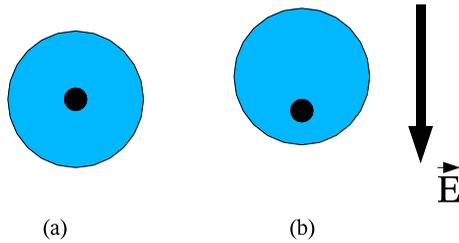


図 3.12 「原子」の電界中の振る舞い。(a) 電界がかかっていない状態。(b) 電界がかかっている状態。正電荷と負電荷の空間分布の重心がずれて、電気双極子モーメントを持っている。

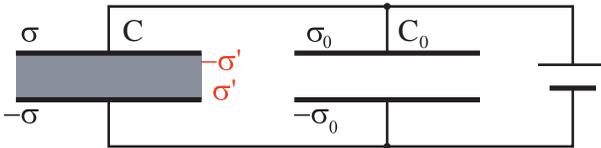


図 3.13 誘電体を入れたキャパシター。

になったと仮定する。正負の電荷の重心のズレを \vec{u} 、また正の電荷の密度を ρ とすると、 $\sigma = \rho|\vec{u}|$ になる。ここで大きさが σSl で向きが分極の方向を持ったベクトルを考え、この円柱の「双極子モーメント」と呼ぼう。分極の強さを表すためには、単位体積あたりの「双極子モーメント」を用い、これを「誘電分極」、「電気分極」または「分極ベクトル」と呼ぶ。分極ベクトルは、

$$\vec{P} = (\rho\vec{u}Sl)/(Sl) = \rho\vec{u} \quad (3.34)$$

である。電界が位置の関数だったり、物質が一様でなかったりする場合には、 \vec{P} は位置 \vec{r} の関数のなることに注意。

誘電体中の閉曲面 S を考え、分極が生じた場合その曲面の内側から外側に動く電荷を考察する。先ほどの \vec{u} を用いると、 $\int_S \rho\vec{u} \cdot d\vec{S}$ となる。 \vec{P} の定義により、この電荷は $\int_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$ となる。この閉局面 S 内の電荷は最初ゼロ

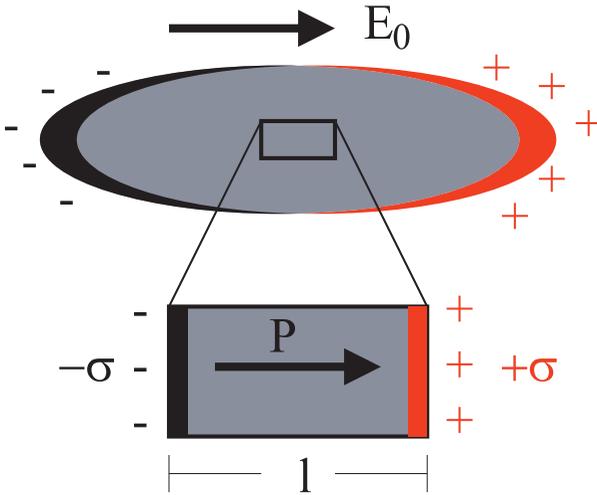


図 3.14 誘電分極と分極ベクトル。

であったので、分極が起こった後に残る電荷 Q_P は

$$Q_P = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (3.35)$$

となる。分極は正負の電荷の重心のズレ、または電気双極子を持った分子の向きがそろうことによって生じるので、分極電荷はかならず正負が組になって現れ、物質全体ではその和はゼロになる。それに対して分離できる通常の電荷を真電荷と呼ぶ。

式 3.35 に対してガウスの定理を適用すると、分極電荷の密度 $\rho_P(\vec{r})$ と分極ベクトル \vec{P} の間の関係が得られる。

$$\rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (3.36)$$

物質中のガウスの法則では、分極電荷も考慮しないといけない。微分形で書くと、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \{ \rho(\vec{r}) + \rho_P(\vec{r}) \}$$

となる。 \vec{P} を使って変形すると、

$$\vec{\nabla} \cdot \{\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})\} = \rho(\vec{r})$$

となる。物質中の電束密度ベクトルとして、

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

を定義すると、物質中のガウスの法則は、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (3.37)$$

となり、真空中と同じ形になる。

通常、分極は電界に比例する。また、多くの物質（等方性物質）では電場に比例するだけでなく、方向も一致する。すなわち、

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}$$

となる。ここで、 χ_e をその誘電体の電気感受率と言う。 χ_e を使うと、

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi_e) \vec{E}$$

となり、電束密度は電界に比例することになる。そこで、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_e \quad (3.38)$$

を定義して、その物質の誘電率という。当然、

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (3.39)$$

となる。また、真空の誘電率 ε_0 と ε の比を比誘電率と呼ぶ。

物質中の静電界の基本法則のまとめ

物質中の静電界の基本法則は、

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) & (3.40a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 & (3.40b) \\ \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) & (3.40c) \end{cases}$$

にまとめられる。式 (c) は電束密度と電界の関係式を与える。

3.4.3 静電界の境界条件

電界の境界条件

電界に関する境界条件を考えるために、図 3.15 のように境界上の点 r_1 をとる。

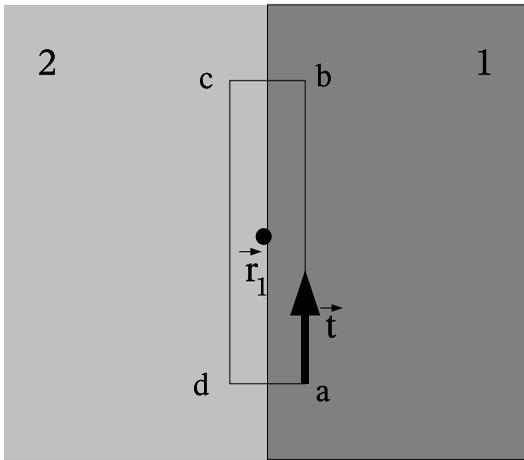


図 3.15 電界の境界条件

その周囲を囲む境界面にまたがった経路 $abcd$ を考えて、式 3.40b の積分形 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ を適用する。

$$\begin{aligned} & \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{ab} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{cd} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{bc} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{da} \vec{E} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

bc と da の経路はいくらでも小さくできるので、無視することにする。また、経路 ab と cd では \vec{E} は一定と見なせるので、

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned}
 &= \vec{E}_1 \cdot \vec{t} \Delta s - \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \Delta s \\
 &= \{ \vec{E}_1 \cdot \vec{t} - \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \} \Delta s \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。ここで \vec{t} は境界面に平行な単位ベクトルである。従って、

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \quad (3.41)$$

の関係が成り立たないといけなない。

電束密度の境界条件

電束密度に関する境界条件を考えるために、図 3.16 のように境界上の点 r_1 をとる。

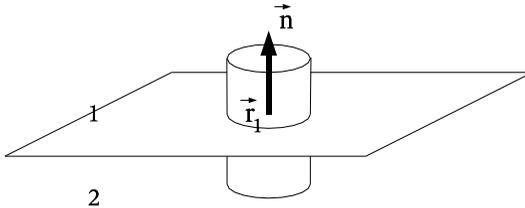


図 3.16 電束密度の境界条件

その点を含む境界面にまたがった円筒を考えて、式 3.40a の積分形 $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$ を適用する。ここで境界面上に真電荷はないとすれば、右辺はゼロである。円筒の高さを十分小さくすれば、側面を通過する電束はゼロに近づけることができる。従って、物質 1 側の上面 S_1 を通過する電束密度と物質 2 側の下面 S_2 を通過する電束密度だけを考えれば良い。それぞれは、

$$\begin{aligned}
 \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \{ \vec{D}_1 \cdot \vec{n} \} \Delta S \\
 \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= -\{ \vec{D}_2 \cdot \vec{n} \} \Delta S
 \end{aligned}$$

となる。この和がゼロになるのだから、

$$\{\vec{D}_1 \cdot \vec{n} - \vec{D}_2 \cdot \vec{n}\} \Delta S = 0$$

である。従って、

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n} \quad (3.42)$$

の関係が成り立たないといけない。

問題 3.4.1

分極の生じる第 1 の機構について考察する。分子を 2 こ「原子 A,B」が結合したものとする。2 原子の中心間の距離は 0.1 nm で、この「分子」の電気双極子モーメントの大きさは、 5×10^{-30} Cm であった。どの程度の電荷の移動が「原子 A,B」間にあっただろうか？

===== 解答 =====

双極子モーメントの定義より、移動した電荷を q 、移動距離を l とすると、

$$\begin{aligned} p &= ql \\ 5 \times 10^{-30} &= q \cdot 0.1 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

となる。この式より、 q を解くと 5×10^{-20} [C] になる。電子の持つ電荷 1.60×10^{-19} と比較すると、約 30 % の電荷の移動があったことがわかる。

問題 3.4.2

分極の生じる第 2 の機構について考察する。原子を正電荷 $= q$ の点電荷と、それを中心とする半径 a の球内に一様な負電荷（合計は $-q$ ）からなると考えよう。ただし、負電荷の分布は変化しないと考える。

1. 正の点電荷が負電荷の中心から長さ u だけ離れたとき、正の点電荷にはどのような力が働くか？
2. この「原子」に一様な電界（その大きさは E ）をかけた。正電荷の位置と負電荷の中心の位置のズレはいくらになるか？正電荷と負電荷に作用する力のバランスを考慮して求めよ。

3. 分極率を求めよ。

===== 解答 =====

1. 分布した負電荷のつくる電界は、ガウスの定理より、

$$4\pi u^2 \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi u^3 \rho$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi a^3}$$

より、

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{u}$$

となる。したがって、正の点電荷に作用する力は、

$$q\vec{E} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{u}$$

となる。

2. 力のバランスを考えると、

$$q\vec{E}_{ext} - q\vec{E}(u) = 0$$

\vec{E}_{ext} を x 軸の正の向きにとると、

$$qE_{ext} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} u$$

したがって、

$$qu = \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{q} qE_{ext}$$

となる。

3. 仮想的な 1 原子の分極は

$$p = qu = \alpha E$$

である。したがって、 $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$ となる。

問題 3.4.3

半径 a の誘電体球に一様な分極 \vec{P} が生じた。球内部の電界を求めよう。ただし、 $|\vec{u}| \ll a$ である。

1. 原点を中心とする半径 a の球内に一様に分布する電荷（密度は ρ ）が球内の点 \vec{r} に作る電界 $\vec{E}(\vec{r})$ を求める。
2. 中心が $\vec{u}/2$ の一様な正電荷の球状の分布（半径 a 、電荷密度 ρ ）と中心が $-\vec{u}/2$ の一様な負電荷の球状の分布（半径 a 、電荷密度 $-\rho$ ）の作る電界 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めよ。
3. $\vec{E}(\vec{r})$ を分極ベクトル \vec{P} を用いて、表せ。

===== 解答 =====

1.

$$4\pi r^2 \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \frac{\vec{r}}{r}$$

より、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$$

となる。

2.

$$\begin{aligned} \vec{E}_+(\vec{r}) &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\vec{r} - \frac{1}{2} \vec{u} \right) \\ \vec{E}_-(\vec{r}) &= \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} \left(\vec{r} + \frac{1}{2} \vec{u} \right) \end{aligned}$$

であるから、ベクトル和をとると、

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\vec{r} - \frac{1}{2} \vec{u} - \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{u} \right) \\ &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{u} \end{aligned}$$

となる。

3.

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

となる。

問題 3.4.4

電気感受率の概算を行おう。電気双極子モーメント p を持つ分子が電界 \vec{E} の中に置かれた場合、電気双極子が電界の方向を向く場合と逆向きになる場合のエネルギーの差は、 $2pE$ である。統計力学より、温度 T で熱振動する分子の平均のモーメントは $\bar{p} \sim p \frac{2pE}{k_B T} = \frac{2p^2}{k_B T} E$ である。ここで、 k_B はボルツマン定数である。単位体積中に分子が N 個あるとする。ただし、誘電体の分子による電界は小さいとして、外部からかけられる電界を分子も感じるものとして計算せよ。

1. 電気感受率は

$$\chi_e \sim \frac{2Np^2}{k_B T}$$

となることを示せ。

2. 温度が 300 K で、分子の電気双極子モーメントが 5×10^{-30} Cm のとき、 $\epsilon/\epsilon_0 - 1$ はどの程度か？分子の平均間隔は 0.5 nm である。また、 $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ JK⁻¹ である

===== 解答 =====

1. $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ で、 $\vec{P} = N\bar{p} = N \frac{2p^2}{k_B T} \vec{E}$ であるから、 $\chi_e = N \frac{2p^2}{k_B T}$ となる。

2.

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 = \frac{\chi_e}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2Np^2}{k_B T} / \varepsilon_0 \\
 &= \frac{2(0.5 \times 10^{-9})^{-3} (5 \times 10^{-30})^2}{1.38 \times 10^{-23} \cdot 300} / \varepsilon_0 \\
 &\sim 11
 \end{aligned}$$

となる。

問題 3.4.5

厚さ 0.1 mm、比誘電率 2.3 の誘電体がある。容量 0.1 μF のコンデンサーを作るために必要な極板面積はいくらか？

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}
 C &= \varepsilon' \varepsilon_0 \frac{S}{d} \\
 &= 2.3 \cdot 8.85 \times 10^{-12} \frac{S}{0.1 \times 10^{-3}} \\
 &= 0.1 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

より、 $S = 0.49 \text{ [m}^2\text{]}$ でなければならない。

問題 3.4.6

誘電率 ε の薄い誘電体板を電界中に置いた。電界と誘電体板の法線のなす角を θ として、誘起される分極電荷密度を求めよ。

===== 解答 =====

誘電体内の電界の法線成分を E'_n とすると、 $\vec{D} \cdot \vec{n}$ が連続であると言う境界条件は、

$$\varepsilon E'_n = \varepsilon_0 E \cos \theta$$

となる。誘電体表面の分極電荷密度は分極ベクトルの法線成分に等しいから、

$$\begin{aligned} \sigma_P &= P_n \\ &= \varepsilon E'_n - \varepsilon_0 E'_n \\ &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E \cos \theta \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ を用いていることに注意。

問題 3.4.7

誘電率 ε の一様な誘電体中に電界 \vec{E} がある。空洞を作ったときの電界 \vec{E}' の強さを求めよ。

1. 電界の方向に平行な細長い棒状の空洞。
2. 電界の方向に垂直な薄くて広い円盤状空洞。
3. 球状の空洞。

===== 解答 =====

1. 表面に誘起される表面分極電荷の大きさは一定であるが、空洞の長さはいくらでも長くすることができる。したがって、誘起された電荷による電界はゼロ、すなわち、電界の強さは同じになる。

2. $\vec{D} \cdot \vec{n}$ が連続であるという境界条件より、 $\vec{E}' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \vec{E}$ となる。
3. 真空中に誘電体球をおく場合を考えよう。誘電分極による電界は、 $-\vec{P}/3\varepsilon_0$ である。真空中の様な電界を \vec{E} とすれば、誘電体中の電界 \vec{E}' は以上2つのベクトルの和になり、

$$\vec{E}' = \vec{E} - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

となる。一方、定義より、

$$\varepsilon \vec{E}' = \varepsilon_0 \vec{E}' + \vec{P}$$

であるから、

$$\vec{E}' = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \vec{E}$$

となる。

問題は真空と誘電体の役割を逆にすれば良いので、 ε と ε_0 を入れ換えて、

$$\vec{E}' = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \vec{E}$$

となる。

問題 3.4.8

平行平板キャパシターに誘電率 ε の誘電体をいれた。このキャパシターに蓄えられている電荷 Q_0 は一定である。

1. 誘電体がある場合とない場合の極板間の電界の様子を示し、容量の比を求めよ。
2. 極板間から誘電体を引き出すために必要な力はいくらか? 極板は1辺 L の正方形で辺に平行に誘電体を動かす。なお誘電体も1辺 L の正方形で、その厚さは極板間の距離 d に等しい。

===== 解答 =====

1. 図は省略。ただし、分極電荷のために、誘電体中（電極間）の電界は弱くなることを図示すれば良い。
容量比は $\varepsilon/\varepsilon_0$ で大きくなる。
2. 誘電体の位置を x とすると、

$$C = \frac{L}{d} ((L-x)\varepsilon + x\varepsilon_0)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{(\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x)L}$$

である。力は、

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial}{\partial x} U(x) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{dQ^2}{L} (\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x)^{-2} (\varepsilon - \varepsilon_0)(-1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{L (\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x)^2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \\ &= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x} U(x) \end{aligned}$$

となる。

問題 3.4.9

誘電率 ε の誘電体球（半径 a ）を一様な電界 \vec{E}_0 の中においた。球に生じる電気双極子の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

誘電分極により、球の内部には反電場 $-\vec{P}/3\varepsilon_0$ が生じる。したがって、誘電体球内部の電界は、 $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{P}/3\varepsilon_0$ となる。一方、定義より、 $\varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ であるから、

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \vec{E}_0$$

となる。よって、球全体の双極子モーメントは、

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{3}a^3\vec{P} &= \frac{4\pi}{3}a^3\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\vec{E}_0 \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}a^3\vec{E}_0\end{aligned}$$

となる。

3.4.4 磁性体

物質が磁場の影響で磁気双極子を持つようになる現象のことを、物質の磁化と言う。単位体積当たりの双極子モーメントの和を磁化ベクトルと呼ぶ。誘電体の場合と同様に磁化の原因としては、2種類考えることができる。

1. 物質の構成要素（原子や分子）が磁気双極子を持っている場合。その磁気モーメントの起源は通常電子の持つ磁気モーメントである。外部から磁場が作用していない場合、この磁気双極子は乱雑な方向を向いているために、巨視的にみると（物質全体としては）双極子は存在しないように見える。しかしながら、外部から磁場が作用とすると、全体的に原子や分子の双極子が磁場の方向を向き、外部からもその存在が明らかになる。
2. 物質の構成要素（原子や分子）が磁気双極子を持っていない場合。磁場が作用していない場合は、原子や分子を見ても磁気双極子は存在しない。ところが、このような原子や分子を磁場中におくと、磁気双極子を持つようになる。しかしながら、この場合、生じる磁気モーメントは磁場と逆向きになる。

通常物質は第1の機構が第2の機構に勝り、磁場をかけるとその方向に磁気モーメントがあらわれる。このような物質のことを常磁性を示す物質という。まれには、第2の機構しか働かない物質もあり、反磁性を示すという。

強磁性という性質を示す物質もある。例えば、鉄やニッケルである。この場合、磁場中において非常に大きな磁気モーメントを示す。これは、先の二つの機構とは異なった量子力学的な効果の現れである。この場合、磁区と呼ばれる領域で原子の磁気モーメントが磁場がない時にも揃っている。この磁区の大きさは光学顕微鏡で見ることができる程度であり、多数の原子を含んでいる。マクロな鉄やニッケルの固まりでは、磁区毎の磁気モーメントの向きはランダムなので、磁場がないときは外部に磁気モーメントは現れない。ところが、磁場をかけると磁区の磁気モーメントの向きが揃うので、外部に大きな磁気モーメントが現れる。永久磁石はこの磁区のモーメントが磁場のない状態でも揃うように工夫した物質である。

完全反磁性を示す超伝導体については、3年生の固体物理の講義で説明があるのでしよう。

3.4.5 物質中の静磁場の基本法則

長岡の電磁気学 II では、磁化電流を導入してアンペールの法則から物質中の静磁場の基本法則を「導出」している。この磁化電流の起源は曖昧なので、以下のように、静磁場の基本法則を考えることにする。

物質中では磁化が存在する場合もあるので、直接磁束密度と電流密度を結びつけることはできない。そこで、磁束密度 \vec{B} から磁化 \vec{M} の効果を差し引いた磁界 $\vec{H}(\vec{r})$ を

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r}) \quad (3.43)$$

と定義して、形式的に

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{i}(\vec{r})$$

が成立するようにする。ここで、 $\vec{i}(\vec{r})$ は磁化電流ではない「本当」の電流で

ある。^{*2}

強磁性体ではない通常の磁性体では、弱い磁場の下で磁化ベクトルはかけられた磁場に比例する。そこで、

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}) \quad (3.44)$$

と表し、磁化率 χ_m を定義する。磁束密度と磁界の間には

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \mu_0 \{1 + \chi_m\} \vec{H}(\vec{r}) \\ &= \mu \vec{H}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

という関係が成り立つ。ここで、 $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ を透磁率と言う。通常の物質では $\mu \approx \mu_0$ と考えて良いことがほとんどである。この点が誘電率 ε と大きく異なる。

静磁場の基本法則のまとめ

静磁場の基本法則は

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{i}(\vec{r}) & (3.46a) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 & (3.46b) \end{cases}$$

とまとめられる。

^{*2} この式は単位系として EB 対応を採用した場合である。EH 対応の場合には

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \{\vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r})\}$$

である。ここでは \vec{M} の定義が異なっており、

$$\vec{M}(\text{EH}) = \mu_0 \vec{M}(\text{EB})$$

である。SI 単位系では EB 対応の \vec{M} を用いるのが通常である。EH 対応と EB 対応についての詳細は文献 [3] を参考のこと。EB 対応を用いて講義を行うので、長岡の教科書と対比する場合は注意のこと。

3.4.6 静磁場の境界条件

物質中の静電界の境界条件を求めた方法と同様にして、

$$\vec{H}_1(\vec{r}) \cdot \vec{t} = \vec{H}_2(\vec{r}) \cdot \vec{t} \quad (3.47)$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \vec{B}_2(\vec{r}) \cdot \vec{n} \quad (3.48)$$

が得られる。

問題 3.4.10

問題 4 で温度 300 K における電気感受率の大きさの程度を見積もった。同様にして、磁性体の磁気感受率率 μ を求め、真空の透磁率 μ_0 との比を求めよ。ただし、分子の磁気双極子モーメントを $8.0 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ 、分子間隔を 0.5 nm とする。

===== 解答 =====

磁束密度 B (単位は T) 中の磁気モーメント μ (単位は $\text{Am}^2 = \text{JT}^{-1}$) のもつエネルギーは μB である。従って、

$$\frac{2(0.5 \times 10^{-9})^{-3}(8 \times 10^{-24})^2}{1.38 \times 10^{-23} \cdot 300} \mu_0 = 3.1 \times 10^{-4}$$

問題 3.4.11

薄い平面板を面に垂直に一樣に磁化した板磁石がある。単位体積当たりの磁化の大きさは M である。板内部と外部における磁界と磁束密度を求めよ。ただし、対称性から板に対して平行な成分はゼロになることも説明せよ。

この問題は以下のように理解することができる。仮想的に磁荷（単極磁石）を考えると、この問題はキャパシターにおける電荷を磁荷に置き換えたものと同じである。コンデンサーの外部に電界は存在しないのと同じように、今の問題では板磁石の外には磁界は存在しない。

===== 解答 =====

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ である。もしも、 \vec{B} に板に並行な成分が存在すると、 \vec{M} も水平方向の成分を持つ必要がある。しかしながら、これは仮定に反する。したがって、垂直方向の成分のみを考察すれば良い。

板磁石の内部では $B_{in} = \mu_0(H_{in} + M)$ 、外部では $B_{out} = \mu_0 H_{out}$ である。また、境界条件は $B_{in} = B_{out}$ で、この値を B とする。

$H_{out} = \frac{1}{\mu_0} B$ と $H_{in} = \frac{1}{\mu_0} B - M$ が得られる。他に磁石は存在しないので $B = 0$ すると、

$$\begin{aligned} H_{out} &= 0 \\ H_{in} &= -M \end{aligned}$$

が得られる。

問題 3.4.12

一様な磁化ベクトル \vec{M} (単位体積あたり) を持つ棒磁石を 2 本用意する。一つの磁石の N 極ともう一方の S 極を十分近づけた時、法線方向の磁束密度は連続であるので、隙間に生じる磁束密度 $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ となる。

1. 磁極の面積を S として、磁極間に働く力を求めよ。

===== 解答 =====

1. 磁石の間の空間に蓄えられている磁場のエネルギー $U(x)$ は、 x を磁石間の距離として、

$$U(x) = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S x$$

となる。これを x で偏微分すれば、力 F を求めることができる。したがって、

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial}{\partial x} U(x) \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} B^2 S \end{aligned}$$

となる。

問題 3.4.13

ある原子の磁気双極子モーメントは $9.5 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$ で、密度は $3 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ であった。すべての原子の磁気双極子モーメントが揃っている場合、この物質の磁化ベクトルはいくらになるか?

===== 解答 =====

$$\mu_0 9.5 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{28} = 3.6 \times 10^{-1}$$

単位は $[\text{T}](\text{Wb}/\text{m}^2)$ である。

問題 3.4.14

完全反磁性体の内部では、磁束密度はゼロである。このことと磁束に関する境界条件を考慮して、一様な磁界中に置かれた球形の完全反磁性体周辺の磁束密度の様子を図示せよ。

===== 解答 =====

球に垂直な磁束密度成分は存在しないことに注意して図を描くこと。

3.5 変動する電磁場と物質

3.5.1 物質中のマクスウェルの方程式

真空中と異なり、物質中では磁化電流や分極電荷の移動に関わる「電流」を考慮しないとイケない。静磁場の基本法則について考察した場合と同様に、分極や磁化を取り入れた電束密度と磁界を次のように導入する。

$$\begin{cases} \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) & (3.49a) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) & (3.49b) \end{cases}$$

そして、以下のマクスウェルの方程式が物質中で成立するとして、議論を進める。

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) & (3.50a) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 & (3.50b) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \partial_t \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 & (3.50c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \partial_t \vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) & (3.50d) \end{cases}$$

時間変動する電磁場を考える場合、静的な電磁場と違って物質の時間応答の遅れを考慮する必要がある。そのために以下の式が成り立たないこともある。

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, t) &= \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{M}(\vec{r}, t) &= \chi_m \vec{H}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

3.5.2 誘電体中の振動電界

誘電体中の振動電界の振る舞いを調べるために、誘電体をモデル化した原子の集合と考える。このモデル原子は、中心の質量の大きな原子核とそれにバネでつながれた電子の複合体と考える。原子核の質量は大きいので、電子の運動に比べて原子核の運動は無視できるとする。

バネ定数を k とすれば電界のない場合の運動方程式は、電子の変位を \vec{u} として

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + k \vec{u} = \vec{0} \quad (3.51)$$

となる。電子は固有振動数 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ を持つことになる。ここに、振動電界 $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ をかけると、

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + k \vec{u}(t) = -e \vec{E}_0 \cos \omega t \quad (3.52)$$

となり、外力の加わった振動子の運動方程式と同じ形になる。交流回路で学んだ微分方程式の解法を用いて、 $\vec{u} = \vec{u}_0 \cos \omega t$ とおいて式変形すると、

$$(-m\omega^2 + k)\vec{u}(t) = -e\vec{E}_0 \cos \omega t$$

となる。従って

$$\vec{u} = \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} \quad (3.53)$$

となる。1分子に z この電子があるとすれば、1分子に生じる分極 \vec{p} は、

$$\vec{p} = -ze\vec{u} \quad (3.54)$$

$$= \alpha(\omega)\vec{E} \quad (3.55)$$

ただし、

$$\alpha(\omega) = \frac{ze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.56)$$

で、これが分子の分極率である。ここで注目すべき点は振動電界 \vec{E} の振動数 ω が電子の固有振動数 ω_0 に近いところで、分極が非常に大きくなる点である。

マクロな物質でも、外部から与えられる電界が分子にもそのまま作用すると考えると、(この近似は分極の効果が小さい時に正しい) 単位体積中の分子の数 N を式 3.55 にかけて、

$$\vec{P} = N\vec{p} = \chi_e \vec{E} \quad (3.57)$$

ただし、

$$\chi_e(\omega) = \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.58)$$

となる。 χ_e は電気感受率である。そして、誘電率も周波数依存性を持ち、

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.59)$$

となる。周波数 $\omega = \omega_0$ で関数は発散するが、これは電子の運動における抵抗の効果を考えていないからである。

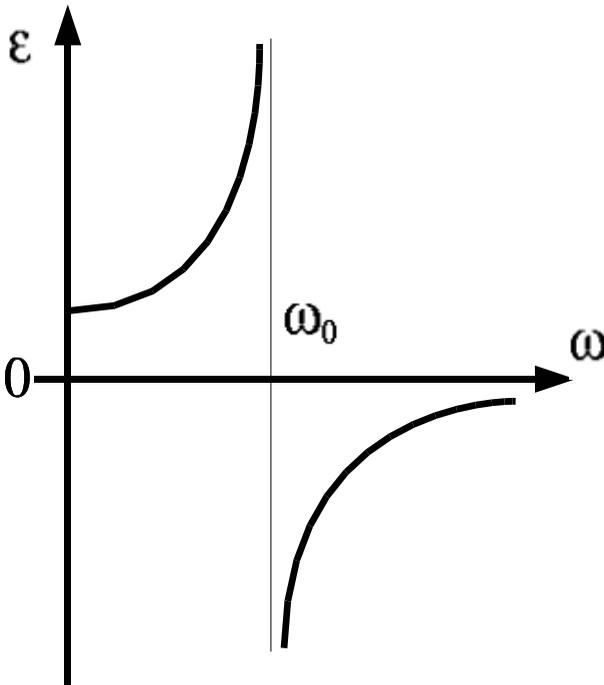


図 3.17 誘電率の周波数依存性（抵抗のない場合）

抵抗がある場合

電子の運動に速度に比例した抵抗がある場合を考える。電子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{u}}{dt} + k\vec{u} = -e\vec{E} \quad (3.60)$$

になる。ここで τ は緩和時間で、電界が急に变化した場合この程度の時間がたてば電子はその電界の変化に追随する。抵抗がない場合と同様に複素数を用いて、微分方程式を解くと、

$$\vec{u} = \frac{-e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau)} \vec{E} \quad (3.61)$$

となる。誘電率は複素数になり、

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau)} \quad (3.62)$$

となる。誘電率を実数部と虚数部に分けると、

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(\omega) + i\varepsilon'(\omega) \quad (3.63)$$

ただし、

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (3.64)$$

$$\varepsilon'(\omega) = -\frac{Nze^2}{m} \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (3.65)$$

である。

3.5.3 エネルギーの散逸

誘電体中の電界の持つエネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon(\omega) + i\varepsilon'(\omega)) |\vec{E}|^2 \end{aligned}$$

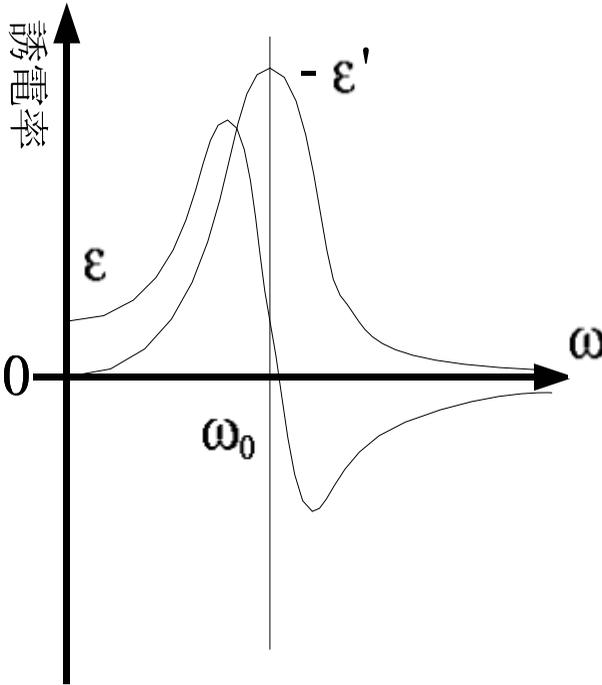


図 3.18 誘電率の周波数依存性（抵抗のある場合）

となってしまう。この虚数のエネルギーの意味を考えてみよう。

物理的に意味のある分極ベクトル \vec{P} は複素数で表した分極ベクトル $\tilde{\vec{P}}$ の実数部である。

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \Re\{\tilde{\chi}_e(\omega)\tilde{\vec{E}}\} \\
 &= \Re\{[\chi_e(\omega) + i\chi'_e(\omega)][\vec{E}(t) + i\vec{E}'(t)]\} \\
 &= \chi_e(\omega)\vec{E}(t) - \chi'_e(\omega)\vec{E}'(t) \\
 &= \chi_e(\omega)\vec{E}_0 \cos \omega t - \chi'_e(\omega)\vec{E}_0 \sin \omega t
 \end{aligned}$$

分極電流は分極の時間微分で与えられるから、

$$\vec{i}_P(t) = -\omega\chi_e(\omega)\vec{E}_0 \sin \omega t - \omega\chi'_e(\omega)\vec{E}_0 \cos \omega t$$

となる。この分極電流は電界中を動いているわけだから、単位時間、単位体積当たり

$$\begin{aligned}\vec{i}_P(t) \cdot \vec{E}(t) &= -\omega \chi_e(\omega) E_0^2 \sin \omega t \cos \omega t \\ &\quad -\omega \chi_e'(\omega) E_0^2 \cos \omega t \cos \omega t\end{aligned}$$

のエネルギーを散逸する。第1項は時間平均を取るとゼロになる。第2項は時間平均をとると、

$$\langle \vec{i}_P(t) \cdot \vec{E}(t) \rangle_{\text{時間平均}} = -\frac{1}{2} \omega \chi_e'(\omega) E_0^2 \quad (3.66)$$

となる。先のモデルに従えば、 $\chi_e' < 0$ なので、電界のエネルギーが散逸されることが分かる。ミクロに見れば、電界によって電子が動く。その動きに対して抵抗力が働いて、エネルギーを散逸していることを意味している。

最初の虚数のエネルギーは電界のエネルギーの散逸が起こることを意味している。

問題 3.5.1

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{u}}{dt} + k\vec{u} = -e\vec{E}$$

の定常解を求めよ。

===== 解答 =====

$d/dt \rightarrow i\omega$ と置き換えると、

$$-m\omega^2 \vec{u} + i\omega \frac{m}{\tau} \vec{u} + k\vec{u} = -e\vec{E}$$

となる。したがって、 \vec{u} について解くと、

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{-e\vec{E}}{m(-\omega^2 + i\omega/\tau + k/m)} \\ &= \frac{-e\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau)}\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\omega_0^2 = k/m$ に注意。

問題 3.5.2

問題 3.4.2 の分極のモデルを用いて、電子が振動する時の固有振動数を求めよ。ただし、原子の原子番号は Z 、電子一つの質量を m とする。また、 $Z = 6$ 、 $a = 0.07 \text{ nm}$ の場合の固有振動数を求めよ。

===== 解答 =====

$$q\vec{E} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{u}$$

より、上の式の k に相当する係数は、

$$\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{k/Zm} \\ &= \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m}} \\ &= \sqrt{\frac{6(1.60 \times 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8.85 \times 10^{-12} (0.07 \times 10^{-9})^3 \cdot 9.1 \times 10^{-31}}} \\ &= 6.67 \times 10^{16} \end{aligned}$$

となる。単位は [Hz](あるいは、[s⁻¹]) である。

問題 3.5.3

静電界の比誘電率が 4.5 の物質で、その中の電子の固有振動数が $1.04 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ の誘電体がある。振動数 $2.5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (赤い光) と $4.5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (青い) の光に対する比誘電率を求めよ。ただし、緩和時間は十分に長く誘電率の虚数部分は無視できると仮定する。

===== 解答 =====

虚数部分を無視すると、

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_0 + \frac{Nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ &= \varepsilon_0 + \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

である。 $\omega = 0$ のとき、 $\varepsilon/\varepsilon_0 = 4.5$ を用いると、

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{3.5}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

となる。

赤い光の場合 $\omega/\omega_0 = 0.240$ 、青い光の場合 $\omega/\omega_0 = 0.433$ であるから、そのときの比誘電率はそれぞれ、4.71 と 5.31 になる。

3.5.4 誘電体中の電磁波

電磁波の周波数が電子の運動の固有振動数より十分小さければ、真空中の誘電率や透磁率を物質中の値に置き換えてやれば良い。よって波動方程式は、

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.67)$$

となる。ただし、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (3.68)$$

である。また、真空中の光速との比

$$n = \frac{c}{v} \quad (3.69)$$

をその物質の絶対屈折率という。

物質 1, 2 がそれぞれ絶対屈折率を n_1, n_2 とするとき、 n_2/n_1 を物質 2 の 1 に対する相対屈折率という。

真空中ではすべての周波数の電磁波の速度は光速で一定であった。従って、任意の波形の波、すなわち異なった周波数の波の重ねあわせ、が真空中を伝搬するとき、その形は変化しない。ところが、物質中では周波数に応じてその電磁波の早さは異なる。図 3.19 参照。ここでは、分散がある場合とない場合の波（波束）の伝搬の例を図示している。具体的な波を表す式は、

$$f(t, x) = \sum_{i=-N}^N e^{-\left(\frac{i}{N}\right)^2} \sin \left(\left(k_0 - \frac{i}{N} \right) \left(x - \frac{\omega_0}{k_0} t \right) \right)$$

$$f_d(t, x) = \sum_{i=-N}^N e^{-\left(\frac{i}{N}\right)^2} \sin \left(\left(k_0 - \frac{i}{N} \right) \left(x - \frac{\omega_0}{k_0} \left(1 - \frac{i}{3N} \right) t \right) \right)$$

の通りである。図は $N = 100, x_0 = 2\pi, \omega_0 = 2\pi$ の場合を描いた。

従って、波の形が変化する場合がある。このような現象のことを波の分散という。虹も波の分散現象の現れである。

3.5.5 導体中の電磁波

誘電体中では、光速は周波数に応じて変化しても電磁波のエネルギーは誘電体によって吸収されないとして、電磁波の伝搬を取り扱った。導体中では、誘電体中と異なって、電磁波のエネルギーの導体による吸収が無視できなくなる。言い換えると、導体中を進む電磁波の振幅はだんだん減少する。

導体中の電磁波を考える場合、電流の効果を考慮しないとイケない。その点が真空中と異なっている。

電荷はないが ($\rho = 0$)、電流はある導体中を伝わる波を考える。また、 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 、そして $\vec{B} = \mu \vec{H}$ としている。よって、マクスウェルの方程式は境界 \vec{E} と磁場 \vec{H} だけで表せ、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu \partial_t \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \epsilon \partial_t \vec{E} \end{aligned}$$

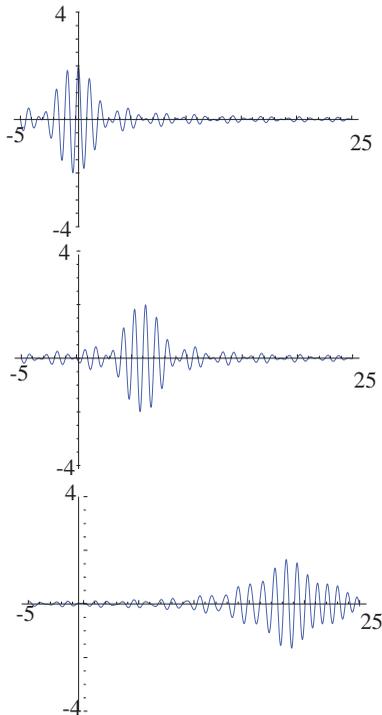


図 3.19 1 番目は $t = 0$ の場合である。2 番目は $t = 6$ で分散のない場合 ($f(t, x)$) で、3 番目は同じく $t = 6$ で分散がある (波長によって波の速さが異なる、 $f_d(t, x)$) 場合である。2 番目の図は単に 1 番目の図を平行移動しただけになっているが、3 番目の図は変形している。

となる。ここで z 方向に伝わる平面波を考えると、すべての量は z と t だけの関数であるから、マクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 &\implies \partial_z E_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \partial_t \vec{H} &\implies \begin{cases} -\partial_z E_y &= -\mu \partial_t H_x \\ \partial_z E_x &= -\mu \partial_t H_y \\ 0 &= -\mu \partial_t H_z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 &\implies \partial_z H_z = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{i} + \varepsilon \partial_t \vec{E} &\implies \begin{cases} -\partial_z H_y &= i_x + \varepsilon \partial_t E_x \\ \partial_z H_x &= i_y + \varepsilon \partial_t E_y \\ 0 &= i_z + \varepsilon \partial_t E_z \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\partial_A B = \frac{\partial B}{\partial A}$ と略記している。 z 方向に進む平面波を考えているので、 ∂_x や ∂_y を作用させると結果は必ずゼロになる。したがって、 $\partial_z E_z = 0$ が結論づけられる。しかも今は z 方向に進む波を考えているので、 E_z は定数でなければならないことが分かる。ここでは以後の計算を簡単にするためにゼロとする。同様にして $H_z = 0$ が結論できるので、電磁波は「横波」であることがわかる。

波動を表す式は $f(\vec{k} \cdot \vec{r} - t)$ のように表されることに注意。今の場合は、 $E_z(z - ct)$ となる。

ここで、 \vec{E} の方向を x 方向にとると、定義より $E_y = 0$ である。電流 $\vec{i} = \sigma \vec{E}$ である。ただし、 σ は周波数依存性がないとして静電界の値を使うことにする。電界は x 方向にしか値を持たないので、 $i_y = i_z = 0$ が結論づけられる。

次に、 $E_y = 0$ と上記の方程式を合わせて、

$$\partial_t H_x = 0, \quad \partial_z H_x = 0$$

が得られる。すなわち、 $H_x = 0$ となり \vec{H} は y 成分だけを持つ。

結局、マクスウェルの方程式は以下のように簡略できる。

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \\ H_z &= 0 \\ E_y &= 0 \\ H_x &= 0 \\ \partial_z E_x &= -\mu \partial_t H_y \\ -\partial_z H_y &= i_x + \varepsilon \partial_t E_x \end{aligned}$$

最初の2式は横波であることを示し、第3,4式は波に伴う電界と磁場の変動方向が直交していることを表している。最後の2つの方程式より、

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_t E_x) &= -\frac{1}{\varepsilon} \partial_t \partial_z H_y - \frac{1}{\varepsilon} \partial_t i_x \\ &\quad \text{第1項の } \partial_t \text{ と } \partial_z \text{ の順序を入れ替えると、} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \partial_t H_y - \frac{1}{\varepsilon} \partial_t i_x \\ &\quad \partial_t H_y \text{ を } -\frac{1}{\mu} \partial_z E_x \text{ に置き換えて} \\ &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \partial_z^2 E_x - \frac{1}{\varepsilon} \partial_t i_x \\ &\quad i_x \text{ を } \sigma E_x \text{ に置き換えて} \\ &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \partial_z^2 E_x - \frac{\sigma}{\varepsilon} \partial_t E_x \end{aligned}$$

整理すると、

$$\partial_z^2 E_x - \varepsilon \mu \partial_t^2 E_x - \sigma \mu \partial_t E_x = 0 \quad (3.70)$$

となる。ここで、振動する電磁場を複素数で次のように表して、

$$\tilde{E}_x(z, t) = \tilde{E}(z) e^{i\omega t} \quad (3.71)$$

微分方程式を解くことにする。元の微分方程式は、

$$\partial_z^2 \tilde{E}(z) + (\varepsilon \mu \omega^2 - i \sigma \mu \omega) \tilde{E}(z) = 0 \quad (3.72)$$

となる。

もしも $\sigma = 0$ ならば、

$$\tilde{E}(z) = E_0 e^{-ikz} \quad (3.73)$$

が解になる。ただし、 $k = \pm \omega/v$ 、 $v = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ である。これを用いると、

$$E_x(z, t) = E_0 \cos k(z \mp vt) \quad (3.74)$$

となり、空間的に進む波を表していることがわかる。

導体中なので、 $\sigma \neq 0$ であるので、複素数の \tilde{k} を許して $\tilde{E}(z) = E_0 e^{-i\tilde{k}z}$ とおいて解を求めると、

$$[-\tilde{k}^2 + (\varepsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega)]E_0 = 0 \quad (3.75)$$

となる。 $E_0 \neq 0$ でないと意味がないので、係数がゼロでないといけない。従って、

$$\tilde{k}^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega \quad (3.76)$$

右辺の第 1 項と第 2 項の大きさを比較しよう。 $\sigma \sim 10^7$ [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$] で、 $\varepsilon \sim 10^{-11}$ [F m^{-1}] であるから、

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \sim 10^{18} \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad (3.77)$$

である。このようにして、可視光 ($\omega \sim 10^{14}$) を考えたとしても第 1 項は第 2 項と比較して無視できることがわかった。従って、

$$\tilde{k}^2 \approx -i\sigma\mu\omega \quad (3.78)$$

あるいは、

$$\tilde{k} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega} \quad (3.79)$$

が得られる。結局、

$$E_x(z, t) = E_0 \cos\left(\frac{z}{\ell} - \omega t\right) e^{-z/\ell} \quad (3.80)$$

ただし、

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (3.81)$$

となる。この式は、導体中で進まず減衰する「波」を表している。

マイクロ波 ($\omega \sim 10^{10}$) の場合、 $\ell \sim \sqrt{\frac{2}{10^{-6}10^710^{10}}} \sim 10^{-6}$ [m] になる。マイクロ波の波長は cm 程度あるから、電磁波は導体中には全くと言って良いほど侵入できないことがわかる。

問題 3.5.4

問題 3.5.3 で取り扱った物質を考える。

1. それぞれの色における屈折率を求めよ。また、それぞれの光の物質中の光速を求めよ。

赤い光と青い光の速度差は、 7.8×10^6 [m/s] である。

2. まず、青い光のパルスを 1 ns、そして続いて赤い光のパルスを 1 ns の時間だけ、厚さ 2 m のこの物質に入射した。色と強度を無視して出てくる光のおおよその継続時間を求めよ。
3. まず、赤い光のパルスを 1 ns、そして続いて青い光のパルスを 1 ns の時間だけ、厚さ 2 m のこの物質に入射した。色と強度を無視して出てくる光のおおよその継続時間を求めよ。

ここで考えた原理を応用して、極超短パルス光が作られている。

===== 解答 =====

1. 屈折率は、 $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ だから、赤い光の屈折率は 2.17、青い光の屈折率は 2.30 になる。一方光速は、真空の光速を屈折率で割れば良いから、それぞれ、 1.381×10^8 [m/s]、 1.303×10^8 [m/s] になる。

赤い光と青い光の速度差は、 7.8×10^6 [m/s] である。

2. 赤い光と青い光がこの物質を通過するために必要な時間はそれぞれ、 $2/1.382 \times 10^8 = 14.48 \times 10^{-9}$ [s]、 $2/1.303 \times 10^8 = 15.35 \times 10^{-9}$ [s] である。

青い光を入射した時刻を $t = 0$ として、赤い光と青い光が出てくる時刻はそれぞれ $1+14.48 \sim 1+14.48+1$ [ns]、 $15.35 \sim 15.35+1$ [ns] になる。結局光が出ている時間は、 $15.35 \sim 16.48$ [ns] となり、その継続時間は約 1.1 [ns] になる。

3. 赤い光を入射した時刻を $t = 0$ として、赤い光と青い光が出てくる時刻はそれぞれ $14.48 \sim 14.48 + 1[\text{ns}]$ 、 $1 + 15.35 \sim 1 + 15.35 + 1[\text{ns}]$ になる。結局光が出始めてから出終るまでの時間は、 $14.48 \sim 17.35[\text{ns}]$ となり、その間の時間は約 $2.9[\text{ns}]$ になる。

ここで考えた原理を応用して、極超短パルス光が作られている。

問題 3.5.5

電気伝導度の小さな物質があり、 $\omega \gg \sigma/\varepsilon$ が成り立つとする。導体内の電磁波の様子を調べよ。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}\tilde{k}^2 &= \varepsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega \\ &= \mu\varepsilon\omega^2\left(1 - i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\end{aligned}$$

と変形できるから、この問題では、

$$\tilde{k} \approx \sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - i\frac{\sigma}{2\varepsilon\omega}\right)\omega$$

と近似できる。したがって、この物質中の電磁波は振動しながら進むことができる。ただし、波数 k に小さいながらも虚数部分があるので、進みながら減衰する。

問題 3.5.6

導体内の電子は原子に束縛されていない。従って、その運動方程式としては、

$$m\partial_t \vec{v} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = -e\vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

が考えられる。これを解いて、 $\vec{i}(t) = -en\vec{v}(t)$ より、電流密度を求めよ。

===== 解答 =====

$d/dt \rightarrow i\omega$ の置き換えを行うことによって、

$$\tilde{\vec{v}} = \frac{-e}{m(1/\tau + i\omega)} \tilde{\vec{E}}$$

と解くことができる。電流 $\tilde{\vec{i}}$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{i}} &= -ne\tilde{\vec{v}} \\ &= \frac{ne^2}{m(1/\tau + i\omega)} \tilde{\vec{E}} \\ &= \frac{ne^2(1/\tau - i\omega)}{m(1/\tau^2 + \omega^2)} \tilde{\vec{E}} \\ &= \frac{ne^2(1/\tau - i\omega)}{m(1/\tau^2 + \omega^2)} \vec{E}_0(\cos \omega t + i \sin \omega t) \end{aligned}$$

となる。求めるべき電流密度はこの式の実数部分であるから、

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{\vec{i}}) &= \Re\left(\frac{ne^2(1/\tau - i\omega)}{m(1/\tau^2 + \omega^2)} \vec{E}_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)\right) \\ &= \frac{ne^2\tau \vec{E}_0}{m(1 + \omega^2\tau^2)} \Re((1 - i\omega\tau)(\cos \omega t + i \sin \omega t)) \\ &= \frac{ne^2\tau}{m(1 + \omega^2\tau^2)} (\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t) \vec{E}_0 \\ &= \frac{ne^2\tau}{m} \left(\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \cos \omega t + \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \sin \omega t\right) \vec{E}_0 \end{aligned}$$

となる。

参考文献

- [1] 長岡洋介 「電磁気学 I,II」 岩波書店.
- [2] <http://homepage2.nifty.com/eman/electromag/contents.html>
- [3] EH 対応、EB 対応はそれぞれに意味がある。そのために、EB 対応、EH 対応を明確にせずに、多くの教科書が構成されているので注意する必要がある。また、最近では歴史的な経緯を無視して、 \vec{B} を磁場と呼ぶ教科書もある。混乱しないように注意すること。EH 対応、EB 対応の整理については <http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/32denjk/010elc.html> や広島大学の山崎による monograph 「電磁気学における単位系」 <http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/metadb/up/81936204/Refunit43W.pdf> を参照のこと。
- [4] 数学の詳細については以下の参考書を推奨する。G. Arfken, *Mathematical Method for Physicist*, ACADEMIC PRESS. New York.