第4章　波動

4.1　単振動の運動方程式

$$\underbrace{m}_{\text{慣性}}\frac{d^2x}{dt^2}=\underbrace{-kx}_{\text{復元力}}$$

解は $x=A\sin(\omega t+\phi)$ ここで A は振幅、$\omega=\sqrt{k/m}$ は角振動数。
　運動における不変量

$$\int \underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}}_{m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}((\frac{dx}{dt})^2)}\ dt=\int \underbrace{-kx\frac{dx}{dt}}_{-k\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x^2}\ dt$$

よって

$$\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2+\frac{1}{2}kx^2=const=\frac{1}{2}A^2m\omega^2$$

すなわち、運動エネルギーと位置エネルギーの和は一定。またそれぞれの時間平均は $\frac{1}{4}A^2m\omega^2$ である。

4.2　単振動の合成

4.2.1　同一直線上の場合

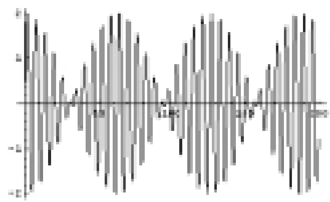
$x_1=c_1\sin(\omega_1t+\phi_1)$ と $x_2=c_2\sin(\omega_2t+\phi_2)$ の合成。

- $\omega_1=\omega_2=\omega$ の場合

$$x=x_1+x_2=c\sin(\omega t+\phi)\qquad \text{ただし、}\begin{cases} c=\sqrt{c_1^2+c_2^2+2c_1c_2\cos(\phi_1-\phi_2)} \\ \tan\phi=\dfrac{c_1\sin\phi_1+c_2\sin\phi_2}{c_1\cos\phi_1+c_2\cos\phi_2}\end{cases}$$

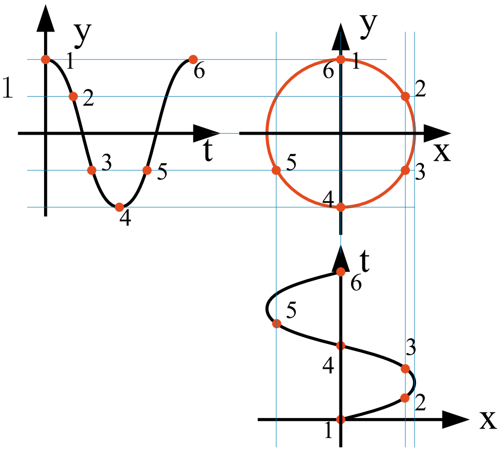
- $c_1=c_2=c$ の場合

$$x=x_1+x_2=2c\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2})\sin(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2})$$



特に $\omega_1\sim\omega_2$ の場合、うなりが生じる。

4.2.2　互いに直交した単振動：リサージュ図形



- $x = c_1 \sin(\omega t), y = c_2 \sin(\omega t + \pi/2)$ の場合

  $$\frac{x^2}{c_1^2}+\frac{y^2}{c_2^2} = \sin^2(\omega t)+\sin^2(\omega t+\pi/2) = \sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t) = 1$$

  合成した運動は楕円になる。

- $x = c_1 \cos(\omega t), y = c_2 \cos(2\omega t)$ の場合

  $$y = c_2(2\cos^2(\omega t) - 1) = 2c_2(\frac{x}{c_1})^2 - c_2$$

  合成した運動は放物線になる。

4.3　減衰振動

単振動する質点に早さに比例する抵抗力が作用する場合を考察する。

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -m\omega^2 x \underbrace{-2m\gamma\frac{d}{dt}x}_{\text{抵抗力}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{d}{dt}x + \omega^2 x = 0$$

$$\Downarrow \qquad x(t) = e^{-\gamma t}X(t) \text{ とおくと}$$

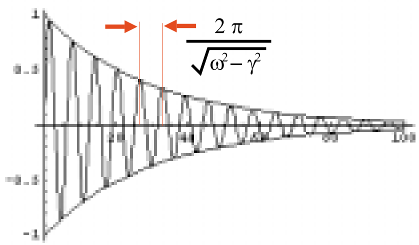
$$e^{-\gamma t}(\frac{d^2}{dt^2}X + (\omega^2 - \gamma^2)X) = 0$$

- $\omega^2 > \gamma^2$ の場合：減衰振動

  $$\frac{d^2}{dt^2}X + (\omega^2 - \gamma^2)X = 0$$

  $$\Downarrow$$

  $$\frac{d^2}{dt^2}X + \omega'^2 X = 0$$

  ここで $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} > 0$ であり、$X(t) = c\sin(\omega' t + \phi)$ がこの式の解になる。よって

  $$x(t) = ce^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \phi)$$

- $\omega^2 < \gamma^2$ の場合：過減衰

  $$\frac{d^2}{dt^2}X + (\omega^2 - \gamma^2)X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2}{dt^2}X = \gamma'^2 X \qquad \text{ここで} \gamma' = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} > 0$$

  $X(t) = ce^{\pm\omega' t}$ がこの式の解になる。よって

  $$x(t) = Ae^{-(\gamma+\gamma')t} + Be^{-(\gamma-\gamma')t}$$

- $\omega^2 = \gamma^2$ の場合：臨界減衰

$$\frac{d^2}{dt^2}X + (\omega^2 - \gamma^2)X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2}{dt^2}X = 0$$

$X(t) = A + Bt$ がこの式の解になる。よって

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

4.4 強制振動

減衰振動系に外部から振動的な力が作用する場合を考察する。

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\gamma\frac{d}{dt}x + \omega^2 x = f_0 \cos \omega_e t$$

$x = A\cos(\omega_e t - \delta)$ となる解を求める。代入して整理すると、

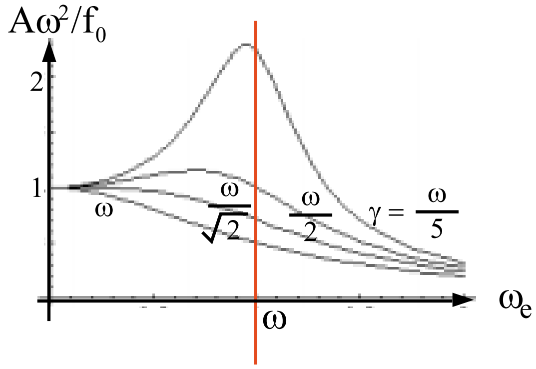
$$\{-\omega_e^2 A\cos\delta + 2\gamma A\omega_e \sin\delta + A\omega^2\cos\delta - f_0\}\cos\omega_e t + \{-\omega_e^2 A\sin\delta - 2\gamma A\omega_e\cos\delta + A\omega^2\sin\delta\}\sin\omega_e t = 0$$

任意の時刻 t について等号が成立するので

$$-\omega_e^2 A\cos\delta + 2\gamma A\omega_e\sin\delta + A\omega^2\cos\delta - f_0 = 0$$
$$A\{-\omega_e^2\sin\delta - 2\gamma\omega_e\cos\delta + \omega^2\sin\delta\} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega^2 - \omega_e^2}$$



この式より $\cos^2\delta = \dfrac{(\omega^2 - \omega_e^2)^2}{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}$。

また, 第１式より $A\dfrac{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2} = \dfrac{f_0}{\cos\delta}$。よって $A = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$。

$0 < \gamma/\omega < 1/\sqrt{2}$ ならば $\omega_e = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ の時に振幅 A は最大になる。特に $\gamma \sim 0$ ならば $\omega_e \sim \omega$ で振幅は最大になる。

4.5 連成振動

4.5.1 基準モード

運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \quad (1)$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}x_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \quad (2)$$

- (1)+(2) より、$m\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}} = -k\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}$

  ここで $Q_1 = \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$m\frac{d^2}{dt^2}Q_1 = -kQ_1$$

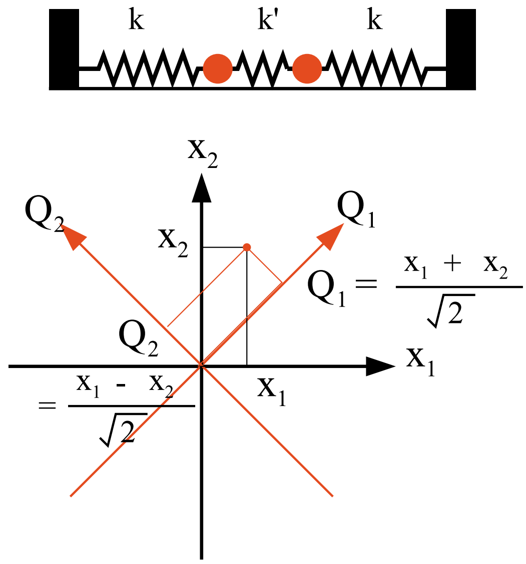
  解は $Q_1 = c_1\sin(\omega_1 t + \phi_1)$、$\omega_1 = \sqrt{k/m}$。

- (1)-(2) より、$m\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}} = -(k+2k')\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}$

  ここで $Q_2 = \dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$m\frac{d^2}{dt^2}Q_2 = -(k+2k')Q_2$$

  解は $Q_2 = c_2\sin(\omega_2 t + \phi_2)$、$\omega_2 = \sqrt{(k+2k')/m}$。



以上により、連成振動の解は

$$x_1 = c_1'\sin(\omega_1 t + \phi_1) + c_2'\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2 = c_1'\sin(\omega_1 t + \phi_1) - c_2'\sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Normal mode（基準振動）: $Q_1 =$ 2つの重りが同方向に動く。$Q_2 =$ 逆方向に動く。

$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{基準振動の重ね合わせ}}$ 実際の振動

4.5.2 行列を使った解法

x_1, x_2 に ω で振動する解を仮定すると、

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -\omega^2 x_1, \qquad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -\omega^2 x_2$$

よって、運動方程式より以下の式が成立しなければならない。

$$-m\omega^2 x_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1)$$
$$-m\omega^2 x_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - (k+k') & k' \\ k' & m\omega^2 + (k+k') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

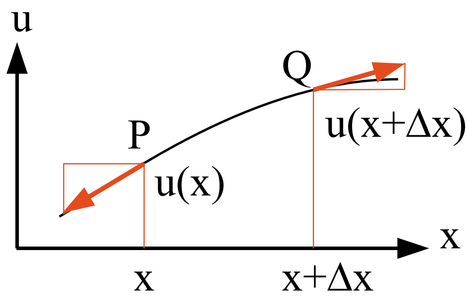
x_1, x_2 が 0 でない解を持つ条件は

$$(m\omega^2 - (k+k'))^2 - k'^2 = 0 \Longrightarrow \omega^2 = \frac{k+k'}{m} \pm \frac{k'}{m}$$

4.6 弦の振動

4.6.1 波動方程式の導出とその解

線密度 σ、張力 T の弦の横振動を考える。



- P で作用する力

$$x\text{ 方向：}-T\text{、}u\text{ 方向：}-T(\frac{\partial u}{\partial x})_x$$

- Q で作用する力

$$x\text{ 方向：}T\text{、}u\text{ 方向：}T(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x}$$

運動方程式は $\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x = T\{(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x} - (\frac{\partial u}{\partial x})_x\}$ となる。ここで $(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x} - (\frac{\partial u}{\partial x})_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$ を用いて、

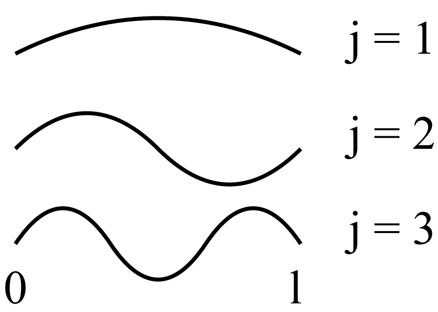
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

運動方程式の解を求めるために $u(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \phi)$ を代入すると

$$-\omega^2 f(x)\cos(\omega t+\phi) = \frac{T}{\sigma}\frac{d^2 f}{dx^2}\cos(\omega t+\phi) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f, \qquad \text{ただし } k^2 = \frac{\sigma}{T}\omega^2$$

境界条件 $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ を満たす $f(x)$ の解は $f_j(x) = c_j\sin(k_j x)$、ただし $k_j = \frac{\pi}{\ell}j$、そして $j = 1,2,3\ldots$。
以上により

$$u_j(x,t) = c_j\sin(k_j x)\cos(\omega_j t + \phi_j)$$



4.6.2 弦が振動している時の運動エネルギーの時間平均

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^\ell \frac{\sigma}{2}(\frac{\partial u}{\partial t})^2 dx \right\rangle_{\text{時間平均}} &= \int_0^\ell \frac{\sigma}{2}\sin^2(k_j x)\left\langle \sin^2(\omega_j t+\phi_j)\right\rangle_{\text{時間平均}} \omega_j^2 dx \\
&= \frac{\sigma}{2}\omega_j^2 \underbrace{\left\langle \sin^2(\omega_j t+\phi_j)\right\rangle_{\text{時間平均}}}_{=1/2} \underbrace{\int_0^\ell \sin^2(k_j x)dx}_{=\ell/2} \\
&= \frac{\pi^2}{8}\frac{T}{\ell}j^2
\end{aligned}$$

位置エネルギーも含めた弦の振動のエネルギーは $E_j = \frac{\pi^2}{4}\frac{T}{\ell}j^2$

4.7 波動方程式とその解

- $u(x,t)=f(x-vt)$：$+x$ 方向に速度 v で $f(x)$ が走っている。

$$Note:\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x-vt)=f''(x-vt),\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x-vt)=v^2f''(x-vt)$$

- 解の重ね合わせ

  $f_1(x-vt)$ と $f_2(x-vt)$ が解ならば $c_1f_1(x-vt)+c_2f_1(x-vt)$ も解になる。

- 波束と反射
  - 固定端: $[u(x,t)]_{x=\ell}=0\Rightarrow u(x,t)=f(x-vt)-f(2\ell-(x+vt))$
  - 自由端: $\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=\ell}=0\Rightarrow u(x,t)=f(x-vt)+f(2\ell-(x+vt))$

- 正弦波について

$$\begin{aligned}u(x,t)&=A\sin(k(x-vt)+\phi)\\&=A\sin(kx-\omega t+\phi)\end{aligned}$$

  $\lambda=2\pi/k$：波長、k：波数、$T=2\pi/\omega$：周期、$1/T$：振動数。

4.8 平面波と球面波

3次元空間における波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=v^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})u$$

- 平面波

  $u(\vec{r},t)=f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$ を考える。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\vec{k}\cdot\vec{r})&=\frac{\partial}{\partial x}(k_xx+k_yy+k_zz)=k_x\\ \frac{\partial}{\partial x}f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)&=k_xf'(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)&=k_x^2f''(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\end{aligned}$$

  同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)&=k_y^2f''(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)&=k_z^2f''(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\end{aligned}$$

  一方

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)=\omega^2f''(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

  よって $u(\vec{r},t)=f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$ は波動方程式の解であることがわかる。

- 球面波

  $u(\vec{r},t)=\frac{1}{r}f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$ を考える。ただし $k_x=k_y=k_z=k/\sqrt{3}$ とする。

$$Note:\frac{\partial}{\partial x}u(\vec{r},t)=-\frac{x}{r^3}f+\frac{k_x}{r}f'$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(\vec{r},t) &= -\frac{1}{r^3}f+3\frac{x^2}{r^5}f\underbrace{+\frac{x}{r^3}k_xf'-\frac{x}{r^3}k_xf'}_{=0}+\frac{1}{r}k_x^2f'' \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(\vec{r},t) &= -\frac{1}{r^3}f+3\frac{y^2}{r^5}f+\frac{y}{r^3}k_yf'-\frac{y}{r^3}k_yf'+\frac{1}{r}k_y^2f'' \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(\vec{r},t) &= \underbrace{-\frac{1}{r^3}f+3\frac{z^2}{r^5}f}_{0}+\frac{z}{r^3}k_zf'-\frac{z}{r^3}k_zf'+\frac{1}{r}k_z^2f''
\end{aligned}$$

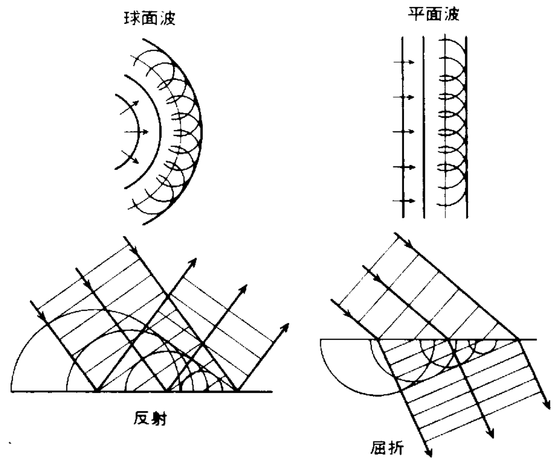
以上により

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})u(\vec{r},t)=\frac{1}{r}k^2f''(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

平面波の場合と同様に $u(\vec{r},t)=\dfrac{1}{r}f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$ は波動方程式の解であることがわかる。

4.9 波の伝搬

ホイヘンス (Huygens) の原理
一つの波面上のすべての点が２次波を出すと考え、次の時刻における波面はこれらの２次波の波面の包絡面によって与えられる。



4.10 幾何光学

波長に比べて十分大きい物体を対象に波の伝搬を考える時には、波の進路を幾何学的な線で扱うことができる。

- フェルマーの定理

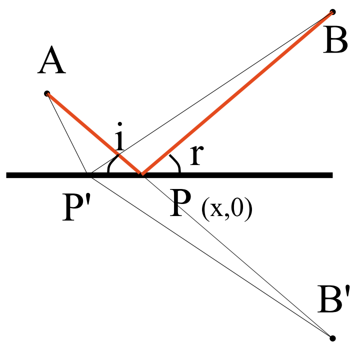
  １点から出てほかの１点へ達する波が取る経路はその両端を固定したまま途中を連続的に変化させてできるあらゆる仮想的な経路に対して通過に要する時間が極小値を取るものである。
  光の経路＝光学距離（実際の距離 $\times$ 屈折率）最小のもの

- フェルマーの定理より反射の法則を導く。

$$t = \frac{1}{c}\{\sqrt{(x_1-x)^2+y_1^2}+\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}\}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\{\frac{x-x_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+y_1^2}} - \frac{x_2-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}\} = 0 \text{ より}$$

$$\cos i = \cos r \Leftrightarrow i = r$$

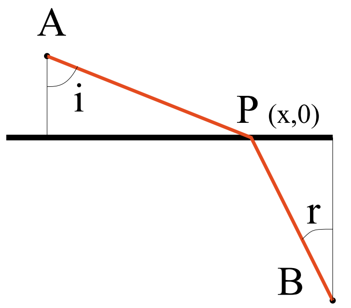


- フェルマーの定理より屈折の法則を導く。

$$t = \frac{\sqrt{(x_1-x)^2+y_1^2}}{c_I} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}{c_{II}}$$

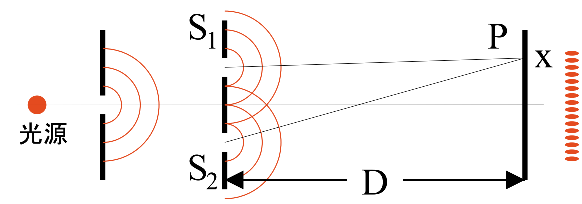
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_I}\frac{x-x_1}{\sqrt{(x_1-x)^2+y_1^2}} - \frac{1}{c_{II}}\frac{x_2-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}} = 0 \text{ より}$$

$$\sin i/c_I = \sin r/c_{II}$$



4.11　波の干渉：ヤングの実験

ホイヘンスの原理より 2 つのスリット S_1 と S_2（距離は d）が 2 つの光源のように働く。



$$\overline{S_1P} = \sqrt{D^2+(x-\frac{d}{2})^2} \approx D\{1+\frac{(x-\frac{d}{2})^2}{2D^2}\}$$

$$\overline{S_2P} = \sqrt{D^2+(x+\frac{d}{2})^2} \approx D\{1+\frac{(x+\frac{d}{2})^2}{2D^2}\}$$

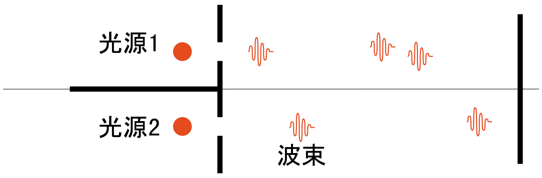
光路差 $\overline{S_1P} - \overline{S_2P} = \frac{d}{D}x$ が波長 λ の n 倍の場合明るくなり（波の山と山、谷と谷が強め合う）、$n+\frac{1}{2}$ 倍の場合暗くなる（波の山と谷が打ち消しあう）。

その他、薄膜による干渉やニュートンリングなどが干渉の例として有名。光路長と反射や透過の際の位相変化を考えればヤングの実験と同じ。

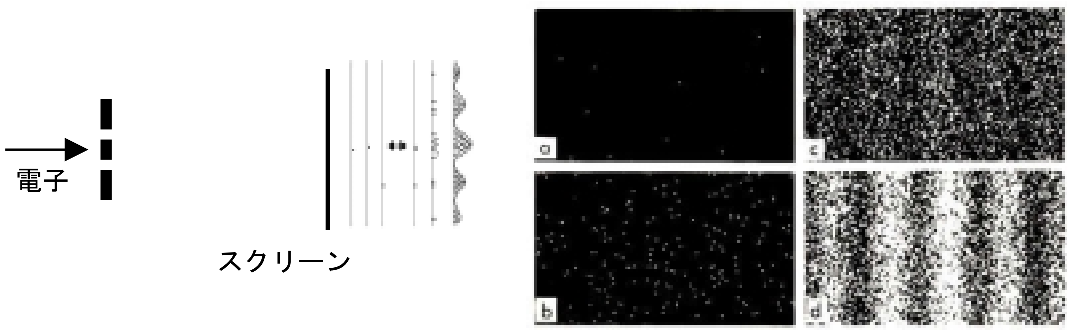
4.12　可干渉性と非干渉性

「干渉」する光を「可干渉性」の光と呼ぶ。多くの光は「非干渉性」である。可干渉性の光の例は「レーザー光」。

ヤングの実験において、２番目のスリットにそれぞれ光源を配置すると干渉縞は現れない。また、ランプのように大きさのある光源から出る光は多数の原子からランダムに波束が出ているので同じく干渉しない。



4.13　物質波の干渉

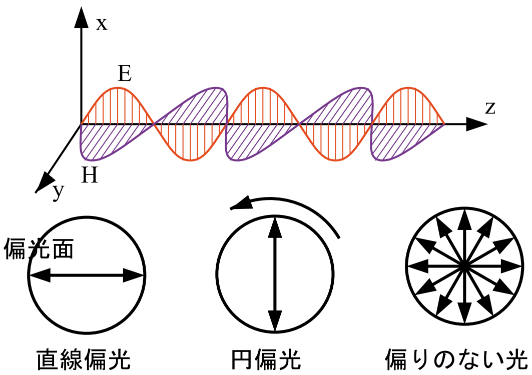


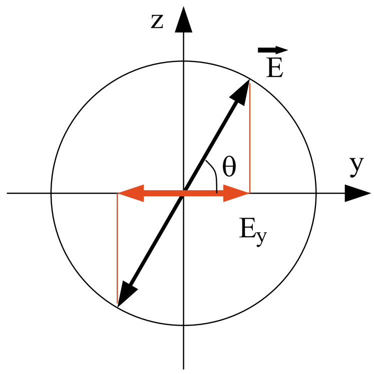
日立基礎研究所　外村氏が撮影

4.14　偏光：光の場合

振動の方向が波の進行方向と垂直＝横波。

偏光子：特定の方向に振動する直線偏光成分のみを通す。下図の場合は y 方向に振動する成分のみを通す。





光が波であることを示唆する実験。