第 14 章

章末問題の解答

2 章

問題 2.1

解答省略。

問題 2.2

$$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha^*\beta}\right| < 1 \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2 < |1-\alpha^*\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^*-\beta^*) < (1-\alpha^*\beta)(1-\alpha\beta^*) \Leftrightarrow (|\alpha|^2-1)(|\beta|^2-1) > 0$$

問題 2.3

1. z_1+z_2 の複素平面上の位置は (u_1+u_2, v_1+v_2) となる。この点は原点から半径 2 の円より外にでることはない。
2. $$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1^*z_2+z_1z_2^* \leq 1+1+1+1$$
   従って、証明できた。
3. 原点、z_1, z_2 に対応する点を各頂点とする三角形を考える。説明すべき式は「三角形の 2 辺の和は残りの辺よりも長い」という三角不等式を表していることになる。
4. $$|z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow -z_1z_2^*-z_1z_2^* \leq 2|z_1||z_2|$$
   $z_1 = 0, \mathrm{or}\ z_2 = 0$ ならば、等号が成立する。両方ともゼロねないならば、$-z_1^*z_2/|z_1||z_2| \to \alpha$ と置けば、$\alpha+\alpha^* \leq 2$ と等価である。ここで、$|\alpha| \leq 1$ なので、(1,2) より証明が終わる。

問題 2.4

1. $z = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$
2. $z = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$
3. $z = 1(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)$

問題 2.5

1. $z_1/z_2 = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
2. θ_2 だけ逆回転すること。

問題 2.6

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[d^k e^{i\theta}/d\theta^k]_{\theta=0}}{k!}\,\theta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\,\theta^k = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \ldots + i(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

問題 2.7

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) + i\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = e^{i(\theta_1 \pm \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{\pm i\theta_2}$$
$$= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 \pm i\sin\theta_2) = (\cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

問題 2.8

1. $\cos 3\theta = 1, \sin 3\theta = 0$ より、$\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3.$
2. $\cos 4\theta = 1, \sin 4\theta = 0$ より、$\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2.$
3. $\cos 4\theta = -1, \sin 4\theta = 0$ より、$\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4.$

問題 2.9

1.
$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{-\pi/2}$$

2.
$$\sqrt{i} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

問題 2.10

1.
$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x$$

2.
$$|\sin z|^2 = u^2 + v^2 = \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4}\sin^2 x + \frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4}\cos^2 x = \sin^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2$$

例として、$\sin x = \pm 1, y \neq 0$ であれば、$|\sin(x+iy)| > 1$ となる。

3.
$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x = 0, \qquad \frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x = 0$$

でなければならない。$\frac{e^y + e^{-y}}{2} > 0$ より $\sin x = 0$ でなければならない。一方、$\sin x = 0$ の場合、$\cos x \neq 0$ である。従って、$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0$ でなければならない。すなわち、$y = 0$ である。

問題 2.11

1.
$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^* - z^*}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^*}{h} = e^{-2i\theta}$$

最後のところで、$h = re^{i\theta}$ と置いた。θ に依存するので、微分可能ではない。

2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{((z+h)^*)^2-(z^*)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2z^*h^*}{h}=2z^*e^{-2i\theta}$$

最後のところで、$h=re^{i\theta}$ と置いた。θ に依存するので、微分可能ではない。

3.

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{z+h}-e^z}{h}=\lim_{h\to 0}e^z\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}e^z e^h=e^z$$

従って、微分可能である。

問題 2.12

1. $f(x+iy)=x-iy$ すなわち、$u(x,y)=x, v(x,y)=-y$ である。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

よって、正則ではなく微分可能ではない。

2. $f(x+iy)=x^2+y^2-i2xy$ すなわち、$u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=-2xy$ である。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-2x$$

よって、正則ではなく微分可能ではない。

3. $f(x+iy)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ すなわち、$u(x,y)=e^x\cos y, v(x,y)=e^x\sin y$ である。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$$

よって、正則であり微分可能である。

問題 2.13

$$\frac{d\sin z}{dz}=\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}=\cos z$$

$d\cos z/dz$ も同様に行う。

問題 2.14

1.

$$y_1(ik)^2+y_1(ik)+y_1=y_0\Rightarrow y_1=\frac{y_0}{-k^2+ik+1}$$

2. y を x で偏微分してもゼロなので、

$$y=y_0e^{i\omega t}\Rightarrow y_1=y_0$$

3 章

問題 3.1

解答省略。

問題 4.1

- $$[\vec{D}] = [\epsilon_0][\vec{E}] = \mathrm{m^{-3}\,kg^{-1}\,s^4\,A^2 \cdot m\,kg\,s^{-3}\,A^{-1} = m^{-2}\,s\,A}$$

- $$[\vec{B}] = [\mu_0][\vec{H}] = \mathrm{m\,kg\,s^{-2}\,A^{-2} \times m^{-1}\,A = kg\,s^{-2}\,A^{-1}}$$

問題 4.2

- $$[C] = [Q]/[V] = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m^2\,kg\,s^{-3}\,A^{-1}}} = \mathrm{m^{-2}\,kg^{-1}\,s^4\,A^2}$$

- $$[L] = \frac{[V]}{[I]/[t]} = \frac{\mathrm{m^2\,kg\,s^{-3}\,A^{-1}}}{\mathrm{A\,s^{-1}}} = \mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}\,A^{-2}}$$

5 章

問題 5.1

電流は流入する方向を正とする。

- R_1, R_2, R_3 に流れる電流をそれぞれ、I_1, I_2, I_3 とする。E_1, R_1, R_2, E_2 のループに対して

  $$E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 - E_2 = 0$$

  R_2, E_2, E_3, R_3 のループに対して

  $$E_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 - E_3 = 0$$

  また、

  $$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

  である。連立方程式を解くと、

  $$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E_1(R_2+R_3) - E_3R_2 - E_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ I_2 &= \frac{E_2(R_3+R_1) - E_1R_3 - E_3R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ I_3 &= \frac{E_3(R_1+R_2) - E_2R_1 - E_1R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \end{aligned}$$

  解の対称性に注目。すなわち、I_1 の解の添え字を $1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$ と入れ替えると I_2 が求まる。I_3 も同様である。

- E_1 しかない場合の電池に繋がれている抵抗の合成抵抗は、

  $$R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$$

各抵抗に流れる電流を I_{11}, I_{12}, I_{13} とすると、

$$I_{11} = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}, \quad I_{12} = -I_{11}\frac{1/R_2}{1/R_2 + 1/R_3}, \quad I_{13} = -I_{11}\frac{1/R_3}{1/R_2 + 1/R_3}$$

となる。これらを整理すると、

$$I_{11} = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad I_{12} = -\frac{E_1 R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad I_{13} = -\frac{E_1 R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

となる。同様に I_{21}, I_{22}, I_{23}

$$I_{21} = -\frac{E_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad I_{22} = \frac{E_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad I_{23} = -\frac{E_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

と I_{31}, I_{32}, I_{33} を求めれば、

$$I_{31} = -\frac{E_3R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad I_{32} = -\frac{E_3R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad I_{33} = \frac{E_3(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

となる。$I_1 = I_{11} + I_{21} + I_{31}$ などより解が得られる。

問題 5.2

1. R_5 がない時、R_1 と R_2 の間の電圧 V_1 は $V_1 = R_2/(R_1 + R_2)E$ である。一方、R_3 と R_4 の間の電圧 V_3 は $V_3 = R_4/(R_3 + R_4)E$ である。従って、R_5 にかかる電圧 V は

$$V = (R_2/(R_1 + R_2) - R_4/(R_3 + R_4))\,E = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}E$$

である。

2. 鳳-テブナンの定理の合成抵抗 R は「R_1 と R_2 の並列抵抗」と「R_3 と R_4 の並列抵抗」が直列に接続されていると考えれば良いので、

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

である。

3. R_5 に流れる電流 I は、

$$\begin{aligned} I = \frac{V}{R + R_5} &= \frac{\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}E}{\frac{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)} + R_5} \\ &= \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)E}{R_1R_2(R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)R_3R_4 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_5} \end{aligned}$$

となる。

キルヒホッフの法則を用いて計算を行なう場合、連立方程式を解く必要がありその計算の手間は大変である。

6 章

問題 6.1

問題 5.1 の解答で、直流回路の抵抗をインピーダンスに、直流電源を交流電源に置き換えれば良い。

問題 6.2

問題 5.2 の解答で、R_1, R_2, R_3 をそれぞれ $i\omega L_1, (i\omega C_2)^{-1}, (i\omega C_3)^{-1}$ に置き換えれば良い。

8 章

問題 8.1

1.

$$\int_{C_1} zdz = \int_0^1 (at+ibt)(a+ib)dt = (a+ib)^2 \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}(a+ib)^2$$

2.

$$\int_{C_2} zdz = \int_0^1 (at+ibt^2)(a+2ibt)dt = \int_0^1 (a^2t + 3iabt^2 - 2b^2t^3)dt = \frac{1}{2}(a+ib)^2$$

3.

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_0^a tdt + \int_0^b (a+it)idt = \frac{a^2}{2} + \left(iab - \frac{b^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(a+ib)^2$$

問題 8.2

1.

$$\int_{C_1} z^*dz = \int_0^1 (at-ibt)(a+ib)dt = (a^2+b^2) \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

2.

$$\int_{C_2} z^*dz = \int_0^1 (at-ibt^2)(a+2ibt)dt = \int_0^1 (a^2t + iabt^2 + 2b^2t^3)dt = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + i\frac{1}{3}ab$$

3.

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_0^a tdt + \int_0^b (a-it)idt = \frac{a^2}{2} + \left(iab + \frac{b^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + iab$$

問題 8.3

前問の解答より各辺の積分は求められている。従って、

1.

$$\oint_C zdz = \int_{C_3} zdz + \int_{C_1^{-1}} zdz = \int_{C_3} zdz - \int_{C_1} zdz = 0$$

2.

$$\oint_C zdz = \int_{C_3} z^*dz + \int_{C_1^{-1}} z^*dz = \int_{C_3} z^*dz - \int_{C_1} z^*dz = iab$$

問題 8.4

1.

$$\oint_C zdz = \int_0^{2\pi} e^{it} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt = 0$$

2.

$$\oint_C z^*dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi i$$

3.

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i\int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi i$$

問題 8.5

1. $\partial x/\partial z^* = 1/2, \partial y/\partial z^* = i/2$ を用いて、

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{i}{2}$$

2.

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy) \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dxdy - \frac{\partial v}{\partial x}dxdy\right) + i\int_{\mathcal{D}} \left(-\frac{\partial v}{\partial y}dxdy + \frac{\partial u}{\partial x}dxdy\right) \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(i(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}) - (\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})\right) dxdy = \int_{\mathcal{D}} \left(i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = 2i\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial z^*} dxdy\end{aligned}$$

3. 上の式に $f(z) = z^*$ を代入すれば得られる。

問題 8.6

- $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ だから、$z = 1$ において留数 1 を持つ。C_1, C_2 の経路の複素積分はそれぞれ、$2\pi i, 0$ となる。
- $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ だから、$z = i$ において留数 1 を持つ。C_1, C_2 の経路の複素積分はそれぞれ、$2\pi i, 2\pi i$ となる。
- $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+1})$ だから、$z = \pm 1$ において留数 $\pm 1/2$ を持つ。C_1, C_2 の経路の複素積分はそれぞれ、$0, 0$ となる。
- $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{2i}(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i})$ だから、$z = \pm i$ において留数 $\pm 1/2i$ を持つ。C_1, C_2 の経路の複素積分はそれぞれ、$0, \pi$ となる。

問題 8.7

1. 複素関数 $f(z)e^{-i\omega z} = \dfrac{e^{-i\omega z}}{2i}\left(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\right)$ と変形できるので、その留数は $z = \pm i$ において $\pm\frac{e^{\pm\omega}}{2i}$ となる。考えている積分経路では $z = -i$ が入っているから、留数定理より複素積分は $\pi e^{-\omega}$ となる。経路 $C_1 + C_2$ は負の向きに成っていることに注意のこと。
2.

$$\frac{1}{z^2+1}e^{-i\omega z}dz = \frac{1}{R^2e^{2i\theta}+1}e^{-i\omega Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta = \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}e^{-i\omega R(\cos\theta + i\sin\theta)}d\theta = \frac{iRe^{i\theta}e^{-i\omega R\cos\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}e^{\omega R\sin\theta}d\theta$$

であるので、

$$\left|\int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}e^{-i\omega z}dz\right| \le \int_0^{-\pi} \left|\frac{iRe^{i\theta}e^{-i\omega R\cos\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\right| \left|e^{\omega R\sin\theta}\right| d\theta = \int_0^{-\pi} \left|\frac{R}{R^2e^{2i\theta}+1}\right| \left|e^{\omega R\sin\theta}\right| d\theta$$

となる。ここで、$0 \ge \theta \ge -\pi$ において $\sin\theta \le 0$ なので、$\left|e^{\omega R\sin\theta}\right| < 1$ となる。また、$\lim_{R\to\infty}\left|\dfrac{R}{R^2e^{2i\theta}+1}\right| = 0$ である。従って、極限値は 0 になることがわかる。

3. 以上の考察により、$G(\omega) = \pi e^{-\omega}$ となる。

問題 8.8

1. オイラーの公式を使って、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}dx = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2ix}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{2ix}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{2ix}dx$$

2. $f(z)$ は $z=0$ にしか留数を持たないので、この経路の複素積分はゼロになる。
3.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{2iz}dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta$$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N e^{-R\sin(\pi k/N)}\frac{\pi}{N}\right)\right| \le \left|\lim_{R\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N e^{-R\sin(\pi/N)}\frac{\pi}{N}\right)\right|$$

$$\text{右辺} = \left|\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N e^{-N^2\sin(\pi/N)}\frac{\pi}{N}\right)\right| = \left|\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N e^{-\pi N}\frac{\pi}{N}\right)\right| = \left|\left(\lim_{N\to\infty}\pi e^{-\pi N}\right)\right| = 0$$

ここで、$R\to\infty$ の時、$R=N^2$ を保ったまま無限大の極限を取ることにしている。

4.

$$\lim_{r\to0}\int_{C_3}\frac{e^{iz}}{2iz}dz = \lim_{r\to0}\int_\pi^0 \frac{e^{ire^{i\theta}}}{2ire^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_\pi^0 d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

5.

$$0 = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to0}\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{r\to0}\int_{C_2+C_4} f(z)dz + \lim_{r\to0}\int_{C_3} f(z)dz = \int_{-\infty}^\infty f(z)dz - \frac{\pi}{2}$$

従って、求める定積分の値は $\dfrac{\pi}{2}$ であることがわかる。

9 章

問題 9.1

解答省略。

10 章

問題 10.1

- ローパスフィルターでは、反転増幅回路の R_1, R_2 をそれぞれ $R_1, \dfrac{R_2}{1+i\omega R_2C}$ に置き換えれば良い。

$$-\frac{\frac{R_2}{1+i\omega R_2C}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1-i\omega R_2C}{1+\omega^2R_2^2C^2}\right)$$

$$\left|\frac{\frac{R_2}{1+i\omega R_2C}}{R_1}\right| = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R_2^2C^2}}$$

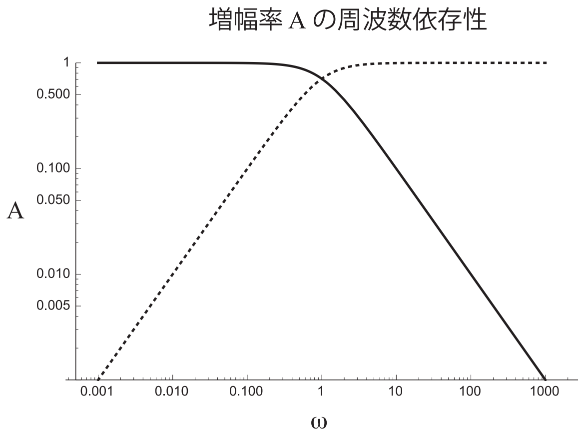
$$\theta = \mathrm{Arg}\left(-\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1-i\omega R_2C}{1+\omega^2R_2^2C^2}\right)\right)$$

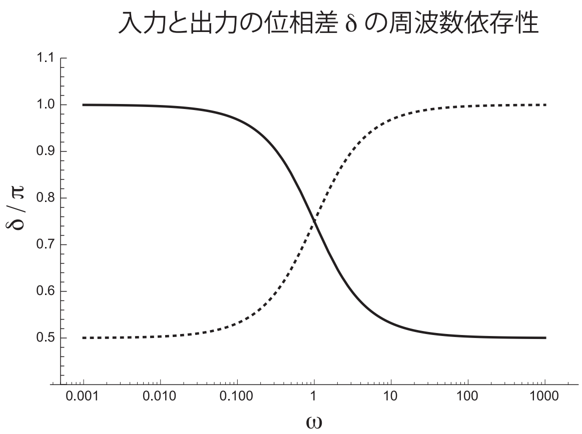
$\mathrm{Arg}(z)$ は z の偏角を与える関数である。

- ハイパスフィルターでは、反転増幅回路の R_1, R_2 をそれぞれ $R_1 + \dfrac{1}{i\omega C}, R_2$ に置き換えれば良い。

$$
\begin{aligned}
-\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{i\omega C}} &= -\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{i\omega C R_1}{1 + i\omega C R_1}\right) = -\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1 + i\frac{1}{\omega C R_1}}{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R_1^2}}\right) \\
\left|\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{i\omega C}}\right| &= \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R_2^2 C^2}}} \\
\theta &= \mathrm{Arg}\left(-\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1 + i\frac{1}{\omega C R_1}}{1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R_1^2}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

問題 10.2





11 章

問題 11.7

$$
1 + 1 = (1 + 1) \cdot 1 = (1 + 1) \cdot (1 + \overline{1}) = 1 + (1 \cdot \overline{1}) = 1 + 0 = 1
$$

問題 11.8

- 和について
  ある数の和についての逆元は、足すと単位元（0）になる数である。$0 + 0 = 0$ なので、0 についての逆元は 0。一方、$1 + 1 = 0$ なので、1 についての逆元は 1 となる。
- 積について
  ある数の積についての逆元は、積を取ると単位元（1）になる数である。$0 \times 0 = 0, 0 \times 1 = 0, 1 \times 0 = 0$ なので、0 に対する逆元は存在しない。一方、$1 \times 1 = 1$ なので、1 に対する逆元は 1 である。

問題 11.9

- 2 個ある入力を接続して 1 入力とすれば、NOT 回路になる。
- 上でできた NOT を NAND の出力に接続すれば AND 回路になる。
- ド・モルガンの法則により、NOT 回路を介して 2 個の入力を入れれば、OR 回路になる。

問題 11.10

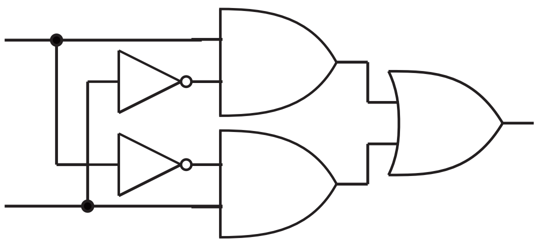


図 14.1　AND、OR そして NOT を用いて構成した EXOR。

問題 11.11

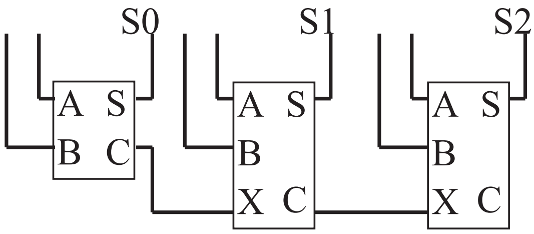


図 14.2　3 桁の加算器。入力は A2A1A0 と B2B1B0 で出力を S2S1S0 とする。最上位から出る Carry out は桁あふれと呼ぶ。

問題 11.12

001111 の 1 の補数は 110000 で、2 の補数は 110001 となる。111011+110001=1101100 となり、最上位桁を無視すると、101100 と正しい減算結果が得られる。

問題 11.13

エラーが起こる場合は以下のように分類できる。従って、冗長度 3 の場合は、$(1-p)^3+3p(1-p)^2$ の確率で正しく情報を送ることができるのに対して、1 ビットしか送らない場合は $1-p$ の確率でしか正しい情報を送ることはできない。

$$(1-p)^3+3p(1-p)^2 \geq 1-p$$

が求める条件である。これより、$0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ の場合にエラー訂正が意味を持つことになる。

1 ビットしか送らない場合		
エラーが起こらない確率	$(1-p)$	OK
エラーが起こる確率	p	Not OK
冗長度 3 の場合	確率	正しい？
起こらない確率	$(1-p)^3$	OK
1 つのビットに起こる確率	$3p(1-p)^2$	OK
2 つのビットに起こる確率	$3p^2(1-p)$	Not OK
3 つすべてのビットに起こる確率	p^3	Not OK

表 14.1　エラーの種類とその確率

12 章

問題 12.1
解答省略。

13 章

問題 13.1

1. コイルの体積 sv は

$$sv = \pi sd^2 sl/4 = 2.209 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^3$$

である。コイルの中に存在する水素原子のモル数 sa は

$$sa = sv\rho_{\mathrm{H_2O}} = sv \cdot 1.11 \times 10^5\,\mathrm{mol\,m^{-3}} = 2.452\ \mathrm{mol}$$

となる。
温度 $T = 300$ K、$B_0 = 30$ mT の磁束密度に対応した磁場の下での水素原子 1 個が持つ磁気モーメント μ_{H} は

$$\mu_H = \frac{(\hbar\gamma_H)^2}{4k_B}\frac{B_0}{T} = 1.44 \times 10^{-33}\ \mathrm{A\,m^2}$$

となる。水素原子に由来する試料の全磁化 M_H は

$$M_H = sa\,\mu_H N_A = 2.13 \times 10^{-9}\ \mathrm{A\,m^2}$$

となる。試料の断面を貫く磁束 Φ_H は

$$\Phi_H = \mu_0\frac{M_H}{sv}(\pi sd^2/4) = \mu_0 M_H/sl = 5.95 \times 10^{-14}\ \mathrm{Wb}$$

となる。試料の周囲に巻かれた 1 巻きコイルに誘起される電圧 V_H は

$$V_H = \frac{d\Phi_H}{dt} = \omega_H\Phi_H = 7.48 \times 10^{-10}\ \mathrm{V}$$

となる。

2. コイルの全巻き数 $N_t = (sl/\phi)N_L$ で与えられる。コイルのインダクタンス L は

$$L = A_n\mu_0\frac{\pi(sd/2)^2}{sl}N_t^2 = 7.64 \times 10^{-3}\ \mathrm{H}$$

となる。ただし、A_n は長岡係数で考えているコイルの形状の場合 $A_n = 0.688$ が表より与えられている。一方、コイルの抵抗 R は

$$R = \rho_{Cu}\frac{\pi sd}{\pi(\phi/2)^2}N_t = 6.12\ \Omega$$

となる。以上により、コイルの Q は

$$Q = \frac{\omega_H L}{R} = 15.7$$

となり、期待される信号の大きさは

$$V_H N_t Q = 1.1 \times 10^{-5}\ \mathrm{V}$$

となる。すなわち、約 100 μV となる。

また、ω_H で共鳴するために必要なコンデンサーの容量 C は

$$C = \frac{1}{\omega_H^2 L} = 8.29 \times 10^{-7} \text{ F}$$

である。

3. 試料に蓄えられている磁場のエネルギーは

$$\frac{(M_H/sv)^2}{2\mu_0} sv = 8 \times 10^{-8} \text{ J}$$

である。一方、1 周期の間に消費される電力は

$$\frac{(V_H N_t Q)^2}{R} \frac{2\pi}{\omega_H} = 9.1 \times 10^{-15} \text{ J}$$

となる。従って、准定常状態と考えて良いであろう。

4. オシロスコープは最大感度において、1 mV 程度の信号を識別できる。従って、現在期待される信号が 10 μV 程度なので、コイルから得られる信号を 100 倍すれば、オシロスコープで観察できる計算になる。

実際には得られる信号はこのような理想的な条件で計算した値より小さいことが多く、また 2 kHz のような低い周波数では 1000 倍の増幅率を持ったアンプを作ることは容易なので、1000 倍のプリアンプを導入すれば良いだろうと考えられる。

5. 無限に長いコイルの内部に発生する磁場 H は、アンペールの法則により

$$H = nI$$

である。ただし、n は単位長さ当たりの巻き数である。今考えているコイルの場合には $n = N_L/\phi$ になる。従って、

$$B_0 = \mu_0 \frac{N_L}{\phi} I$$

より、30 mT の磁束密度を持つ磁場を作るために必要な電流 $I = 1.2$ A を求めることができる。