

実体振り子による重力加速度 g の測定

Y. Kondo

Department of Physics, Kinki University, Kowakae 3-4-1, Higashi Osaka, Japan

(Dated: June 19, 2009)

振り子を使って、重力加速度 g を求める。また、近似について考察する。

I. 理論

A. 単振り子

図 1 のような大きさのない錘 (おもりと読む) を重力下で微小振動させる単振り子を考える。ここでは、動径方向の運動はなく、接線方向のみ考える。

円弧に沿った長さ s を定義すると

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

となる。一方、重力の接線方向の成分は

$$F = -mg \sin \theta$$

よって運動方程式は

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

となる。 $s = \ell \theta$ と、 $|\theta| \ll 1$ の時の近似式 $\sin \theta \approx \theta$ を用いて

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \theta$$

が得られる。なお、 \approx は近似的に両辺が等しいことを意味する記号である。これと、単振動の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

を比較することにより、単振り子の角振動数 $\omega = \sqrt{g/\ell}$ がわかる。よって、

$$\omega^2 = g \frac{1}{\ell} \quad (1)$$

という関係が得られる。

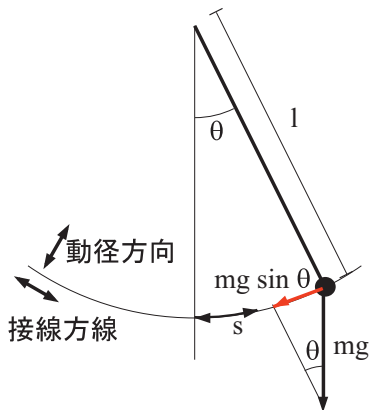


FIG. 1:

B. 実体振り子

実際の振り子では錘に大きさがあり、単振り子よりも複雑になる。質量 M の錘の重心に作用する重力と振り子の慣性モーメント I を用いて運動方程式を立てる必要がある、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\theta$$

となる。ただし、 l は振り子の支点から錘の重心までの距離である。また、 $|\theta| \ll 1$ の時 $\sin \theta \approx \theta$ の近似を用いている。半径 a で質量 M の球の慣性モーメントは $I_0 = \frac{2}{5}Ma^2$ であるので、

$$I = \frac{2}{5}Ma^2 + Ml^2$$

となる。よって、運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gl}{l^2 + (2/5)a^2} \theta \quad (2)$$

となる。すなわち、 $\omega^2 = gl / (l^2 + (2/5)a^2)$ となる。よって、 g は以下の式から計算できる。

$$g = \omega^2 \frac{l^2 + (2/5)a^2}{l} = \omega^2 l \left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right) \quad (3)$$

II. 実験

A. 実験装置

使用する機材は表 I の通りである。

1 m 物差し	2 本/テーブル	ノギス	1/人
ストップウォッチ	1 個/人	錘	1/人
クランプ	1/人	棒	1 本/人
磁石と釘	1 こづつ/人	銅線+リング	1 本/人
ニッパー	1 こ/テーブル	横棒	1 本/人

TABLE I: 材料、器具など

机の角に、図 2 のように装置をセットアップする。

B. 測定

まず、以下の測定を行う。

- 錘の直径をノギスを使って測定する。
- 横棒の上向きの角の机上面からの高さを 1 m 定規で測定する。



FIG. 2: 全体像と細部。銅線はチャックを使って、錘に固定する。また、振動の支点にはリングを使用する。横棒は机上面からの高さを 1 m の物差しで測定できる最高の高さに固定する。その際、横棒の角を上向きにすること。

それぞれの誤差はどの程度か評価せよ。その後、以下の実験を行う。

1. 錘の最下点の高さ h を測定せよ。
2. 振り子を僅かな振幅で振らせて、100 回振動するのに要した時間 T_{100} を測定する。振り子を小さな振幅で振らせるために、図 3 のように磁石と釘を用いる。



FIG. 3: 釘と磁石を用いて振らせる。

5 つの異なった h (だいたい 10, 100, 200, 300, 400 mm) において測定すること。すぐに結果をプロットし、測定の妥当性をチェックせよ。長さの調節はニッパーで銅線の上部を切って短くすることによって行う。

銅線を切ってしまうので、再実験ができない。必ず測定の度に結果をプロットしてその測定が妥当かどうか検討しながら実験を進めること。 $1/l$ を横軸に、 ω^2 を縦軸にデータをプロットするとほぼ直線になるはずである。

C. 測定データの整理、解析、評価

1. 単振り子としての解析

$1/l$ を横軸に、 ω^2 を縦軸にグラフを描き、その傾きから g を求めよ。実験中は目分量で直線を引いて傾きを求める。

レポート提出時には最小 2 乗法を用いて計算せよ。また、そのとき傾きの誤差がどの程度か考察せよ。

h	T_{100}	l	$1/l$	ω^2

TABLE II: 測定データと単振り子としての解析

2. 実体振り子としての解析

各 h に対して、 $\frac{2}{5}(a/l)^2$ を計算せよ。さらに、表 III を用いて実体振り子として解析した g を求める。

h	$\omega^2 l$	$\frac{2}{5} \left(\frac{a}{l}\right)^2$	$\omega^2 l \left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{a}{l}\right)^2\right)$

TABLE III: 実体振り子としての解析

3. 誤差と解析方法の評価

単振り子あるいは実体振り子として解析して得られた g の誤差を考察して、実体振り子としての解析が意味があるかを検討せよ。また、実体振り子としての解析が意味を持つようにするためには、各測定の精度がどの程度必要か検討せよ。

III. 後片付け

結果が得られたら指導教員に報告し、実験終了の許可を得る。終了の許可が得られたならば、後片付けを行う。実験装置を分解して、机上に整理しておくこと。特に鋼鉄線はきれいに巻いて箱に戻すこと。実験終了後は、返却されたレポートの修正、本実験のレポートの作成を行うこと。原則 4 時 20 分まで解散はしない。

IV. レポート

レポートの結論は g の値である。また、以下の点について考察せよ。

- 単振り子、および実体振り子として解析した g の誤差について議論せよ。
- 実体振り子としての補正 $\frac{2}{5} \left(\frac{a}{l}\right)^2$ が意味を持つために必要な各測定量の精度について議論せよ。
- 実験改善の提案をせよ。