

第 2 章

電磁気学 I

ここでは時間的に変動しない静的な電場と磁場を扱う。今後は既に復習した物理数学を活用して講義を進めるので、物理数学の復習を行っておくこと。

後期の電磁気学 II では時間的に変動する電磁場と物質中の電磁場を取り扱う。

2.1 電荷に働く力

電荷を担うものは、電子（負電荷）や陽子（正電荷）と呼ばれる素粒子である。素粒子には、中性子という電荷を持たない粒子もある。素粒子には様々な種類のものがあるが、寿命が長くて物質を構成していると言える「素粒子」は上記の 3 種類である。

電子と陽子は符号が逆で大きさが全く等しい電荷を帯びている。その大きさ e を電気素量といい、

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{A} \cdot \text{s} \quad (2.1)$$

である。アインシュタインによって、質量が変化することが分かった。しかしながら、電荷の総量が保存されない例は存在しない。従って、電荷は素粒

子の持つ最も基本的な性質の一つと考えることができる。

電気現象と磁気現象は最初全く別の現象と考えられていたが、両者が結びついた現象が知られるようになり、現在では電磁気現象として理解されるようになっている。エレクトロニクスの講義ノートを参照のこと。

本講義では SI 単位系を用いる。参考書の単位系 (MKSA 単位系) とは異なっている部分もあるので注意すること。

2.1.1 クーロンの法則

位置 \vec{r}' にある点電荷 q' は位置 \vec{r} にある点電荷 q に力 \vec{F}

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.2)$$

を及ぼす。ただし $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0}$ は「真空の誘電率」である。 $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

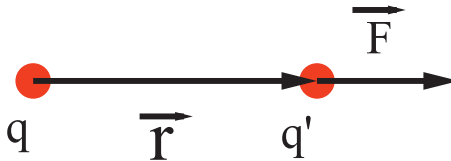


図 2.1 $\vec{r} = \vec{0}$ の場合を図示している。

は光の早さで、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A² は真空の透磁率である。

式を簡単にするために、 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ とおき、

$$\vec{F} = k \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.3)$$

を用いる場合も多い。

問題 2.1.1

水素原子の中の陽子と電子の間のクーロン力と万有引力の大きさの比を計算せよ。陽子と電子の質量は、それぞれ 1.7×10^{-27} kg, 9.1×10^{-31} kg で

ある。

===== 解答 =====

陽子・電子間の距離を R とすると、クーロン力は $F_C = e^2/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ に対して、万有引力は $F_G = GMm/R^2$ である。その比は $F_G/F_C = GMm/(e^2/(4\pi\epsilon_0)) = 4.5 \times 10^{-40}$ となる。

問題 2.1.2

質量 m の 2 個の小球にそれぞれ長さ l の糸を付けて同一点からつり下げた。小球に同量の電荷 q を与えたところ、糸は角度 2θ だけひらいて釣り合った。 q の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

小球間の距離は $2l \sin \theta$ である。小球間に働くクーロン力の大きさは $F_C = q^2/(4\pi\epsilon_0(2l \sin \theta)^2)$ である。重力と張力とクーロン力が釣り合っているので、 $F_C/(mg) = \tan(\theta)$ であるから $q = 4l\sqrt{\pi\epsilon_0 mg \sin^3 \theta / \cos \theta}$ となる。

問題 2.1.3

1 辺の長さ l の正三角形の角頂点に電荷 q を固定し、正三角形の重心にも電荷 q を置いた。重心の電荷に働く力を求めよ。図を描いて考えよ。

===== 解答 =====

対称性より重心の電荷に働くクーロン力の合力は 0 になる。

2.2 電場の性質

クーロンの法則は遠隔力の考えに基づいている。遠隔力とは二つの物体が接触せずに力を及ぼすことができるような力のことである。力学では必ず力が作用する場合には、物体の接触があった。その意味で遠隔力は「不思議」な力である。

これに対してファラデーは直感的に以下のように考えた。何らかの原因

(例えば点電荷 A が存在すること)によって、空間の状態が変化する。その変化した空間に点電荷 B (プローブ電荷) 置くとその電荷には力が作用する。すなわち、電荷 B はこの空間の変化を感知する。このように変化した空間 = 「電場」と言う。このような考え方を「近接作用」の考え方と言う。

電場を定量的に表すために仮想的なプローブ電荷 q を用いる。そのプローブ電荷をある位置 \vec{r} においた時、力 \vec{F} を受けるとその位置における「電場の強さ」(あるいは、単に電場) を $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$ と表す。

静的な現象を扱う限りは遠隔作用的な考え方でも、近接作用的な考え方でも、同様に現象を扱うことができる。しかしながら、動的な現象では原因の変化に対して、結果には遅れが生じる。例えば、ある点電荷が動くと別の点電荷に及ぼされる力が変化するような場合である。そのような遅れを考えるためには、力が空間を伝わるという近接作用的な考え方の方が自然である。

2.2.1 電荷のつくる電場

クーロンの法則より、位置 \vec{r}' にある点電荷 q が位置 \vec{r} につくる電場は以下の式で表される。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} q \quad (2.4)$$

点電荷が多数ある場合は、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i \quad (2.5)$$

である。さらに一般化して、電荷が分布している場合には、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV' \quad (2.6)$$

となる。

問題 2.2.1

間隔 d だけ離しておいた二つの電荷 $q, -q$ (それぞれの座標は $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ とする。) を考える。

1. 位置 $\vec{r} = (x, y, z)$ に作られる電場を表す式を作れ。
2. d に比べて十分遠い領域での電場の近似式を求めよ。

===== 解答 =====

求める電場は、

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q(\vec{r} - (0, 0, d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, d/2)|^3} + \frac{-q(\vec{r} - (0, 0, -d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, -d/2)|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x, y, z - d/2)}{(x^2 + y^2 + (z - d/2)^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x, y, z + d/2)}{(x^2 + y^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \right)\end{aligned}$$

以下では $r \gg d$ として近似式を作る。

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{(x, y, z - d/2)}{(1 - \frac{dz}{r^2})^{3/2}} - \frac{(x, y, z + d/2)}{(1 + \frac{dz}{r^2})^{3/2}} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((x, y, z - d/2) \left(1 + \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x, y, z + d/2) \left(1 - \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((0, 0, -d) + \frac{3dz(x, y, z)}{r^2} \right) \\ &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((0, 0, -1) + \frac{3z(x, y, z)}{r^2} \right) \\ &= \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3xz, 3yz, 3z^2 - r^2)\end{aligned}$$

問題 2.2.2

無限に長い直線上に単位長さ当たり λ の電荷が分布している。この電荷が x 軸上に作る電場を計算せよ。

===== 解答 =====

幾何学的な対称性より、 z 軸方向の電場は存在しない。また、系は軸対称なので、接線方向の電場も存在しない。従って、動径方向の電場のみを考えれば良い。 z 軸に沿って電荷が分布していると考えて計算を行う。

z 軸上 $(0, 0, z)$ に存在する電荷が $(x, 0, 0)$ に作る電場の大きさは

$$dE(z) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + z^2}$$

この位置における動径方向は x 軸方向である。その方向の成分は

$$dE_{\perp}(z) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

求めるべき電場の大きさは

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \end{aligned}$$

ただし、 $z = x \tan \theta$ を用いて、変数変換を行っている。

問題 2.2.3

2 個の点電荷 $2q, -q$ が $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ に置かれている。これらの電荷が十分遠方に作る電場の近似式を求めよ。 d の 1 次まで求めれば良い。

===== 解答 =====

問題 2.2.1 の解答を参考に、電場を表す式を作ると、

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q(\vec{r} - (0, 0, d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, d/2)|^3} + \frac{-q(\vec{r} - (0, 0, -d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, -d/2)|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2(x, y, z - d/2)}{(x^2 + y^2 + (z - d/2)^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x, y, z + d/2)}{(x^2 + y^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

以下では $r \gg d$ として近似式を作る。

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{2(x, y, z - d/2)}{(1 - \frac{dz}{r^2})^{3/2}} - \frac{(x, y, z + d/2)}{(1 + \frac{dz}{r^2})^{3/2}} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2(x, y, z - d/2) \left(1 + \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x, y, z + d/2) \left(1 - \frac{3dz/2}{r^2} \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((x, y, z - 3d/2) + \frac{9}{2}(x, y, z - d/6) \frac{dz}{r^2} \right) \end{aligned}$$

d については 1 次まで取ることにする。

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left((x, y, z - 3d/2) + \frac{9}{2}(x, y, z) \frac{dz}{r^2} \right)$$

問題 2.2.4

以下の場合の電場を求めよ。

1. 半径 R の円周上に電荷が一様に電荷密度 λ で分布している場合に、円周の中心を通過して円周が作る面に垂直な直線上の電場。
2. 半径 R の円板上に電荷が一様に電荷密度 σ で分布している場合に、円板の中心を通過して円板が作る面に垂直な直線上の電場。

3. 無限に広い平面上に電荷が一様に電荷密度 σ で分布している場合に、空間の任意の点での電場。

===== 解答 =====

円周は xy 面内にあるとし、考えている直線を z 軸とする。

1. 円周上の $R(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ における微小線要素 $ds = R d\theta$ が作る電場は、

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(0, 0, z) - R(\cos \theta, \sin \theta, 0)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \lambda R d\theta \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R\lambda(0, 0, z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

2. 円盤を半径 r で幅 dr の細い輪に分割すると、それぞれの輪に対しては上の解を用いることができる。このとき、電荷の線密度は σdr となる。

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \int_0^R \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{r(0, 0, z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \sigma dr \\ &= \frac{(0, 0, z)\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{(0, 0, z)\sigma}{2\epsilon_0} \left[-(z^2 + r^2)^{-1/2} \right]_0^R \\ &= \frac{(0, 0, z)\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)\end{aligned}$$

3. $R \rightarrow \infty$ にすれば良いので、

$$\vec{E}(z) = \frac{(0, 0, 1)\sigma}{2\epsilon_0}$$

となる。

2.2.2 電気力線

各点における接線がその点における電場 \vec{E} の方向と一致するような曲線、すなわち「電気力線」、によって電場を視覚化することができる。電場の強さは単位面積を貫く電気力線の本数によって表す。

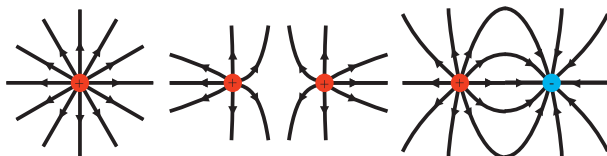


図 2.2

問題 2.2.5

- 1 A·s の電荷から出ている電気力線の本数を ε_0 を使って表せ。
- 1 A·s の電荷から出ている電気力線の本数を ε_0 を使って表せ。

===== 解答 =====

この点電荷 q から r だけ離れた点における電場の強さ $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ である。一方、半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ である。定義より電気力線の密度は電場の強さに等しいはずなので、 q から出る電気力線の本数を Nq とすれば、

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Nq}{4\pi r^2}$$

従って、 $N = 1/\varepsilon_0$ となる。符号が負の場合はマイナスをつければ良い。

問題 2.2.6

以下の場合の電気力線の様子を図示せよ。

- 無限に長い直線上に一様に電荷が分布している場合。

2. 無限に広い平面上に一様に電荷が分布している場合。

===== 解答 =====

2.2.3 ガウスの法則

ガウスの法則を理解するために、立体角 $d\Omega$ を定義しておこう。ある面 dS を原点から見た時の立体角 $d\Omega$ は

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.7)$$

である。ただし、 $d\vec{S}$ は大きさが dS で方向はこの面に垂直で外向きのベクトルである。例えば、原点を中心とする半径 r_0 の球の原点から見込んだ立体角は球の表面積が $4\pi r_0^2$ だからそれを r_0^2 で割って 4π になる。

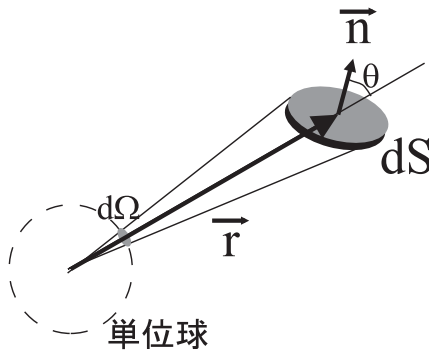


図 2.3

原点に電荷 q があり、その周りを閉曲面 S が囲んでいる。その閉曲面上で $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ を積分すると、

$$\begin{aligned}\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_S \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_S d\Omega}_{4\pi} \\ &= q/\epsilon_0\end{aligned}\quad (2.8)$$

また、閉曲面 S が電荷 q を取り囲んでいない場合には $\int_S d\Omega = 0$ になるので $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ になる。以上まとめると、

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} q : (q \text{ が } S \text{ の中にある時}) \\ 0 : (q \text{ が } S \text{ の外にある時}) \end{cases}\quad (2.9)$$

一般の電荷分布の場合には、

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{r}) dV\quad (2.10)$$

となる。ただし、 V は閉曲面 S で囲まれた体積である。

問題 2.2.7

半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ (正) で電荷が分布している場合の電場を求めよ。ガウスの法則を用いても良い。

===== 解答 =====

対称性より同心球面 S 上ではすべての電場の大きさは一定で、その方向は球面に垂直で外向きである。その大きさはその球面の半径だけの関数であるから、 $E(r)$ とする。この球面上でガウスの法則を適用すると、

$$\epsilon_0 \int_S E(r) dS = \epsilon_0 E(r) \int_S dS = \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2$$

一方、この球面 S 内にある電荷の総和 $q(r)$ は、以下の式で表されるので、

$$q(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho & r < a \\ \frac{4\pi}{3} a^3 \rho & r > a \end{cases}$$

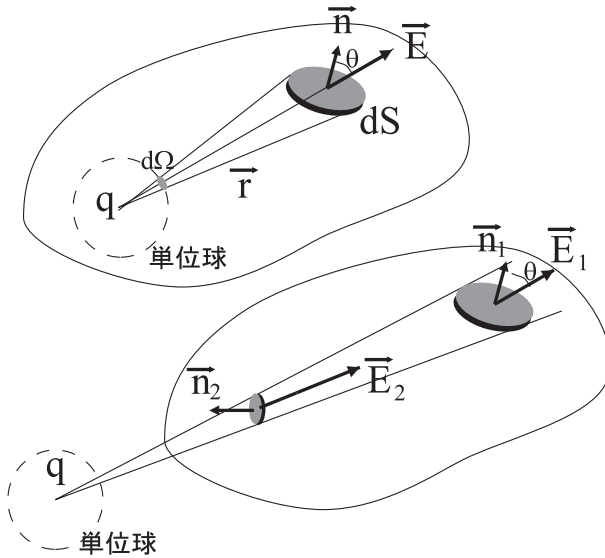


図 2.4

となる。ガウスの法則とあわせて、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & r < a \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases}$$

が得られる。

問題 2.2.8

無限に長い直線上に線電荷密度 λ の電荷が分布している。ガウスの法則を用いて電場を求めよ。

===== 解答 =====

直線の長さ l の部分に存在する電荷は λl である。電場は軸対称になるはずなので、電場は放射状になっているはずである。従って、直線から距離 r

の場所の電場の大きさを求めることができれば、解けたと考えることが出来る。この直線を軸とした半径 r の円筒を考えて、ガウスの法則を適用すると、

$$2\pi r l E(r) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

となるので、 $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ となる。

問題 2.2.9

無限に広い厚さの無視できる平板上に面電荷密度 σ で電荷が分布している。任意の点における電場を求めよ。

===== 解答 =====

電荷の分布の様子から電場は面に対して垂直であることは明らかである。問題 2.2.4 を参照のこと。面を挟んで、面から上下に $\pm z$ だけ離れたところに、1 辺 L の面を考える。側面は面に垂直とする。これらの面に対してガウスの法則を適用すると、

$$\sigma L^2 / \varepsilon_0 = 2E(z)L^2$$

となり、 $E(z) = \sigma / (2\varepsilon_0)$ であることがわかる。

問題 2.2.10

半径 R_1, R_2 の無限に長い二つの円筒に電荷が、それぞれ面電荷密度 σ_1, σ_2 で一様に分布している。二つの円筒の軸が一致している場合に、生じる電場を求めよ。

===== 解答 =====

対称性から電場は円筒の軸から放射状に生じ、その大きさは軸からの距離のみに依存する。閉曲面として、円筒と軸が同じで半径 r ながさ l の円筒を考える。円筒の上下の面に垂直な磁場は存在しないので、側面のみに注目し

てガウスの法則を適用すれば良い。

$$2\pi r l \varepsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ 2\pi R_1 l \sigma_1 & R_1 < r < R_2 \\ 2\pi(R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2) l & R_2 < r \end{cases}$$

従って、電場は

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2}{\varepsilon_0 r} & R_2 < r \end{cases}$$

となる。

問題 2.2.11

半径 R の無限に長い円筒の内部に電荷が、電荷密度 ρ で一様に分布している。円筒の内外に、生じる電場を求めよ。

===== 解答 =====

閉曲面は上と同様にとる。

$$2\pi r l \varepsilon_0 E(r) = \begin{cases} \pi r^2 \rho l & r < R \\ \pi R^2 \rho l & r > R \end{cases}$$

従って、電場は

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & r < R \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} & r > R \end{cases}$$

となる。

2.2.4 電位

保存力

質点が位置 \vec{r} に依存した力 $\vec{F}(\vec{r})$ の下で、ある基準点 A から P 点までゆっくりと（加速度を生じないように）移動する場合を考える。このような移動の際、外部からその力 $\vec{F}(\vec{r})$ と大きさがほとんど等しく、逆向きの力を加え

ないといけない。従って、点 P まで移動する際に外から与えなければならない仕事 W は

$$W(P) = \int_A^P (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \quad (2.11)$$

である。もしも、 $W(P)$ が途中の経路によらず、位置 P のみの関数である場合に、 $\vec{F}(\vec{r})$ は保存力であるという。

この保存力の下で、二つの経路 C_1, C_2 を通って基準点 A から点 P に達する場合を考えよう。保存力の定義より、

$$\int_{C_1} (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} \quad (2.12)$$

となる。書きかえると、

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.13)$$

C_1 と $-C_2$ の経路は基準点 A から点 P を通って基準点 A に戻る経路であり、閉曲線になる。その閉曲線を C であらわすと、

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.14)$$

となる。

保存力の場合、位置 \vec{r} の関数 $\phi(\vec{r})$ を定義して、

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad (2.15)$$

とすることができる。これは

$$(\phi(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \phi(\vec{r})) = -\vec{F} \cdot \delta\vec{r} \quad (2.16)$$

から導かれる。

電位

点電荷 q が q' に及ぼすクーロン力は

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.17)$$

である。ここで関数

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.18)$$

を導入すると、

$$\vec{F}(\vec{r}) = \{-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\}q' \quad (2.19)$$

と表すことができる。すなわち、静電場にはポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を考えることができる。特に一般のポテンシャルと区別するときには「静電ポテンシャル」または「電位」と呼ぶ。電荷が分布している場合には、それぞれの電荷が作る電位を加算することによって電位を得ることができる。

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.20)$$

別の表現で表すと、「静電場中を電荷 q を移動させる場合、電場のする仕事は移動の経路によらず始点と終点の電位差に q を掛けたものになる」。無限遠点を基準に電位を決める式は、

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (2.21)$$

となる。

$\phi(\vec{r}) = \text{一定}$ を満たす \vec{r} は一つの曲面を作り、これを「等電位面」と呼ぶ。この等電位面に電気力線は直交する。これは $\phi(\vec{r}) = \text{一定}$ の面上の任意のベクトル $\delta\vec{r}$ に対して

$$\vec{E} \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad (2.22)$$

であることよりわかる。電位の単位は「J/C」で「V」と略記し「ボルト」と呼ぶ。

問題 2.2.12

半径 R の球面上に一様に面密度 σ で電荷が分布している。電位を求めよ。

===== 解答 =====

電場の向きは放射線状外向きで、その大きさは

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

である。これを無限遠点を基準に電位を求めるには電場を線積分すれば良い。

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^r E(r') dr' \\ &= \begin{cases} - \int_{\infty}^r \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' & r > R \\ - \int_{\infty}^R \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' - \int_R^r 0 dr' & r < R \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} & r > R \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{R} & r < R \end{cases} \end{aligned}$$

問題 2.2.13

半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ (正) で電荷が分布している場合の電位を求めよ。

===== 解答 =====

問題 2.2.7 より、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^2} & r > a \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r & r < a \end{cases}$$

である。これを無限遠点を基準に電位を求めるには電場 $E(r)$ を r によって積分すれば良い。

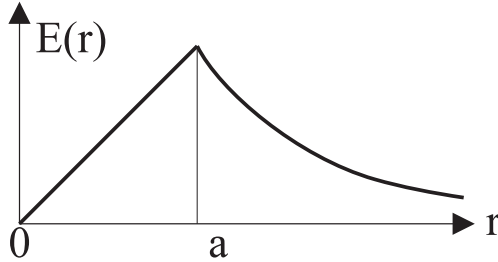


図 2.5

$$\begin{aligned}
 \phi(r) &= - \int_{\infty}^r E(r) dr \\
 &= \begin{cases} \int_r^{\infty} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} dr & r > a \\ \int_a^{\infty} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} dr + \int_r^a \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr & r < a \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r} & r > a \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{3a^2 - r^2}{2} & r < a \end{cases}
 \end{aligned}$$

問題 2.2.14

間隔 d だけ離しておかれた二つの点電荷 $q, -q$ がある。それぞれの電荷の位置は $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ とする。電荷から十分遠い所における電位を求め、その電位から電場を求めよ。

===== 解答 =====

電位は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} \right)$$

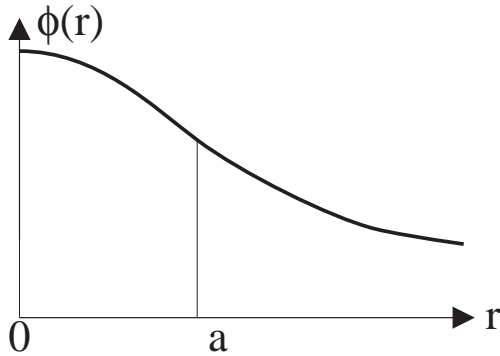


図 2.6

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \\
 \approx & \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 & \left(\left(1 + \frac{zd/2}{x^2 + y^2 + z^2}\right) - \left(1 - \frac{zd/2}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \right) \\
 = & \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}
 \end{aligned}$$

電場は電位を偏微分すればよい。この偏微分の計算は省略。

2.2.5 静電エネルギー

点電荷 q_1, q_2 がそれぞれ位置 \vec{r}_1, \vec{r}_2 に存在する。電荷 q_1 による電荷 q_2 の位置におけるポテンシャルは、

$$\phi_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (2.23)$$

である。従って、二つの電荷が存在することによる（静電）エネルギーは

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (2.24)$$

となる。複数の電荷が存在する場合には以下のように拡張すればよい。

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{(i,j)}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (2.25)$$

ここで、 $\sum_{(i,j)}^n$ は n 個の電荷のすべての組み合わせについて足しあげることの意味する。また、以下のように表すこともできる。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi'_i q_i \quad (2.26)$$

$$\phi'_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j(\neq i)}^n \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.27)$$

ϕ'_i は電荷 q_i 以外の電荷から生じる電位である。ここで $1/2$ は 2 回足しあわせてしまっているので、それを補正するためである。より一般には、

$$U = \frac{1}{2} \int \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad (2.28)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.29)$$

となる。あるいは、

$$U = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \quad (2.30)$$

とあらわすこともできる。

問題 2.2.15

半径 R の球内に電荷密度 ρ_0 で電荷が一様に分布している。このときの静電エネルギーを求めよ。

===== 解答 =====

半径 r 電荷密度 ρ の球に電荷を運んで、半径を dr だけ大きくするために必要な仕事を求めよう。運ぶべき電荷は $4\pi r^2 \rho dr$ である。一方、電位は $\frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$ である。問題 2.2.13 を参照。従って、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} 4\pi r^2 \rho dr \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R^5 \end{aligned}$$

となる。

問題 2.2.16

1 V の電位差がある 2 点間の電子の位置エネルギーの差を 1 eV と呼ぶ。1 eV は何 J に相当するか？また、 10^{-10} m 離れた電子と陽子を無限遠まで引き離すために必要なエネルギーは何 eV か？

===== 解答 =====

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \times 1\text{V} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

電位エネルギーは

$$\begin{aligned} & \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \cdot 10^{-10}} \text{ J} \\ &= \frac{1.602 \times 10^{-19}}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \cdot 10^{-10}} \text{ eV} \\ &= 14.4 \text{ eV} \end{aligned}$$

問題 2.2.17

半径 R の球面上に電荷 Q が一様に分布している。このときの静電エネルギーを求めよ。

===== 解答 =====

球面上の電荷を 0 から増やして、最後には Q にする仮定で必要な仕事を計算して静電エネルギーを求める。

$$\int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

問題 2.2.18

無限に長い直線上に正負の点電荷 $\pm q$ が交互に間隔 a をおいて並んでいる。点電荷 1 個当たりの静電エネルギーを計算せよ。

===== 解答 =====

1 個の電荷とその他の電荷との静電エネルギーは、

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2q^2}{a} + \frac{2q^2}{2a} - \frac{2q^2}{3a} + \dots \right)$$

となる。電荷 1 個あたりの静電エネルギーはこれの半分で、

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \log 2$$

となる。

2.2.6 電気双極子

$\pm q$ の点電荷の対の間隔 $d = |\vec{r}_+ - \vec{r}_-|$ を $p = qd$ を一定に保ちながら、小さくした極限を考える。そのような対象を電気双極子と呼び、ベクトル \vec{p} を用いて表す。

$$\vec{p} = \lim_{d \rightarrow 0} qd \frac{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{d} = p \lim_{d \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{d} \quad (2.31)$$

電気双極子によって、作られる電位は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.32)$$

となる。

密集した多数の点電荷による十分遠方の電位を近似的に求める方法について考えよう。 n 個の点電荷 q_i が位置 \vec{r}_i ($i = 1 \sim n$) に存在する。ただし、 $\sum_i \vec{r}_i = \vec{0}$ となるように原点を決める。位置 \vec{r} における電位は

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_i| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)} \\ &= \sqrt{|\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i + |\vec{r}_i|^2} \end{aligned}$$

であるから、 $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_i|$ の条件を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} &\approx \frac{1}{|\vec{r}|} \left(1 - 2 \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{r}|} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) \end{aligned}$$

と近似できる。電位を求める式に代入すると、

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}|} \left(1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.33) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \quad (2.34)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i \quad (2.35)$$

である。 Q は全電荷、 \vec{P} は電荷のモーメントである。

問題 2.2.19

以下の場合について、電荷から十分遠方における電位を求めよ。

- 3 個の点電荷 $-q, 2q, -q$ が間隔 d で直線上に並んでいる場合。
- 4 個の点電荷 $\pm q$ が 1 辺 d の正方形の角頂点に置かれている場合。隣り合う電荷の符号は異なっているものとする。

===== 解答 =====

- 2 個の電気双極子 $\vec{p} = \mp q(0, 0, d)$ がそれぞれ $(0, 0, d/2), (0, 0, -d/2)$ に置かれている場合を考えれば良い。

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (0, 0, d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, d/2)|^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (0, 0, -d/2))}{|\vec{r} - (0, 0, -d/2)|^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(-\vec{p} \cdot (\vec{r} - (0, 0, d/2)) \left(1 + \frac{3dz/2}{r^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \vec{p} \cdot (\vec{r} + (0, 0, d/2)) \left(1 - \frac{3dz/2}{r^2}\right) \right)\end{aligned}$$

d について 1 次までとると、

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} \cdot (0, 0, d) - \vec{p} \cdot \vec{r} \frac{3dz}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 q r^3} \left(|\vec{p}|^2 - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{r^2} \right)\end{aligned}$$

- 2 個の双極子 $\vec{p} = \pm q(0, d, 0)$ がそれぞれ $(d/2, 0, 0), (-d/2, 0, 0)$ に置かれてると考えれば良い。

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (d/2, 0, 0))}{|\vec{r} - (d/2, 0, 0)|^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - (-d/2, 0, 0))}{|\vec{r} - (-d/2, 0, 0)|^3} \right)\end{aligned}$$

d について 1 次までとると、

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} \cdot (\vec{r} - (d/2, 0, 0)) \left(1 + \frac{3dx/2}{r^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \vec{p} \cdot (\vec{r} + (d/2, 0, 0)) \left(1 - \frac{3dx/2}{r^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(-\vec{p} \cdot (d, 0, 0) + \vec{p} \cdot \vec{r} \frac{3dx}{r^2} \right) \\ &= \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{xy}{r^5}\end{aligned}$$

2.2.7 電束

静電場は目に見えず、直感的に理解することが難しい。そこで、水の流れとの対比を行うことによって、理解の助けとしよう。空間中に水の流れを考えると、空間の各点毎にそこを流れる水が存在する。言い換えると水の流れを規定するためには、各点毎に流速を表すベクトルを決める必要がある。このように、各点毎にベクトルが与えられるような空間をベクトル場と呼ぶ。水の流れの場を $\vec{v}(\vec{r})$ と表すこととしよう。ある閉曲面 S を考えて、そこで流速の面積分

$$\int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

を考えよう。この面積分はこの閉曲面の中に水のわき出し $f(\vec{r})$ の総量に等しいはずである。式で表すと、

$$\int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V f(\vec{r}) dV$$

となる。ここで、 V は閉曲面 S で囲まれる体積である。

真空中の電場 \vec{E} に対して

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \tag{2.36}$$

となるベクトルを定義し、「電束密度」と呼ぶ。ガウスの法則は以下のようになる。

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.37)$$

となる。 $\int_V \rho(\vec{r}) dV$ は面 S に囲まれた体積 V の中に存在する全電荷量になっている。水の流れと比較すると、 $\vec{v} \leftrightarrow \vec{D}$ 、 $f \leftrightarrow \rho$ となっていることがわかるであろう。

静電場の場合、電荷が存在しなければ $\vec{D} = \vec{0}$ である。水の流れ場の場合にはわき出しが存在しなくても、 $\vec{v} \neq \vec{0}$ となる場合がある。それは渦が存在する場合である。渦がある条件は

$$\int_c \vec{v} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

と表すことができる。ここで c はある閉曲線であり、上の式は閉曲線 c に沿っての線積分である。従って、静電場と水の流れ場との対比を完全にするためには、静電場では渦がないという条件

$$\int_c \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.38)$$

が必要となる。

2.3 静電場の微分法則

今までは、静電場の基本法則を積分形で書いていた。すなわち、マクロな視点にたった法則であった。近接作用の観点からは、空間の各点で成立するミクロな視点にたった法則＝法則の微分形で表す必要がある。微分形の基本法則によって、ある影響が伝搬する様子を表すことができる。

2.3.1 ガウスの法則の微分形

ガウスの法則の積分形は

$$\int_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

と表すことができる。これにガウスの定理を適用することによって、

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) dV = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

となる。体積 V は任意だから、積分の中身が等しい必要がある。従って、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (2.39)$$

となる。これがガウスの法則の微分形である。

問題 2.3.1

半径 R の球内に一様に電荷が分布している。その電荷密度は ρ である。この電荷によって作られる電場をもとめ、それがガウスの法則の微分形を満たすことを示せ。

===== 解答 =====

電荷の分布は、

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & |\vec{r}| \leq R \\ 0 & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

である。電場は、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} & |\vec{r}| \leq R \\ \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

なので、球の内外で $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ を計算し、電荷の分布と比較すれば良い。

問題 2.3.2

半径 R の無限に長い円筒の内部に電荷が密度 ρ で一様に分布している。この電荷が作るポテンシャル、電場を求め、その電場がガウスの法則の微分形を満たすことを示せ。

===== 解答 =====

電荷の分布は、

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

である。z 軸方向に長さ L の円筒を考えてガウスの法則を適用すると、電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0}(x, y, 0) & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

なので、球の内外で $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ を計算し、電荷の分布と比較すれば良い。

2.3.2 渦なしの法則の微分形

渦なしの法則の積分形は

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 0$$

と表すことができる。これにストークスの定理を適用することによって、

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

となる。閉曲線 C は任意だから、積分の中身が等しい必要がある。従って、

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.40)$$

となる。これが渦なしの法則の微分形である。

問題 2.3.3

次に挙げるベクトル場の中で静電場と見なせるものはどれか？また、その場合の電位を求めよ。

1. $F_x = 2Axz, F_y = 2Ayz, F_z = A(x^2 + y^2 - 2z^2)$
2. $F_x = A(y^2 + z^2), F_y = A(x^2 + z^2), F_z = A(x^2 + y^2)$
3. $F_x = 2Axy, F_y = A(x^2 - y^2), F_z = 0$

===== 解答 =====

1. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ となるので、静電場とみなすことができる。
電位 $\phi(\vec{r}) = -A((x^2 + y^2)z - (2/3)z^3)$ である。
2. $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq \vec{0}$ なので、静電場と見なすことはできない。
3. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ となるので、静電場とみなすことができる。
電位 $\phi(\vec{r}) = -A(x^2y - y^3/3)$ である。

2.3.3 ポアソン方程式

電位 $\phi(\vec{r})$ の勾配を取ることによって得られる電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) = 0$$

となり、自動的に渦なしの条件を満たしている。従って、電荷分布が与えられている場合の電位（その勾配を計算することによって電場も）は以下の微

分方程式を満たす解として与えられる。

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad (2.41)$$

この方程式をポアソン方程式と言う。特に、真空の場合には

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = 0 \quad (2.42)$$

となり、ラプラス方程式と言う。なお、 $\Delta = \vec{\nabla}^2$ をラプラシアンと言う。

問題 2.3.4

原点に点電荷 q がある場合の電位 $\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|}$ は原点以外でラプラス方程式を満たすことを確認せよ。

===== 解答 =====

省略。

問題 2.3.5

原点に置かれた電気双極子による電位は原点以外でラプラス方程式を満たすことを示せ。

===== 解答 =====

省略。

問題 2.3.6

電位 $\phi(\vec{r}) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r}$ で表される。ここで、 $r = |\vec{r}|$ である。

1. 原点以外の電荷密度を求めよ。
2. 原点における点電荷の大きさを求めよ。
3. 原点以外に分布する全電荷を求めよ。

===== 解答 =====

1. ポアソンの方程式より以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) &= A(-1)r^{-2}\frac{\vec{r}}{r}e^{-\kappa r} + \frac{A}{r}(-\kappa)e^{-\kappa r}\frac{\vec{r}}{r} \\ &= -\frac{A}{r^3}e^{-\kappa r}(1 + \kappa r)\vec{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) &= \left(\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{A}{r^3}\right)\right)e^{-\kappa r}(1 + \kappa r)\vec{r} \\ &\quad + \left(-\frac{A}{r^3}\right)\left(\vec{\nabla} \cdot e^{-\kappa r}\right)(1 + \kappa r)\vec{r} \\ &\quad + \left(-\frac{A}{r^3}e^{-\kappa r}\right)\left(\vec{\nabla} \cdot (1 + \kappa r)\right)\vec{r} \\ &\quad + \left(-\frac{A}{r^3}e^{-\kappa r}(1 + \kappa r)\right)\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) \\ &= \kappa^2 A \frac{e^{-\kappa r}}{r}\end{aligned}$$

$\rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r})$ より、

$$\rho = -\varepsilon_0 \kappa^2 \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

となる。

2. 電場は $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ から、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A}{r^3}e^{-\kappa r}(1 + \kappa r)\vec{r}$$

である。原点を中心とする微少な半径 δ の球を考えてガウスの法則を適用すると、 $4\pi\varepsilon_0\delta^2\frac{Ae^{-\kappa\delta}}{\delta^2} \rightarrow 4\pi\varepsilon_0A$ となる。

3. 原点以外に分布する電荷の総和は、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \rho(r)4\pi r^2 dr &= -4\pi\varepsilon_0 A\kappa^2 \int_0^\infty r e^{-\kappa r} dr \\ &= -4\pi\varepsilon_0 A\end{aligned}$$

となる。原点に存在する電荷と符号が逆で大きさは等しい点に注意。

2.3.4 ポアソン方程式の解の性質

ある電荷分布 $\rho(\vec{r})$ が与えられているとき、ポアソン方程式を満たす解 $\phi(\vec{r})$ が見つかったとしよう。また、ラプラス方程式の解 $\varphi(\vec{r})$ とすると、

$$\Delta(\phi(\vec{r}) + \varphi(\vec{r})) = \Delta\phi(\vec{r}) + \Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

となり、 $\phi(\vec{r}) + \varphi(\vec{r})$ も解であることがわかる。このように解には不定性があり、境界における条件を満たすようにして始めて電位は決まる。

ポアソン方程式から以下の電位の性質が導かれる。

1. 電位は電荷のないところで極大、極小にならない。
極大、極小では2次微分がゼロでない。すなわち、ラプラス方程式と矛盾する。
2. ある領域内に電荷が存在せず、その領域の境界での電位が一定ならば、その領域内では電位は至る所境界における電位と等しい。
領域内で電位の空間変化があれば、領域内で極小または極大が存在することになる。しかしながら、これは領域内に電荷が存在しないという条件に反することになる。

電荷分布と境界条件が与えられたならば、ポアソン方程式の解はただ一つに決まることが以下のようにして分かる。

仮に、2つの解 $\phi_1(\vec{r}), \phi_2(\vec{r})$ が存在すると仮定しよう。当然、領域内で

$$\Delta\phi_1(\vec{r}) = \Delta\phi_2(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

を満たし、境界で

$$\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r}) = \phi_0$$

を満たしている。ここで、 $\varphi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$ を考えると、至る所で $\varphi(\vec{r}) = 0$ とならなければならない。言い換えると、 $\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})$ を意味しており、解は唯一であることが分かる。

ここまで、クーロンの法則によって電荷が作る静電場の満たすべき方程式としてガウスの法則と渦なしの法則を導いた。この2法則とポアソン方程式は等価である。一方、ポアソン方程式を境界条件の下で解くことによって、静電場を完全に決定できることを上で示した。

2.4 導体

導体では、その内部に電場があると電荷が移動し、内部の電場を打ち消すような電荷分布が実現する。そのために、時間的に変化しない場合には導体内部で電場は常にゼロであり、導体の表面は電位一定の面になる。

2.4.1 導体と絶縁体

電気の流れ易さを基準に物質を「絶縁体」(抵抗率が $10^8 \Omega\text{m}$ 以上)、「導体」($10^{-5} \Omega\text{m}$ 以下)、そしてその中間の「半導体」に分けることができる。典型的な導体である銅の電気抵抗は室温で $1.55 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ である。特に金属中には殆ど自由に動くことのできる「伝導電子」が存在し電気を運ぶ。抵抗率については後述。

導体(ここでは、金属を考える)を電場中に置くと伝導電子が動き、片側の表面が正に、他の側が負に帯電する。このような現象を「静電誘導」と言

う。静電誘導の結果、導体内の電場はゼロになる。すなわち、導体表面は等電位面になる。よって、導体のすぐ外側の電場は導体表面に垂直である。

導体表面においてガウスの法則を適用することによって、

$$\varepsilon_0 E \Delta S = \sigma \Delta S \quad (2.43)$$

となる。よって、表面電荷密度 σ と導体のすぐ外側の電場の間の関係

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \quad (2.44)$$

が分る。ただし、 \vec{n} は表面に垂直な単位ベクトルである。

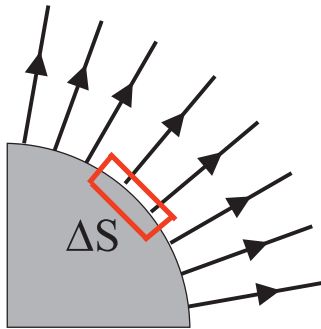


図 2.7

問題 2.4.1

地球の表面では、下向きに $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ の電場が存在する。地球全体では何クーロンの電荷があるか？地球を半径 6400 km の導体球と考える。

===== 解答 =====

表面電荷密度は $\sigma = \varepsilon_0 E$ で与えられるので、地球の表面積倍すれば総電

荷が得られる。

$$\begin{aligned} Q &= -8.85 \times 10^{-12} \cdot 100 \cdot 4\pi(6.4 \times 10^6)^2 \\ &= -4.6 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

問題 2.4.2

導体球殻 A の内部に点電荷 q_1 を置き、外部に点電荷 q_2 を置く。点電荷 q_1 に働く力を求めよ。

===== 解答 =====

球殻の内部では電場は存在しないので、点電荷 q_1 に力は働かない。

問題 2.4.3

導体の平らな表面の深さ d まで電荷が一様な密度 ρ で分布している。

1. 表面からの深さが x の導体内部の電場の強さ $E(x)$ を求めよ。
2. 表面電荷に働く力は単位面積あたり、

$$f = \int_0^d \rho E(x) dx$$

で与えられる。計算せよ。

===== 解答 =====

1. 導体表面に垂直に x 軸を取り、正の向きを導体に入る方向に取る。原点は導体表面に取る。電場は $x < 0$ で $-E = -\rho d/\epsilon_0$ 、 $x > d$ で 0 である。 $0 < x < d$ ではガウスの法則により、 $E(x) = (\rho/\epsilon_0)x + C$ となるはずである。ここで C は導体の内外で電位が連続になるようにするための定数。 $x = 0$ で連続であるために、 $0 < x < d$ で

$$E(x) = \frac{\rho}{\epsilon} (x - d)$$

となる。

2.

$$f = \int_0^d \rho E(x) dx = \frac{\rho^2}{\varepsilon} \int_0^d (x-d) dx = -\frac{\rho^2 d^2}{2\varepsilon}$$

符号は負なので、力は導体外向きに働く。

2.4.2 境界値問題

電荷の分布 $\rho(\vec{r})$ が与えられている場合に電場を求めるにはこの電荷密度に対してポアソン方程式を解けばよい。しかし、導体が存在すると、その表面の電荷密度は表面の電位を一定にするように決定される。言い換えると、与えられた電荷密度と導体の表面で値が一定（境界値が一定）という条件の下でポアソン方程式を解く必要がある。このような問題を境界値問題と言う。

境界値問題には以下のような重ね合わせの原理が成り立つ。真空中に導体 1, 2 が置かれている。無限遠における電位を 0 とし、導体 1 の電位を ϕ_1 、導体 2 の電位を 0 としたときの境界値問題の解を $\phi_1(\vec{r})$ とする。同様に導体 1 の電位を 0、導体 2 の電位を ϕ_2 としたときの境界値問題の解を $\phi_2(\vec{r})$ とする。導体 1, 2 の電位がそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 の場合の境界値問題の解は

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) \quad (2.45)$$

となる。なぜならば、 $\phi(\vec{r})$ は真空中でラプラス方程式を満たす。一方、導体 1 の表面では $\phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r}) = \phi_1 + 0$ なので、 $\phi(\vec{r})$ は境界条件を満たす。導体 2 の表面上でも同様である。境界値問題の解は一つしかないから、これが求める解になる。

問題 2.4.4

平らな導体の表面から d だけ離れた所に置かれた点電荷 q による電場と導体に静電誘導される表面電荷密度を以下の手順に従って求めよ。

1. 点電荷の近傍では電気力線は放射状に、そして導体の表面には電気力

線は垂直に入射することに注意して、全空間での電気力線の様子を描け。

2. 導体表面を鏡面と見立てたときの点電荷 q の像の位置に $-q$ の電荷を置き、この二つの電荷による電気力線の様子を描け。ただし、導体の存在は無視する
3. 2番目の場合の金属の外の電位を求めよ。
4. 点電荷 q を無限遠まで引き離すために必要な仕事を求めよ。

===== 解答 =====

1. 省略。
2. 省略。
3. 電位 $\phi(\vec{r})$ は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - (0, 0, d)|} - \frac{1}{|\vec{r} - (0, 0, -d)|} \right)$$

$\phi(x, y, 0) = 0$ になっており、金属表面が等電位面になっている。
電場は

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x, y, z-d)}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x, y, z+d)}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

特に $z = 0$ では、

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, 0) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{(0, 0, d)}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

となる。従って、表面電荷密度は $\sigma = \epsilon_0 E$ より求まる。

4. $(0, 0, z)$ にある点電荷に働く力は、鏡像との間に働く力より計算でき、

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2z)^2}(0, 0, 1)$$

である。これに抗して電荷を動かさないといけない。従って、必要な仕事は

$$\begin{aligned} W &= \int_d^\infty \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2z)^2} dz \\ &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} \end{aligned}$$

となる。

問題 2.4.5

一様な静電場 \vec{E}_0 の中に帯電していない半径 R の導体球を置いた。静電場はどのようなになるか？

1. 一様な静電場を作る電位は、 $\phi_0(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$ であることを確認せよ。
2. 電気双極子による電位は $\phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ である。一様な電場を作る電位と電気双極子が作る電位が球の表面上で 0 になる条件は何か？
3. 導体球の外側の電位を求めよ。
4. 導体球の表面の電荷密度を求めよ。
5. この表面の電荷分布と同じ電荷分布を絶縁体球上に再現した。この電荷分布によって得られる電場を考察せよ。

===== 解答 =====

1. 省略。
2. 合成した電位は、 $\vec{r} = R\vec{n}$ の位置で、

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot R\vec{n} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot R\vec{n}}{R^3}$$

$$= \left(-\vec{E}_0 + \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \cdot R\vec{n}$$

となる。ただし、 $|\vec{n}| = 1$ とする。従って、 $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ が条件となる。

3.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= - \left(1 - \frac{R^3}{|\vec{r}|^3} \right) \vec{E}_0 \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

となる。

4. $r \geq R$ において、

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -3R^3 r^{-4} \frac{\vec{r}}{r} \vec{E}_0 \cdot \vec{r} - \left(1 - \frac{R^3}{|\vec{r}|^3} \right) \vec{E}_0$$

となる。 $\vec{r} = R\vec{n}$ のとき、

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = -3(\vec{E}_0 \cdot \vec{n})\vec{n}$$

となる。従って、電荷密度はこれを ϵ_0 倍すれば良い。

5. 導体球内部では、この電荷密度による電場と外場によって導体球の内部の電場は 0 になっていた。従って、この電荷密度による電場は外場と反対向き、すなわち $-\vec{E}$ となる。一方、球外部では原点に $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ という電気双極子がある場合の電場になる。

問題 2.4.6

平らな導体の表面から d だけ離れた所に置かれた直線状の電荷がある。その線電荷密度は λ である。電場を求めよ。また、導体表面に生じる電荷密度を求めよ。

===== 解答 =====

直線状の電荷は点電荷が線上に分布していると考え、それぞれの電荷の鏡像は先の問題と同様に考えることができる。また、無限に長い直線状の電荷を考えているので、電場を求めるのは $x = 0$ の位置だけで十分である。

直線状の電荷による電場の大きさ E はガウスの法則より、 $\vec{r} = (0, y, z)$ では

$$2\pi l |\vec{r} - (0, 0, d)| \varepsilon_0 E_1 = \lambda l$$

となる。向きも考慮すると、

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - (0, 0, d)}{|\vec{r} - (0, 0, d)|^2} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(0, y, z - d)}{y^2 + (z - d)^2} \end{aligned}$$

となる。同様に鏡像による電場 \vec{E}_m は

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(\vec{r}) &= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - (0, 0, -d)}{|\vec{r} - (0, 0, -d)|^2} \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(0, y, z + d)}{y^2 + (z + d)^2} \end{aligned}$$

となる。従って、電場は、

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_m(\vec{r}) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{(0, y, z - d)}{y^2 + (z - d)^2} - \frac{(0, y, z + d)}{y^2 + (z + d)^2} \right) \end{aligned}$$

特に、 $z = 0$ では

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{(0, 0, d)}{y^2 + d^2}$$

となる。従って、表面電荷密度は $-\frac{\lambda}{\pi} \frac{d}{y^2 + d^2}$ となる。

2.4.3 静電容量

ある導体に電荷 q を帯電させた時、その導体表面の電位が無限遠点を基準に ϕ になったとする。この時、この導体の静電容量 C は

$$Q = C\phi \quad (2.46)$$

で与えられる。その単位には C/V を用い、F と略記してファラッドと呼ぶ。静電容量は導体を帯電させるのに必要なエネルギーが小さいほど大きくなる。また、その時のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}q\phi = \frac{1}{2}C\phi^2 = \frac{1}{2C}q^2 \quad (2.47)$$

となる。

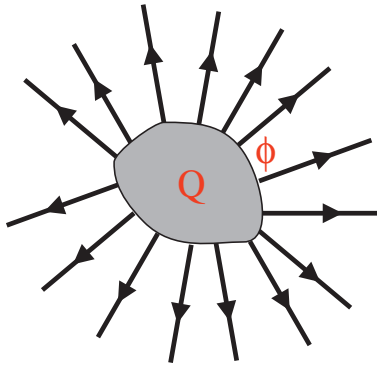


図 2.8

導体が多数ある場合には、お互いに影響を及ぼしあう。導体 1 の電位を ϕ_1 、導体 2 の電位を 0 とした場合に、それぞれの導体の持つ電荷を q_1, q_2 とすれば、

$$q_1 = C_{11}\phi_1, \quad q_2 = C_{21}\phi_1 \quad (2.48)$$

となる。導体 1 の電位を 0、導体 2 の電位を ϕ_2 とした場合に、それぞれの導体の持つ電荷を q_1, q_2 とすれば、

$$q_1 = C_{12}\phi_2, \quad q_2 = C_{22}\phi_2 \quad (2.49)$$

となる。導体 1, 2 の電位がそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 の場合には重ね合わせになるので、

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

となる。

C_{ij} は導体の形状や位置関係で決まるが、必ず

$$C_{12} = C_{21} \quad (2.51)$$

となる。この関係を容量係数の相反定理と呼ぶ。

問題 2.4.7

半径 a の導体球の静電容量を求めよ。問題 2.2.12 と静電容量の定義から考えれば良い。

===== 解答 =====

問題 2.2.12 より、半径 a の球に電荷 Q が帯電している場合の電位は無有限遠点を基準にして、

$$Q = 4\pi\epsilon_0 a\phi$$

ここで $Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ を用いた。よって、静電容量は $4\pi\epsilon_0 a$ である。

問題 2.4.8

導体が 2 個ある場合について、相反定理を以下の手順で証明せよ。

1. 電荷 q_1, q_2 が与えられた時の ϕ_1, ϕ_2 を求めよ。

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

を解けば良い。

2. $U = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2)$ より系全体のエネルギーを求めよ。
3. 導体 1 の電荷を微量 δq_1 だけ変化させた時のエネルギーの変化 δU を求めよ。ただし、 $\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1$ を用いる。
4. δq を微小と考えれば、その電荷変化による電位変化は δq^2 の程度となり、無視できる。従って、 $\delta U = \phi_1\delta q_1$ として、良いはずである。上と比較することによって、相反定理が成り立つことを示せ。

===== 解答 =====

1.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. 上で求めた ϕ_1, ϕ_2 を代入すれば、

$$U = \frac{C_{22}q_1^2 - (C_{12} + C_{21})q_1q_2 + C_{11}q_2^2}{2(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})}$$

3.

$$\delta U = \frac{C_{22}q_1 - \frac{C_{12} + C_{21}}{2}q_2}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}\delta q$$

4.

$$\delta U = \frac{C_{22}q_1 - C_{12}q_2}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}\delta q_1$$

は先に計算した δU と等しい。従って、 $C_{12} = C_{21}$ でなければならない。

問題 2.4.9

半径 R の 2 個の導体球を十分な距離 r 離して置く。

1. 最初、一方の導体球に電荷 Q を与えた時の全体のエネルギーを求めよ。
2. 次に導体球を導線で接続した。この時の全体のエネルギーを求めよ。
3. 上の二つの場合のエネルギー差の原因は何か？

===== 解答 =====

1. 十分離れているので、一方に電荷を与えても他方への影響は無視できる。従って、1 個の導体球に電荷を与えた場合の静電エネルギーになる。これは、 $U = (1/2C)Q^2 = Q^2/(8\pi\epsilon_0 R)$ である。
2. 電荷は当分配されるので、電荷は半分になる。しかしコンデンサーが 2 個あることになり、 $U = 2(1/2C)(Q/2)^2 = Q^2/(16\pi\epsilon_0 R)$ となる。
3. 電荷が導線を移動する間に発生するジュール熱がエネルギー差に相当する。

問題 2.4.10

半径 R_1 の導体球を内径 R_2 で外径 R_3 の球殻の中に中心が一致するように入れた。電気容量係数（行列）を求めよ。

===== 解答 =====

導体球と導体球殻にそれぞれ電荷を q_1, q_2 を与えた。このとき、電場は大きさ

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_3 < r \end{cases}$$

で、外向きに（電荷は正として）放射線状に向いている。従って、無限遠点

を基準にして、 R_1, R_3 における電位 ϕ_1, ϕ_2 を求めると、

$$\phi_2 = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

q_1, q_2 について解くと、

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} & -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} & R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

問題 2.4.11

平行平板コンデンサーの静電容量を求めよ。ただし、極板の面積を S 、間隔を d とする。端を除けば、極板には一様な電荷 σ が誘起されており、電場は極板に垂直であると考えても良いことを用いる。

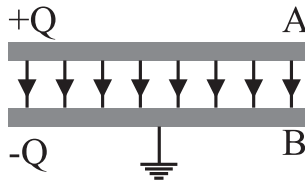


図 2.9

===== 解答 =====

ガウスの法則より、コンデンサー内部の電場の大きさは $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ になる。一方、電極間の電位差 $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \int_A^B E dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q$$

である。ただし、 $Q = \sigma S$ を用いた。よって、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

である。

問題 2.4.12

半径 R_1 の球を中心をあわせて、内径 R_2 の球殻に配置した。これらをコンデンサーと見なした場合の容量を求めよ。

===== 解答 =====

問題 2.4.10 で $q_1 = -q_2 = q$ を与えた場合を考えれば良い。

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

となるので、容量は

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

となる。

問題 2.4.13

面積 A の 3 枚の導体板 a, b, c を順に間隔 d_1, d_2 をおいて平行に並べた。導体板 a と c は接地し、導体 b に電荷 Q を与えた。導体間の電場を求めよ。

===== 解答 =====

a と c は接続されているので、電位は等しい。従って、ab 間と cb 間の電位差は等しく、電場の強さはそれぞれ $E_{ab}d_1 = E_{cb}d_2$ となる。b の a 側の面の面電荷密度と b の c 側の面の面電荷密度はそれぞれ、 $\sigma_{ab} = \varepsilon_0 E_{ab}$, $\sigma_{cb} = \varepsilon_0 E_{cb}$ である。また、b に与えられた全電荷は $Q = (\sigma_{ab} + \sigma_{cb})A$ であるので、

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \frac{Q}{A} \frac{d_2}{d_1 + d_2}, \sigma_{cb} = \frac{Q}{A} \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \\ E_{ab} &= \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \frac{d_2}{d_1 + d_2}, E_{cb} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \frac{d_1}{d_1 + d_2} \end{aligned}$$

となる。

2.4.4 静電場のエネルギー

キャパシターに電荷を蓄える場合に必要な仕事を考察する。キャパシターの電位が ϕ の時には電荷 $q = C\phi$ が蓄えられている。ここに微少電荷 Δq を無限遠点から運んで、電荷を $q + \Delta q$ にするために必要な仕事は $\phi\Delta q$ である。よって、電荷 0 から q まで蓄えるのに必要な仕事 W は

$$U = \int_0^q \phi dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (2.52)$$

となる。平行平板コンデンサーを考えれば、

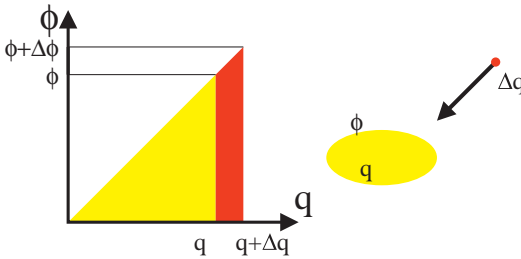


図 2.10

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{q}{\varepsilon_0 A} \right)^2 Ad = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 Ad \quad (2.53)$$

となる。ここで、 A, d はそれぞれ極板面積、極板間隔であり、 Ad は極板間の体積である。

この仕事は電場のエネルギーとして極板間の空間に蓄えられていると考えることもできる。この電場のエネルギーの密度 u_0 は

$$u_0 = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2\varepsilon_0} D^2 \quad (2.54)$$

である。

問題 2.4.14

電荷 q を持つ半径 R の導体球の周囲の空間の静電場のエネルギーを求めよ。

===== 解答 =====

導体球の外の電場は $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ である。電場のエネルギー密度は $u(\vec{r}) = (1/2)\epsilon_0|\vec{E}(\vec{r})|^2$ であるから、それを積分すると、

$$\begin{aligned} U &= \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

となる。これは、導体球をコンデンサーと考えた場合に得られる静電エネルギーと同じである。

問題 2.4.15

同心球のコンデンサーが蓄えるエネルギーを静電場のエネルギーを積分することによって求めよ。

===== 解答 =====

問題 2.4.14 の積分範囲 $R \rightarrow \infty$ を $R_1 \rightarrow R_2$ にすれば良い。

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

となる

問題 2.4.16

点電荷を平らな導体面から引き離すのに要する仕事は、点電荷とその鏡像を点電荷と見なした場合の静電エネルギーと一致しない。その理由を簡単に

述べよ。

===== 解答 =====

2 個の点電荷 $\pm q$ を $2d$ だけ離して置いた場合の静電エネルギーは点電荷 q を平らな導体面から d だけ離しておいた場合の静電エネルギーの 2 倍になっている。これは導体内では電場が 0 であり、その空間における静電エネルギーの寄与がないことから理解できる。

問題 2.4.17

平行平板コンデンサーの極板間を引き離すために必要な力を

1. 静電場のエネルギーの変化
2. 電場中の電荷に働く力

の 2 点から別々に計算せよ。もちろん、結果は同じになる。

===== 解答 =====

1. 面積 A 、間隔 d の平行平板コンデンサーの容量は $C = \varepsilon_0 A/d$ であり、電荷 Q が与えられた時の静電エネルギーは

$$U(d) = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 A}$$

である。

$$F(d) = -\partial_d U(d) = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

より力が得られる。ここで、負号は d の変化の向きと反対に力が働くことを意味している。

2. 大きさのみに着目して、議論する。電場の大きさは $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(A\varepsilon_0)$ だから、 $F = (1/2)E(\sigma A) = Q^2/(2\varepsilon_0 A)$

ここで $1/2$ は自身がつくる電場による 2 重の寄与を考慮したものである。

2.4.5 キャパシターの接続

複数のキャパシター C_1, C_2, \dots, C_n を並列接続する場合、その合成容量 C は

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (2.55)$$

となる。これは、すべてのキャパシターに同じ電位差がかかることから明らかである。

複数のキャパシターの直列接続の場合、それぞれのキャパシターに貯えられる電荷は皆同じ (Q) である。一方、すべてのキャパシターに生じた電位差を加算すると、外部から与えた電位差になるので、以下の式が成り立つ。

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \quad (2.56)$$

ここで、容量の定義を用いて

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.57)$$

となる。

2.5 定常電流の性質

2.5.1 電流

電池の発明によって定常電流を得ることができるようになり、電気に関する研究は大きく発展した。電池は化学エネルギーを電気エネルギーに変換することによって、定常電流を作り出す装置である。電池の起電力は、金属原子が酸に溶け出す性質の強さに由来している。2種類の金属を同時に酸に漬けることによって、金属間に電位差が生じる。

1モルの H^+ イオンによって運ばれる電荷を 1 F と呼び、その大きさは

$$1 \text{ F} = 1.602 \times 10^{-19} \times 6.02 \times 10^{23} = 9.64 \times 10^4 \text{ C}$$

である。

2.5.2 定常電流と電荷の保存

ある閉曲面 S を考えよう。その閉曲面で囲まれる体積の中に電荷の湧き出しや吸い込みがなければ、その閉曲面を通じて出入りする電流の総和は 0 になるはずである。すなわち、

$$\int_S \vec{i}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.58)$$

であり、微分形であらわすと、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i}(\vec{r}) = 0 \quad (2.59)$$

である。これは電荷の保存則である。

2.5.3 オームの法則

ある物体に電流が流れる時、その電流の大きさ I は電位差 $\Delta\phi$ に比例し、以下の式で表される。

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} \quad (2.60)$$

ここで、 R を抵抗と呼ぶ。これがオームの法則である。

均質な導線の電気抵抗 R は長さ l に比例し、その断面積 S に反比例する。すなわち、

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.61)$$

である。 ρ は物質や温度によって決まる定数で抵抗率と言う。また、抵抗率の逆数を伝導度と呼び、 σ で表すことが多い。また、オームの法則は一般に

$$\vec{i}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.62)$$

と表すことができる。

問題 2.5.1

電気伝導度の異なる金属（それぞれの電気伝導度を σ_1, σ_2 とする）が平面で接触し、その面に垂直に電流が流れている。この電流の電流密度を \vec{i} とし、境界面に現れる電荷密度を求めよ。

===== 解答 =====

接触面に垂直な方向のみ議論する。各金属内の電場の大きさを E_1, E_2 とすると、電流は一定だから、 $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ である。電場は不連続になっているので、ガウスの法則より電荷が存在するはずである。その面密度を σ とすれば、

$$S\varepsilon(E_2 - E_1) = S\sigma$$

となる。従って、

$$\sigma = \varepsilon i \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right)$$

となる。

問題 2.5.2

太さの様な金属線がある。この金属線を 2 倍の長さに引き延ばすとその電気抵抗は何倍になるか？

===== 解答 =====

長さが 2 倍になると断面積は半分になるはずである。従って、抵抗は 4 倍になる。

2.5.4 導体中の電流の分布

電場に時間変動がない場合は、電荷が電場から受ける力は保存力になる。従って、導体中の電流分布を決定する基本法則を微分形で表すと、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i}(\vec{r}) = 0 \quad (2.63)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.64)$$

$$\vec{i}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.65)$$

となる。これに境界条件を加えて問題を解くことになる。

電荷の存在しない真空中での静電場の基本法則は

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$$

であった。また、導体や電極で電位が一定という境界条件も同じである。従って、 $\vec{D} \leftrightarrow \vec{i}, \sigma \leftrightarrow \epsilon_0$ を対応させると同じ*1電場 \vec{E} が得られる。

問題 2.5.3

内径と外径がそれぞれ R_1, R_2 、高さが L の金属製の円筒を同軸上に配置し、その間を電気伝導度 σ の電解質溶液で満たす。内外の円筒を電極として電流 I を流した場合の電気抵抗を以下の手順に従って求めよ。

1. 対称性から電流がどのように流れるか考察し、中心から距離 r の位置での電流密度を求めよ。
2. オームの法則を適用して、各点における電場を求めよ。
3. 電場を積分することによって、電位差を求めよ。
4. 電位差と電流から抵抗を求めよ。

===== 解答 =====

1. 電流は放射状に流れ、その強さは中心からの距離 r のみの関数となる。全電流は一定だから、電流密度の大きさは $i(r) = I/(2\pi rL)$ となる。

*1 導体表面を越えて電流が流れることはないので、導体表面の近傍では電流も電場も表面に平行になる。このような境界条件は静電場の場合には存在せず、全く同じという訳ではない。しかし、これらの違いは導体表面の近傍に限られる。

2. オームの法則により、 $E(r) = i(r)/\sigma$ となる。
 3. 電位差は、

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr \\ &= \frac{I}{2\pi L\sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{I}{2\pi L\sigma} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

となる。

- 4.

$$R = \Delta\phi/I = \frac{1}{2\pi L\sigma} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

問題 2.5.4

厚さが一様で十分広い金属箔の中央に 2 個の電極をつなぐ。電極を通じて定常電流を流した場合の金属箔上の等電位線の概略を描け。

===== 解答 =====

電極の近傍では同心円になり、金属箔の端では直交する（電流は端に対して常に平行になっている）ことに注意して描く。

問題 2.5.5

電気伝導度 σ の電解質溶液の中に 2 個の半径 a の導体球を中心間の距離 $R \gg a$ をとって置いた。導体球間に電位差 $\Delta\phi$ をかけた時に流れる電流を考察して、抵抗を求めよ。ただし、導体球や導線の電気抵抗は電解質溶液の抵抗に比べて十分小さく無視できる。

===== 解答 =====

真空中に十分離しておいた 2 個の導体球に電荷 $\pm q$ を与えると、それらの電位は $\pm q/(4\pi\epsilon_0 a)$ となる。よって、電位差 $\Delta\phi = 2q/(4\pi\epsilon_0 a)$ である。こ

ここで $\varepsilon_0 \rightarrow \sigma, q \rightarrow I$ と置き換えれば、 $I = 2\pi\sigma a\Delta\phi$ となり、 $R = 1/(2\pi\sigma a)$ と求まる。

2.6 電流と静磁場

電気現象と磁気現象は全く別の現象と考えられていた。しかしながら、電流が磁場を作るなどの現象が発見され、これらの現象はある一つの現象（電磁気現象）の異なった現れであることが分かってきた。電気と磁気が統一されて、電磁気として理解されるようになった。

2.6.1 磁石と磁場

磁石の両端には「磁極」があり、N極には正の「磁荷」S極には負の磁荷があると言う。これらの磁荷は電荷と異なり単独で取り出すことはできないが、仮にそのようなものがあると仮定して「単極」＝「モノポール」と言う。このモノポールにはクーロンの法則が成り立つ。すなわち、モノポール q_m と q'_m の間には次のような力が働く。

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m q'_m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.66)$$

となり、 μ_0 は真空の「透磁率」と言う。この時の磁荷の単位を「ウェーバー (Wb=J/A)」と言う。

電荷の場合と同様に「磁場」を考えることができる。電場と同様に磁場の強さ「 \vec{H} 」をプローブ磁荷 q_m に受ける力 $\vec{F} = q_m \vec{H}$ によって定義する。

2.6.2 磁場中の磁石

磁石を2つのモノポール q_m と $-q_m$ を棒（長さ ℓ ）の両端に固定したものとする。この棒の方向と長さ、そして磁荷の大きさを考慮して磁石の「磁気モーメント」 \vec{p}_m を定義する。 \vec{p}_m は大きさが $p_m = q_m \ell$ で向きがS極が

ら N 極へ向かうベクトルとする。この磁石を磁場 \vec{H} の中に入れると

$$\vec{N} = \vec{p}_m \times \vec{H} \quad (2.67)$$

の力のモーメントを受ける。力のモーメントの定義を思い出すこと。

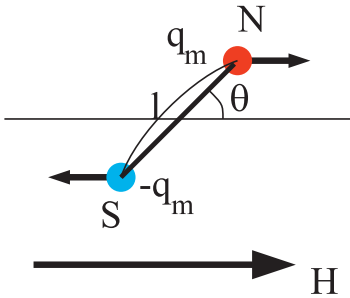


図 2.11

2.6.3 ローレンツ力

ある点において磁束密度 \vec{B} がある。そこを荷電粒子 q が速度 \vec{v} で通過する場合、その荷電粒子には「ローレンツ力」

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.68)$$

が働く。ローレンツ力は \vec{v} に直交しており、磁束密度の下で荷電粒子が運動しても速さ（エネルギー）の変化は起きない。

さらに、電場 \vec{E} がある場合には、荷電粒子は

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.69)$$

の力を受ける。さて、この粒子と一緒に動きながら粒子を観測しよう。運動する観測者からは $\vec{v} = \vec{0}$ である。言い換えると磁束密度からの力は存在し

ない。しかし、粒子に作用する力は観測者の運動にかかわらず同じはずである。観測者にとっては、粒子のところに

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

の電場があるように見える。電場と磁場（磁束密度）は別のものではなく、観測の仕方によって相互に変換されるものである。

磁束密度 \vec{B} の中に置かれた電流 I が流れる長さ dl の導線に働く力 $d\vec{F}$ は、電流が導線の中の荷電粒子の運動であることから、ローレンツ力によって理解できる。導線の方向を \vec{t} として、 $d\vec{l} = \vec{t}dl$ と表すことにすれば、

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (2.70)$$

となる。 $I d\vec{l} = \sum_i q_i \vec{v}_i$ であることに注意。ここで、和は長さ dl の導線中の電流を担う荷電粒子に対して行う。この法則を「フレミングの左手の法則」と言う。

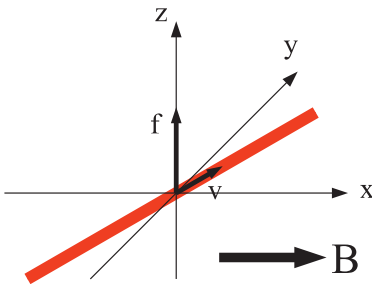


図 2.12

問題 2.6.1

サイクロトロン運動：紙面に対して垂直上向き（ z 方向）に磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ のある空間に、速度 $\vec{v} = (0, v, 0)$ の粒子（電荷 $q < 0$ 、質量

m) が入射した。この荷電粒子に対するローレンツ力は常に進行方向に対して垂直で大きさが $|qvB|$ である。磁場によるローレンツ力は仕事をしないので、「運動エネルギー $(\frac{1}{2}mv^2)$ は一定=速さは一定」である。すなわち、荷電粒子は「等速円運動」を行う。この円運動の半径を求めよ。また、周期を求めよ。

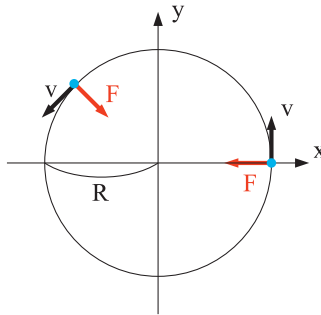


図 2.13

===== 解答 =====

この円運動の半径 R を求めよう。角速度 ω は $\frac{v}{R}$ である。等速円運動において中心方向の加速度 a は $R\omega^2$ である。これは、ローレンツ力によって生じているので、 $R\omega^2 = \frac{|q|vB}{m}$ 。以上により、半径 R と周期 $T = \frac{2\pi R}{v}$ は以下ようになる。

$$R = \frac{mv}{|q|B}, \quad T = \frac{2\pi m}{|q|B} \quad (2.71)$$

問題 2.6.2

一辺の長さが a の正方形の回路に電流 I が流れている。この回路を一様な磁束密度 \vec{B} の中に置いた場合に作用する力のモーメント \vec{N} を求めよ。ただし、正方形の作る面の法線の向きは、面に垂直に右ねじを置いて電流の進

む向きに回した場合にねじの進む方向であり、単位ベクトル \vec{n} で表す。

===== 解答 =====

正方形の各頂点を ABCD とする。この面の法線ベクトルが z 軸と平行になるような座標系を考えると、 $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{BC} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{CD} = -a\vec{i}$, $\overrightarrow{DA} = -a\vec{j}$ とすることができる。辺 AB と辺 CD、および辺 BC と辺 DA に働く力は同じ大きさで逆向きなので、力としては相殺する。しかしながら、力のモーメント $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ を考えると $\vec{0}$ にはならない。

$$\begin{aligned}\vec{N} &= (0, -a/2, 0) \times (aI\vec{i} \times \vec{B}) + (a/2, 0, 0) \times (aI\vec{j} \times \vec{B}) \\ &\quad + (0, a/2, 0) \times (-aI\vec{i} \times \vec{B}) + (-a/2, 0, 0) \times (-aI\vec{j} \times \vec{B}) \\ &= \frac{Ia^2}{2} \left(-\vec{j} \times (0, -B_z, B_y) + \vec{i} \times (B_z, 0, -B_x) \right. \\ &\quad \left. -\vec{j} \times (0, -B_z, B_y) + \vec{i} \times (B_z, 0, -B_x) \right) \\ &= Ia^2(-B_y, B_x, 0) \\ &= Ia^2\vec{n} \times \vec{B}\end{aligned}$$

注意、ベクトル積は結合則を満たさない。すなわち、 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ である。

問題 2.6.3

幅 5 cm の長方形の回路に 0.8 A の電流を流し、一様な磁場中に回路面を磁場に対して垂直にして、半ばまで挿入した。回路には 0.02 N の引き込もうとする力が働いた。この磁場の磁束密度を求めよ。

===== 解答 =====

回路の下の 1 辺は磁場に垂直だから、その部分に働く力は単位長さ当たり IB で辺の長さが a だから、 $F = IBa$ 。従って、 $B = 0.02/(0.8 \cdot 0.05) = 0.5$ T である。

問題 2.6.4

一辺 a の小さな正方形の回路に電流 I が流れている。この正方形は xy 面内にあり、 xy 面には垂直にしかし大きさは一様ではない磁場がかかっている。この磁場の磁束密度の位置依存性が $\vec{B}(\vec{r})$ と表されるとして、回路に働く力を求めよ。ただし、 a は磁束密度の変化の特徴的な長さ比べて十分小さいものとする。また、正方形の各辺は軸に平行であるとする。

===== 解答 =====

xy 面内の点 $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ の近傍で、磁場は以下のように近似できる。

$$B_z(\vec{r}) = B_z(\vec{r}_0) + [\partial_x B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0} (x - x_0) + [\partial_y B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0} (y - y_0)$$

y 軸に平行な 2 辺に働く力は x 軸方向になり、それぞれ

$$\int_{y_0-a/2}^{y_0+a/2} I B_z(x_0 + a/2, y, 0) dy$$

$$\int_{y_0-a/2}^{y_0+a/2} (-I) B_z(x_0 - a/2, y, 0) dy$$

である。従って、その合力 F_x は

$$F_x = I \left(B_z(x_0, y_0, 0) + \partial_x B_z(x_0, y_0, 0) \frac{a}{2} \right) a$$

$$- I \left(B_z(x_0, y_0, 0) - \partial_x B_z(x_0, y_0, 0) \frac{a}{2} \right) a$$

$$= I [\partial_x B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0} a^2$$

となる。同様に x 軸に平行な 2 辺に働く力は y 方向に働く力 F_y となり、

$$F_y = I [\partial_y B_z(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{r}_0} a^2$$

となる。

問題 2.6.5

導体に電流を流しながら、電流に垂直に磁場をかけると、電流、磁場両方に垂直な方向に電場が生じる。この現象をホール効果という。ホール効果に

よる電場は

$$\vec{E} = -\frac{\vec{i} \times \vec{B}}{nq}$$

となることを確かめよ。ここで n, q は伝導を担う粒子の密度とその電荷である。

===== 解答 =====

磁束密度 \vec{B} の磁場から電流密度 $\vec{i} = nq\vec{v}$ を担っている荷電粒子に働くローレンツ力は

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

である。定常状態では電流の向きに直交した方向の力は誘起される電場とキャンセルしなければならないので、その電場を \vec{E} とすると、

$$\vec{0} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

である。従って、

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{\vec{i} \times \vec{B}}{nq}$$

電荷の正負に応じて電場の向きが変化することに注意。

2.6.4 ビオ-サバールの法則

強さ I の電流が流れているとき、その微少部分 $d\vec{s}$ が、そこから \vec{r} だけ離れたところに作る磁場の磁束密度を $d\vec{B}$ とすると以下の式が成りたつ。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.72)$$

積分形で表すと、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{i}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (2.73)$$

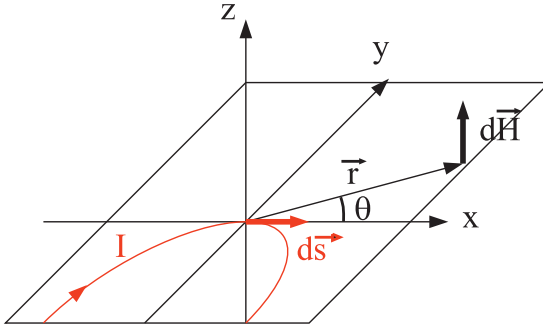


図 2.14

となる。

磁場の強さ (磁界) $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ を導入して、

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (2.74)$$

と表す場合も多い。

問題 2.6.6

無限に長い $((0, 0, -\infty) \rightarrow (0, 0, \infty))$ 直線電流による磁場を考える。導線には強さ I の電流が流れている。直線電流の微小部分 $dz \vec{k}$ が点 $(a, 0, 0)$ に作る微小磁場 $d\vec{H}$ は

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^2} (dz \vec{k}) \times \frac{\vec{r}}{r}$$

となる。ただし、 \vec{k} は z 方向の単位ベクトルである。これを積分することによって、磁場を求めよ。

===== 解答 =====

$\vec{r} = (a, 0, -z)$ を代入すれば、

$$d\vec{H}(a, 0, 0) = \frac{I}{4\pi(a^2 + z^2)} (dz(0, 0, 1)) \times \frac{(a, 0, -z)}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

となる。これを積分することによって、点 $(a, 0, 0)$ における磁場 $\int d\vec{H} = \vec{H}$ を求めることができる。 $d\vec{H}$ は x 方向の成分を持たないこと。また、積分すると z 方向の成分はキャンセルすることを念頭に、y 方向の大きさ H のみを計算する。

$$\begin{aligned} H &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ia}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^3(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで変数変換 $z = a \tan \theta$ を用いた。以上により、 $H = \frac{I}{2\pi a}$ となる。

問題 2.6.7

半径 a の円形の回路に電流 I が流れている。この電流が円の中心 O を通り、円に垂直な直線上に作る磁界 \vec{H} を求めよ。

ヒント：計算を簡単にするために、回路の中心は原点にあり、回路は xy 面内にあるものとしよう。 $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds$ を計算する。ただし、

- $\vec{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$
- $\vec{t}(\vec{r}') = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- $\vec{r} = (0, 0, z)$
- $ds = a d\theta$

として θ を 0 から 2π まで積分する。

===== 解答 =====

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z)}{((-a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta + z^2)^{3/2}} ds \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z\cos\theta, z\sin\theta, a)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\theta \\ &= \frac{I}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z\cos\theta, z\sin\theta, a) a d\theta \\ &= \frac{Ia^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} (0, 0, 1)\end{aligned}$$

問題 2.6.8

長いソレノイドの両端の磁束密度は中央の磁束密度のちょうど半分になっている。対称性の観点からこれを説明せよ。

===== 解答 =====

中央部にはコイルの左右の部分から同じ大きさの寄与がある。両端では片方の寄与しかないから、磁場はちょうど半分になる。

問題 2.6.9

長さが無限と見なせる幅 a の薄い平らな導体板 (xy 面内にあり、幅は y 方向とする) に電流 I が流れている。電流密度は一様である。板の中央線上の任意の点を原点とし、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における磁界を求めよ。

===== 解答 =====

この導体を流れる電流を点 $(0, y, 0)$ を通る x 軸に沿った無限に長い電流を $-a/2$ から $a/2$ まで積分すれば良い。問題 2.6.6 より、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ の磁界の大きさは

$$|d\vec{H}| = \frac{(I/a)dy}{2\pi\sqrt{y^2 + z^2}}$$

である。向きまで考慮すると

$$d\vec{H} = \frac{(I/a)dy}{2\pi\sqrt{y^2+z^2}} \frac{(1,0,0) \times (0,-y,z)}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{I dy}{2\pi a} \frac{(0,-z,-y)}{(y^2+z^2)}$$

$\vec{H}(z)$ は

$$\vec{H}(z) = \int d\vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(0,-z,-y)}{(y^2+z^2)} dy$$

となり、 z 成分の被積分関数が奇関数の寄与は 0 になる。また、 $y = z \tan \theta, z \tan \theta_0 = a/2$ とおくと、

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= (0, -z, 0) \frac{I}{2\pi a z} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \\ &= (0, -1, 0) \frac{I\theta_0}{\pi a} \end{aligned}$$

となる。

2.6.5 円電流による磁気モーメント

中心が原点で、半径 a の円形回路に電流 I が流れている。回路によって決まる法線ベクトルを \vec{n} とすると、十分遠方 $\vec{r}(r \gg a)$ での磁場の強さ（磁界）は以下の式で表すことができる。

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r^3} \left(\vec{m} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} \right) \quad (2.75)$$

ここで、 $\vec{m} = IS\vec{n}$ (S は回路の面積。ここでは $S = \pi a^2$) はこの電流による磁気モーメントである*2。

計算を簡単にするために、 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ とし、 \vec{r} は xz 面内のみを考えて、 $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{t}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds$ を計算する。ただし、

*2 参考書とは \vec{m} の定義が異なっている点に注意。参考書は MKSA 単位系を採用しているのに対して、本講義では SI 単位系を採用している。

- $\vec{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$
- $\vec{t}(\vec{r}') = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
- $\vec{r} = (x, 0, z)$
- $ds = ad\theta$

として θ を 0 から 2π まで積分する。

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (x - a \cos \theta, -a \sin \theta, z)}{((x - a \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta + z^2)^{3/2}} ds \\ &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{(z \cos \theta, z \sin \theta, -x \cos \theta + a)}{(x^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \theta)^{3/2}} ds \\ &\approx \frac{I \int (z \cos \theta, z \sin \theta, -x \cos \theta + a) \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ds}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

以後は成分毎に検討しよう。

$$\begin{aligned} H_x(\vec{r}) &= \frac{I \int_0^{2\pi} z \cos \theta \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I\pi a^2 \frac{3xz}{x^2 + z^2 + a^2}}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{I\pi a^2}{r^3} \frac{3xz}{r^2} \\ H_y(\vec{r}) &= \frac{I \int_0^{2\pi} z \sin \theta \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} = 0 \\ H_z(\vec{r}) &= \frac{I \int_0^{2\pi} (-x \cos \theta + a) \left(1 + \frac{3ax \cos \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I \int_0^{2\pi} \left(a - \frac{3ax^2 \cos^2 \theta}{x^2 + z^2 + a^2}\right) ad\theta}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I\pi a^2}{4\pi (x^2 + z^2 + a^2)^{3/2}} \frac{-x^2 + 2z^2}{x^2 + z^2 + a^2} \\ &\approx \frac{I\pi a^2}{r^3} \frac{-x^2 + 2z^2}{r^2} \end{aligned}$$

得られた近似式は式 2.75 に $\vec{n} = (0, 0, 1)$ を代入したものになっている。また、 z 軸周りに回転することによって、 y 成分が 0 でない場合も求めることができる。

2.6.6 アンペールの法則

電流の周囲に閉曲線 C を考える。その閉曲線に沿って、 $\vec{H} \cdot d\vec{r}$ を積分すると、

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \begin{cases} 0 & : C \text{ が電流を囲まない時} \\ I & : C \text{ が電流を右ネジの向きに} \\ & \text{一周する時} \\ -I & : C \text{ が電流を右ネジの向きと} \\ & \text{反対向きに一周する時} \end{cases} \quad (2.76)$$

となる。これを「アンペールの法則」と言う。

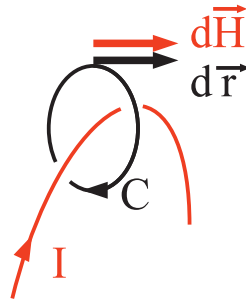


図 2.15

電流が分布している場合は、

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{i}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (2.77)$$

と表すことができる。この式にストークスの定理を適用すると、微分形の法則

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \quad (2.78)$$

が得られる。

問題 2.6.10

金属でできた半径 R の円筒に電流 I が流れている。円筒の厚さは無視できるとして、円筒の内外の磁界の大きさ $H(r)$ を求めよ。

===== 解答 =====

円筒の軸に垂直な面内の軸を中心とする半径 r の円周を考える。ここにアンペールの法則を適用する。向きは接線方向であり、大きさのみを考える。

$$H(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

問題 2.6.11

以下のベクトル場について、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ となることを確認し、 $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ から電流密度を求めよ。

- $\vec{H} = (-A(x^2 + y^2)y, A(x^2 + y^2)x, A')$
-

$$H_x = \begin{cases} A & (z > d) \\ A \frac{z}{d} & (d \geq z \geq -d) \\ -A & (z < -d) \end{cases}, H_y = A', H_z = 0$$

===== 解答 =====

-

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -2Axy + 2Axy + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -A(x^2 + y^2)y & A(x^2 + y^2)x & A' \end{vmatrix} \\ &= (0, 0, 4A(x^2 + y^2))\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{cases} \vec{0} & (z > d) \\ (0, A/d, 0) & (d \geq z \geq -d) \\ \vec{0} & (z < -d) \end{cases},\end{aligned}$$

問題 2.6.12

無限に大きな平面上を一定の向き、一定の強さで流れる一様な電流（電流密度 j ）の作る静磁場を求めよ。

===== 解答 =====

面に垂直に z 軸を、電流の向きに x 軸を、そしてそれらに直交するように y 軸を取る。アンペールの法則を適用する経路として yz 面内の正方形を考える。各辺は y, z 軸に平行とする。

1. 正方形が電流が流れる平面をまたがないとき

磁場が平面からの距離に依存しても z 軸に平行な辺での寄与はキャンセルして 0 になる。今、この経路の中に電流はないからアンペールの法則より、すべての寄与はキャンセルして 0 にならないといけない。しかしながら、 y 軸に平行な辺からの寄与は磁場が平面からの距離に依存しては 0 にならない。従って、磁場の強さは平面からの距離に依存しない。なお、面を挟んで磁場の向きは逆転する。

2. 正方形が電流が流れる平面をまたぐとき

正方形の 1 辺の長さを a とすると、 $Ha - (-Ha) = ja$ となる。従って、 $H = j/2$ である。

電流の流れる平面で磁場は不連続になっていることに注意。

問題 2.6.13

単位長さ当たり n 回巻いた円筒形の非常に長いコイルに電流 I が流れている。中心に作る磁場を求めよ。

===== 解答 =====

磁場の向きは円筒の軸方向であることは明らかである。ここでは大きさのみを求めよう。積分経路としては 1 辺 a の正方形を考える。この正方形の 2 辺はコイルの軸に平行であり、そのうち 1 辺はコイル内、もう 1 辺はコイル外にある。残りの 2 辺でのアンペールの法則での線積分はお互いにキャンセルしてなくなる。コイルの外側は磁場が 0 であるので、結局 $Ha = (na)I$ となる。従って、 $H = nI$ であることがわかる。

問題 2.6.14

無限に長い断面が半径 R の円形の導線に電流 I が流れている場合の磁場を以下の手順に従って求めよ。

1. 電流密度 $i(\vec{r})$ を求めよ。
2. ビオ-サバルの法則より磁力線には動径方向の成分がないことを説明せよ。
3. アンペールの法則より磁場の大きさを求めよ。

===== 解答 =====

1. $i(\vec{r}) = \frac{I}{\pi R^2}$ である。
2. 電線の中の位置 (x, y, z) における電流の微小要素によって作られる位置ベクトル (x_0, y_0, z_0) での磁場を考える。

$$\begin{aligned} & d\vec{H} \\ &= \frac{i}{4\pi r^2} (dz \vec{k}) \frac{(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) dx dy}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{4\pi r^2} \frac{-(y_0 - y), x_0 - x, 0) dx dy dz}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}}$$

この式より、磁場には z 成分が存在しないことが分る。座標軸の取り方は任意だから、点 (x_0, y_0, z_0) として $(x_0, 0, 0)$ のみを考えてそこで磁場が y 方向の成分しかないことが証明できれば十分である。その磁場は

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi r^2} \frac{(y, x_0 - x, 0) dx dy dz}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2 + z^2}}$$

となる。一方、 $(x, -y, z)$ にある微小電流要素からの磁場は

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi r^2} \frac{(-y, x_0 - x, 0) dx dy dz}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2 + z^2}}$$

である。両者を足すと、磁場は y 方向の成分しか存在しない。電流の分布は y 軸に対して対称だから、積分しても y 方向の成分がないことが分る。

3. 各点における磁場の大きさを H とすると、それは導線の中心軸からの距離 r だけの関数である。ここで、アンペールの法則を適用すると

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 2\pi r H(r) = \begin{cases} \pi r^2 i & r < R \\ I & r > R \end{cases}$$

故に、

$$H(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} i r = \frac{1}{2} \frac{I}{\pi R^2} r & r < R \\ \frac{I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

となる。

2.7 ベクトル・ポテンシャル

2.7.1 静電ポテンシャルとベクトル・ポテンシャル

静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ は $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ のように静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ によって表すことが可能である。このように表すことができるのは、 $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ であることによっている*3。静電場を計算する場合、静電ポテンシャルをまず求めて、それから電場を計算する方が便利な場合が多い。

同様なことが静磁場にもある。ただし、静磁場の基本法則は

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.79)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{i}(\vec{r}) \quad (2.80)$$

である。電流があると渦なしの条件が崩れ、ポテンシャルを定義することが出来なくなる。そこで、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (2.81)$$

を考える。このように表すと式 2.79 は自動的に満たされるので*4、式 2.80 のみを考えれば良いことになる。ただし、この時点では $\vec{A}(\vec{r})$ が存在は証明されていない。

2.7.2 ベクトル・ポテンシャルの任意性

静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を表す静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ に定数 c を加えて、新しい静電ポテンシャル $\phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + c$ を作っても、元と同じ静電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を表すことができる。

*3 すべてのベクトル場は渦無し場と渦有り場の和として表すことができることを思い出すこと。

*4 ベクトル演算の公式 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$ を思い出すこと。

同様のことがベクトル・ポテンシャルの場合にもある。すなわち、任意のスカラ関数 $\chi(\vec{r})$ に対して $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\chi(\vec{r})) = 0$ であるから*5、

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}) \quad (2.82)$$

は、 \vec{A} と同じ磁場を作る。このようなベクトル・ポテンシャルの任意性のおかげで最も便利なベクトル・ポテンシャルを用いることが許される。

2.7.3 ベクトル・ポテンシャル

ベクトル・ポテンシャルが存在することを証明する。電流分布 $\vec{i}(\vec{r})$ から $\vec{A}(\vec{r})$ を決めることができれば、証明できたことになる。

式 2.80 に $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ を代入すると、

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) \quad (2.83)$$

だから、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ を仮定すると

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{i}(\vec{r}) \quad (2.84)$$

が得られる。従って、

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.85)$$

のように $\vec{A}(\vec{r})$ を求めることができる*6。

*5 ベクトル演算の公式を思い出すこと

*6 ポアソン方程式

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})$$

の解は

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

で与えられる。ベクトル・ポテンシャルの場合は各成分毎にポアソン方程式を解けば良い。

次にこのようにして求めた $\vec{A}(\vec{r})$ が $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ を満たすことを示せば証明は完了する。定義に従って、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{i}(\vec{r}') \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{i}(\vec{r}') \cdot \left(-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'\end{aligned}\quad (2.86)$$

が得られる。ここで $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ であるのに対して $\vec{\nabla}' = (\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})$ とする。さらに、

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{i}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (2.87)$$

だから、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'\end{aligned}\quad (2.88)$$

となる。定常電流では電荷の保存則より $\vec{\nabla}' \cdot \vec{i}(\vec{r}') = 0$ である。一方、第2項はガウスの定理により表面積分になり、十分大きな体積をとることによりその積分はゼロにすることができる。言い換えると、無限に大きな空間に有限の電流が分布していると無限に大きなエネルギーが必要となり、それは許されない訳である。以上により、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ が証明できた。

問題 2.7.1

以下のベクトル・ポテンシャルが作る磁場を計算せよ。

1. $\vec{A}_1 = (-By, 0, 0)$
2. $\vec{A}_2 = (0, Bx, 0)$
3. $\vec{A}_3 = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$

===== 解答 =====

どのベクトル・ポテンシャルでも同じ磁場を与える。

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_i = (0, 0, B)$$

問題 2.7.2

非常に長い線分上を流れる電流 I が点 \vec{r} につくるベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ を求めよ。線分は $(0, 0, -\ell)$ から $(0, 0, \ell)$ で、 $\ell \gg r$ とする。また、このベクトル・ポテンシャルから得られる磁場を計算せよ。

ヒント：

$$\frac{d}{dx} \log(\sqrt{a^2 + x^2} + x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

===== 解答 =====

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{(0, 0, 1)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz'$$

ここで、 $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}' = (0, 0, z')$ である。 $A_x(\vec{r}) = A_y(\vec{r}) = 0$ は明らかである。従って、以後 $A_z(\vec{r})$ のみを考察する。 $|x| \gg |x'|$ 、 $|y| \gg |y'|$ と $\ell \gg |z|$ より、

$$\begin{aligned} A_z(\vec{r}) &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} dz' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} [\log(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} + (z' - z))]_{-\ell}^{\ell} \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + \ell^2} + \ell}{\sqrt{x^2 + y^2 + \ell^2} - \ell}\right) \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log\left(\frac{\ell\left(1 + \sqrt{1 + (x^2 + y^2)/\ell^2}\right)}{\frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\ell}}\right) \\ &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log\left(\frac{4\ell^2}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \left(\frac{2\ell}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

と近似できる。

ベクトル・ポテンシャルは z 成分しかないから、

$$B_x = \partial_y A_z(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \partial_y r = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{y}{r}$$

$$B_y = -\partial_x A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \partial_x r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{x}{r}$$

となる。ここで、 ℓ は定数としてその微分はゼロとしている。

問題 2.7.3

非常に大きな半径 R の円盤上に電荷が一様に分布している（面電荷密度は σ_0 ）。最初円盤の中心は原点にあり、やがて x 方向に速さ v_0 で動き始めた。ただし、円盤は常に xy 面上にある。動き始めた瞬間を考えよう。

1. 円盤が動くことによって電流が生じる。その面電流密度を求めよ。
2. 円盤が動くことによって生じるベクトル・ポテンシャルを求めよ。ただし、点 \vec{r} ($r \ll R$, $z > 0$) の点について調べれば良い。
3. 求めたベクトル・ポテンシャルから磁場を求めよ。

===== 解答 =====

1. 面電荷が σ_0 で x 方向に速さ v_0 で動いているので、面電流密度 i_0 は

$$i_0 = \sigma_0 v_0$$

となる。

2. ベクトル・ポテンシャルを表す式に代入すると

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int \frac{(1, 0, 0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy'$$

$r \ll R$ より $\vec{r} = (0, 0, z)$ の場合のみを考えれば十分である。また、明らかにベクトル・ポテンシャルは y, z 成分はゼロなので、 x 成分のみを考える。

$$A_x(z) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dx' dy'$$

円筒座標を用いて $dx' dy'$ を $rd\theta dr$ に置き換えると、

$$\begin{aligned} A_x(z) &= \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} B_x(z) &= \partial_y A_z - \partial_z A_y = 0 \\ B_y(z) &= \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right) \\ &\approx -\frac{\mu_0 i_0}{2} \\ B_z(z) &= \partial_x A_y - \partial_y A_x = 0 \end{aligned}$$

問題 2.7.4

無限に長い半径 R の円筒上に電荷が均一に分布している（面電荷密度は σ_0 ）。円筒を回転させた。円筒の部分での速さを v_0 とする。

1. 円筒が回転することによって生じるベクトル・ポテンシャルを求めよ。
2. 求めたベクトル・ポテンシャルから磁場を求めよ。

===== 解答 =====

1. 半径 R の側面に密度 σ で一様に分布する電荷による電場は軸から放射状に生じ、軸からの距離が r の点における強さは $E(r) = 0$ ($r < R$)、 $E(r) = \sigma R / (\epsilon_0 r)$ ($r > R$) である。静電ポテンシャルで表すと、

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \log R & (r < R) \\ -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \log r & (r > R) \end{cases}$$

円筒に流れる電流の軸を z 軸に取り、 $\epsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0$ 、 $\sigma \rightarrow I/(2\pi R)$ の置き換えを行うと、ベクトル・ポテンシャル

$$A_z(r) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log R & (r < R) \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log r & (r > R) \end{cases}$$

が得られる。

2. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ より求まる。

問題 2.7.5

ベクトル・ポテンシャルを用いてビオ-サバールの法則を導出せよ。

===== 解答 =====

x 成分について考察しよう。 y, z 成分も同様である。

$$\begin{aligned} B_x &= \partial_y \times A_z(\vec{r}) - \partial_z \times A_y(\vec{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(i_z(\vec{r}') \partial_y \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - i_y(\vec{r}') \partial_z \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(i_z(\vec{r}') \frac{-(y - y')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - i_y(\vec{r}') \frac{-(z - z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\{\vec{i}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')\}_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$